

Une remarque sur les extensions pondérées de l'inégalité de Turán–Kubilius

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum

Abstract. We provide a new proof, in a slightly different setting and along classical lines, of a general, weighted form of the Turán–Kubilius inequality due to P.D.T.A. Elliott, namely

$$\sum_{n \leq x} g(n) |f(n) - E_f(x)|^2 \ll x H_x D_f(x)^2,$$

with

$$E_f(x) := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad D_f(x)^2 := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}.$$

This is valid for all complex additive functions f , under the mean square assumption

$$\sum_{n \leq x, d \parallel n} g(n)^2 \leq x H_x^2 / d \quad (\omega(d) \leq 2, x \geq 1)$$

upon the non-negative weights $g(n)$, where $\omega(d)$ stands for the total number of distinct prime factors of d .

1. Introduction

Nous nous intéressons ici à la forme pondérée de l'inégalité de Turán–Kubilius

$$(1.1) \quad V_f(x; g) := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leq x} g(n) |f(n) - E_f(x)|^2 \leq C(x; g) D_f(x)^2$$

où f est une fonction additive complexe, g est une fonction arithmétique réelle positive ou nulle et où l'on a posé

$$G_1(x) := \sum_{n \leq x} g(n), \quad E_f(x) := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad D_f(x)^2 := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}.$$

Sous l'hypothèse

$$(1.2) \quad \sup_{n \leq x} g(n) \leq H_x,$$

nous déduisons immédiatement des résultats classiques de Hildebrand [3] et Kubilius [4] que (1.1) a lieu avec

$$(1.3) \quad C(x; g) := \left\{ \frac{3}{2} + o(1) \right\} \frac{x H_x}{G_1(x)}$$

où la quantité $o(1)$ est indépendante de f et g .

Nous nous proposons ici d'examiner la situation où la majoration individuelle (1.2) est remplacée par une majoration en moyenne.

Une telle approche a été considérée dans [1] lorsque g est une fonction arithmétique multiplicative avec comme choix d'espérance la moyenne empirique

$$\frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leq x} g(n) f(n).$$

Cette quantité n'est heuristiquement, et en moyenne, proche de $E_f(x)$ que lorsque $g(p)$ est proche de 1. Dans ce cas, le résultat général suivant, dû à Elliott [2], est applicable. Nous en donnons ici une formulation légèrement différente et une nouvelle démonstration.

Mots clés : Inégalité de Turán–Kubilius, fonctions arithmétiques, fonctions arithmétiques additives, théorie probabiliste des nombres, sommes d'ensembles, grand crible.

2000 Mathematics Subject Classification: primary 11N25, 11N37.

Théorème 1.1. *Sous l'hypothèse*

$$(1.4) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ d \parallel n}} g(n)^2 \leq \frac{xH_x^2}{d} \quad (\omega(d) \leq 2, x \geq 1),$$

l'inégalité de Turán–Kubilius (1.1) a lieu, uniformément en g , avec $C(x; g) \ll xH_x/G_1(x)$.

Remarques. (i) Notons encore

$$G_d(x) := \sum_{\substack{n \leq x \\ d \parallel n}} g(n) \quad (d \geq 1, x \geq 1).$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'hypothèse (1.4) implique

$$(1.5) \quad G_d(x) \leq \frac{xH_x}{d} \quad (\omega(d) \leq 2, x \geq 1),$$

Il en résulte en particulier que $xH_x/G_1(x) \geq 1$.

(ii) Nous établissons plus loin que l'on a

$$(1.6) \quad \frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leq x} f(n)g(n) = E_f(x) + O\left(D_f(x) \frac{xH_x}{G_1(x)}\right).$$

Cela justifie le choix, commode pour les applications, de remplacer dans (1.1) la moyenne empirique par $E_f(x)$.

(iv) Il est facile de vérifier que l'énoncé, apparemment plus particulier, donné par Elliott dans [2] implique le Théorème 1.1. La formulation souple donnée plus haut permet d'expliciter l'uniformité sous-jacente et donc de favoriser le développement d'applications.

(v) La démonstration proposée par Elliott dans [2] repose sur un lemme d'estimation effective de fonctions multiplicatives positives ou nulles et sur une astucieuse utilisation de la formule intégrale de Cauchy. Nous proposons ici une preuve directe utilisant la forme duale de la version classique non pondérée de l'inégalité de Turán–Kubilius.

Lorsque $g(n)$ désigne le nombre des représentations de n sous la forme $n = a + b$ où a (resp. b) parcourt un ensemble de taille A (resp. B), le Théorème 1.1 n'est utile que si l'hypothèse (1.4) est satisfaite avec $H_x = o(\min(A, B))$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Le résultat suivant peut en effet être considéré comme un énoncé de base pour l'ensemble des poids g de ce type.

Théorème 1.2. *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} des sous ensembles de $[1, x]$ tels que $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset [1, x]$, $|\mathcal{A}| = A$, $|\mathcal{B}| = B$. Si $g(n) := |\{(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : a + b = n\}|$ ($n \geq 1$), alors l'hypothèse (1.2), et donc aussi la relation (1.3), est vérifiée avec $H_x := \min(A, B)$.*

À titre d'illustration d'un cas représentatif d'application du Théorème 1.1, nous énonçons le résultat obtenu pour le choix $g = \omega$ où $\omega(n)$ désigne, comme c'est l'usage, le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier naturel n .

Théorème 1.3. *Pour le choix $g = \omega$, l'inégalité de Turán–Kubilius (1.1) est réalisée avec*

$$C(x; \omega) \ll 1.$$

La démonstration est immédiate puisque l'on a dans les hypothèses considérées

$$G_1(x) \asymp x \log_2 x, \quad H_x \asymp \log_2 x.$$

Ici et dans la suite, nous désignons par \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme.

La forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius pondérée peut être énoncée comme suit.

Théorème 1.4. Soit g une fonction arithmétique positive ou nulle satisfaisant (1.4). Pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres complexes, on a

$$(1.7) \quad \sum_{p^\nu \leq x} p^\nu \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ p^\nu \parallel n}} g(n)c_n - \frac{1-1/p}{p^\nu} \sum_{n \leq x} g(n)c_n \right|^2 \ll x H_x \sum_{n \leq x} g(n)|c_n|^2.$$

Preuve de la relation (1.6). Notons M le membre de gauche de (1.6). D'après l'additivité de f , nous pouvons écrire

$$M - E_f(x) = \frac{1}{G_1(x)} \sum_{p^\nu \leq x} f(p^\nu) \left\{ G_{p^\nu}(x) - \frac{1-1/p}{p^\nu} G_1(x) \right\}$$

d'où, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|M - E_f(x)|^2 \leq \frac{1}{G_1(x)^2} \sum_{p^\nu \leq x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu} \sum_{p^\nu \leq x} p^\nu \left| G_{p^\nu}(x) - \frac{1-1/p}{p^\nu} G_1(x) \right|^2.$$

La dernière somme relève de la version duale de l'inégalité de Turán–Kubilius — cf., par exemple, [6], chap. III.3. Nous avons

$$\sum_{p^\nu \leq x} p^\nu \left| G_{p^\nu}(x) - \frac{1-1/p}{p^\nu} G_1(x) \right|^2 \ll x \sum_{n \leq x} g(n)^2 \ll x^2 H_x^2.$$

Cela établit bien le résultat annoncé.

2. Démonstration du Théorème 1.1

Nous pouvons classiquement nous restreindre au cas où f est réelle, positive ou nulle. Décomposons f sous la forme $f = f_1 + f_2$ où $f_2(p^\nu)$ a pour support l'ensemble \mathcal{E} des puissances p^ν telles que $p^\nu > x^{1/4}$ ou $\nu \geq 2$ et $f_1(p^\nu)$ a pour support l'ensemble complémentaire dans celui de toutes les puissances de nombres premiers.

Pour $j = 1, 2$, posons

$$M_{1j} := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leq x} g(n) f_j(n), \quad M_{2j} := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leq x} g(n) f_j(n)^2,$$

de sorte que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} V_f(x; g) &\leq 2 \sum_{1 \leq j \leq 2} (M_{2j} - 2M_{1j}E_{f_j}(x) + E_{f_j}(x)^2) \\ &\leq 2P + 2 \sum_{1 \leq j \leq 2} (Q_j - 2M_{1j}E_{f_j}(x) + E_{f_j}(x)^2), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} P &:= \frac{1}{G_1(x)} \sum_{p^\nu \leq x} f(p^\nu)^2 G_{p^\nu}(x) \\ Q_1 &:= \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q)G_{pq}(x), \quad Q_2 := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p^\nu, q^\mu \in \mathcal{E} \\ p \neq q}} f(p^\nu)f(q^\mu)G_{p^\nu q^\mu}(x). \end{aligned}$$

Comme, en vertu de (1.5), on a $P \leq x H_x D_f(x)^2 / G_1(x)$, nous pouvons écrire

$$(2.2) \quad V_f(x; g) \ll \sum_{1 \leq j \leq 2} (Q_j - 2M_{1j}E_{f_j}(x) + E_{f_j}(x)^2) + \frac{x H_x}{G_1(x)} D_f(x)^2.$$

Soient

$$G_d^*(x) := \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} g(n) \quad (d \geq 1), \quad R_{pq}^*(x) := G_{pq}^*(x) - \frac{G_q^*(x)}{p} - \frac{G_p^*(x)}{q} + \frac{G_1(x)}{pq} \quad (p \neq q).$$

Pour majorer Q_1 , nous observons que l'on a identiquement

$$\begin{aligned} R_{pq}(x) &:= G_{pq}(x) - \frac{(1-1/p)G_q(x)}{p} - \frac{(1-1/q)G_p(x)}{q} + \frac{(1-1/p)(1-1/q)G_1(x)}{pq} \\ &= R_{pq}^*(x) - \left\{ G_{p^2q}^*(x) - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q} \right\} - \left\{ G_{pq^2}^*(x) - \frac{G_{q^2}^*(x)}{p} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{p^2} \left\{ G_q^*(x) - \frac{G_1(x)}{q} \right\} + \frac{1}{q^2} \left\{ G_p^*(x) - \frac{G_1(x)}{p} \right\} \\ &\quad + G_{p^2q^2}^*(x) - \frac{G_{q^2}^*(x)}{p^2} - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q^2} + \frac{G_1(x)}{p^2q^2} \end{aligned}$$

pour tous nombres premiers p, q , $p \neq q$, et nous utilisons le grand crible sous la forme

$$\sum_{pq \leq \sqrt{x}} pq R_{pq}^*(x)^2 \ll x \sum_{n \leq x} g(n)^2 \ll x^2 H_x^2$$

établie dans [5]. Il suit

$$\begin{aligned} Q_1 - 2M_{11}E_{f_1}(x) + E_{f_1}(x)^2 &= U + \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q) \frac{R_{pq}^*(x)}{G_1(x)} \\ &= U + V - 2W_1 + 2W_2 + W_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} U &:= \sum_{p \leq x^{1/4}} f(p)^2 \left\{ \frac{(1-1/p)^2}{p^2} - \frac{2(1-1/p)G_p(x)}{pG_1(x)} \right\} \\ &\ll \frac{xH_x}{G_1(x)} \sum_{p \leq x^{1/4}} \frac{f(p)^2}{p^2} \ll \frac{xH_x}{G_1(x)} D_f(x)^2 \\ V &:= \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q) \frac{R_{pq}^*(x)}{G_1(x)} \ll \frac{xH_x}{G_1(x)} D_f(x)^2, \\ W_1 &:= \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q) \left\{ G_{p^2q}^*(x) - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q} \right\}, \\ W_2 &:= \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} \frac{f(p)}{p^2} f(q) \left\{ G_q^*(x) - \frac{G_1(x)}{q} \right\}, \\ W_3 &:= \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p, q \leq x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q) \left\{ G_{p^2q^2}^*(x) - \frac{G_{q^2}^*(x)}{p^2} - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q^2} + \frac{G_1(x)}{p^2q^2} \right\}. \end{aligned}$$

La forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius fournit

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \frac{1}{G_1(x)} \sum_{p \leq x^{1/4}} f(p) \left\{ \sum_{q \leq x} \frac{f(q)^2}{q} \sum_{q \leq x/p^2} q \left\{ G_{p^2q}^*(x) - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q} \right\}^2 \right\}^{1/2} \\ &\ll \frac{D_f(x)xH_x}{G_1(x)} \sum_{p \leq x^{1/4}} \frac{f(p)}{p^2} \ll D_f(x)^2 \frac{xH_x}{G_1(x)} \end{aligned}$$

puisque

$$\left(\sum_{p \leq x^{1/4}} \frac{f(p)}{p^2} \right)^2 \leq \sum_{p \leq x} \frac{f(p)^2}{p} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^3} \ll D_f(x)^2.$$

Par un argument semblable, nous obtenons la même majoration pour W_2 . L'estimation de W_3 résulte directement de (1.5), et nous omettons les détails. En reportant dans (2.2), nous obtenons

$$(2.3) \quad \begin{aligned} V_f(x; g) &\ll Q_2 + E_{f_2}(x)^2 + \frac{xH_x}{G_1(x)} D_f(x)^2 \\ &\ll \frac{xH_x}{G_1(x)} \left\{ \left(\sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \right)^2 + D_f(x)^2 \right\}, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (1.5). Or

$$\left(\sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \right)^2 \leq D_f(x)^2 \sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{1}{p^\nu} \ll D_f(x)^2.$$

Bibliographie

- [1] A. Biró & T. Szamuely, A Turán–Kubilius inequality with multiplicative weights, *Acta Math. Hung.* **70** (1996), n° 1-2, 39–56.
- [2] P.D.T.A. Elliott, *Arithmetic functions and integer products*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 272, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [3] A. Hildebrand, An asymptotic formula for the variance of an additive function, *Math. Z.* **183** (1983), 145–170.
- [4] J. Kubilius, Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien), *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (n° 2), 110–117.
- [5] H.L. Montgomery, A note on the large sieve, *J. London Math. Soc.* **43**, (1968) 93–98.
- [6] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Régis de la Bretèche
IMJ, UMR 7586
Université Paris Diderot-Paris 7
UFR de Mathématiques, Case 7012
Bâtiment Chevaleret
75205 Paris cedex 13,
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France