

# Mesures quadratiques de la proximité des diviseurs

A. Raouj, A. Stef & G. Tenenbaum

## Sommaire

<b>1</b>	Introduction et énoncé des résultats.....	1
<b>2</b>	Preuve du Théorème 1.1.....	4
<b>3</b>	Preuve du Théorème 1.2.....	5
	3.1 Lemmes.....	5
	3.2 Complétion de l'argument.....	9
<b>4</b>	Preuve du Théorème 1.3.....	14
	4.1 Notations.....	14
	4.2 Propriétés arithmétiques des entiers ayant $w$ facteurs premiers.....	14
	4.3 Préparation.....	19
	4.4 Complétion de l'argument.....	21
<b>5</b>	Preuve du Corollaire 1.6.....	23

## 1. Introduction et énoncé des résultats

L'aspect fractal de la suite des diviseurs d'un entier normal peut être révélé de diverses manières, comme l'existence d'une dimension de Hausdorff convenablement définie [5]. Cependant, les critères les plus fins sont liés à la conjecture d'Erdős datant de la fin des années 1930, mentionnée dans [3] et établie dans [6], selon laquelle presque tout entier possède deux diviseurs dont le rapport est dans l'intervalle  $]1, 2[$ . Plusieurs mesures quantitatives associées à cette conjecture ont été considérées dans [4], notamment les fonctions arithmétiques

$$E(n) := \min_{dd'|n, d < d'} \log(d'/d), \quad U(n, \alpha) := \sum_{\substack{dd'|n, (d, d')=1 \\ |\log(d'/d)| \leq (\log n)^\alpha}} 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

D'intéressantes variantes de ces fonctions sont étudiées dans [10] et [15].

Comme dans [4], définissons deux nouvelles fonctions arithmétiques  $n \mapsto e(n)$  et  $n \mapsto u(n, \alpha)$  par les relations

$$\begin{aligned} E(n) &= (\log n)^{1-\log 3} \exp \{e(n) \sqrt{\log_2 n}\}, \\ U(n, \alpha) &= (\log n)^{\log 3-1+\alpha} \exp \{u(n, \alpha) \sqrt{\log_2 n}\}, \end{aligned} \quad (n \geq 3).$$

Ici et dans la suite, nous désignons par  $\log_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme. Il a été établi dans [4] que l'on a

$$e(n) \ll \sqrt{\log_3 n}, \quad u(n, \alpha) \ll \sqrt{\log_3 n} \quad \text{pp},$$

où la mention pp indique que la relation ainsi désignée est valable sur un ensemble d'entiers de densité naturelle unité. Une hypothèse heuristique d'équirépartition des quantités  $\log(d'/d)$  lorsque  $dd'|n$  conduit à supposer que l'on a, en un sens à préciser,

$$E(n) \approx \frac{\log n}{3^{\omega(n)}}, \quad U(n, \alpha) \approx 3^{\omega(n)} (\log n)^{\alpha-1} \quad \text{pp},$$

où  $\omega(n)$  désigne le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier  $n$ . Il est en particulier conjecturé dans [4], chap. 5, p. 98, que les fonctions  $e(n)$  et  $u(n, \alpha)$  possèdent des lois de répartition limites. L'un des objectifs du présent travail consiste à établir cette conjecture.

Nous notons  $\Phi$  la fonction de Gauss

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt \quad (y \in \mathbb{R}).$$

**Théorème 1.1.** *Les fonctions arithmétiques  $n \mapsto e(n)$  et  $n \mapsto u(n, \alpha)$  ( $\alpha > 1 - \log 3$ ) possèdent des lois de répartition limites dont la fonction de répartition commune  $F$  est définie par  $F(y) := \Phi(y/\log 3)$ . Plus précisément, pour tout  $\alpha > 1 - \log 3$  fixé et uniformément sous les conditions  $x > 16$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , nous avons*

$$(1.1) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ e(n) \leq y}} 1 = xF(y) + O\left(\frac{x(\log_3 x)^2}{\sqrt{\log_2 x}}\right), \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ u(n, \alpha) \leq y}} 1 = xF(y) + O\left(\frac{x(\log_3 x)^2}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

De plus, la loi de répartition de la fonction  $n \mapsto u(n, 1 - \log 3)$  est donnée par

$$F^*(y) := \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \Phi(y/\log 3) & \text{si } y \geq 0, \end{cases}$$

et, lorsque  $\alpha = 1 - \log 3$ , la seconde relation (1.1) a lieu uniformément pour  $x > 16$ ,  $y \geq 0$ , quitte à remplacer  $F$  par  $F^*$ .

*Remarque.* Lorsque  $\alpha < 1 - \log 3$ , on a  $U(n, \alpha) = 1$  pp ; la question de la répartition de  $u(n, \alpha)$  est donc sans objet.

Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $t \geq 0$ , nous posons

$$(1.2) \quad \nabla(n, t) = \nabla^-(n, t) := \sum_{\substack{dd' | n, (d, d') = 1 \\ |\log(d'/d)| \leq t}} 1, \quad \nabla^+(n, t) := 1 + \sum_{\substack{dd' | n \\ 0 < |\log(d'/d)| \leq t}} 1,$$

de sorte que

$$(1.3) \quad E(n) = \min\{t \geq 0 : \nabla^\pm(n, t) > 1\}, \quad U(n, \alpha) = \nabla(n, (\log n)^\alpha) \quad (n \geq 1).$$

Notre approche consiste à évaluer  $\nabla^\pm(n, t)$  sur les ensembles

$$\mathcal{E}_w(x) := \{n \leq x : \omega(n) = w\}$$

lorsque le paramètre entier  $w$  est voisin de l'ordre normal  $\log_2 x$ .

Nous posons

$$\pi_w(x) := |\mathcal{E}_w(x)| \quad (x \geq 1).$$

Sauf mention contraire, dans toute la suite de ce travail, les constantes impliquées par les symboles  $\ll$  de Vinogradov et  $O$  de Landau sont absolues et la lettre  $c$ , avec ou sans indice, désigne une constante absolue strictement positive.

**Théorème 1.2.** *Pour une constante convenable  $c > 0$  et sous les conditions*

$$x > 16, \quad t \geq 0, \quad w \in \mathbb{N}, \quad |w/\log_2 x - 1| \leq c, \quad \frac{6}{5} \log_3 x \leq \xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x,$$

*l'inégalité*

$$(1.4) \quad \nabla^+(n, t) \leq 1 + \frac{t3^w w e^{3\xi}}{\log x}$$

*a lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)e^{-\xi/244}$  exceptions.*

**Théorème 1.3.** Soit  $B > 0$ . Il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que, sous les conditions

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x > 16, \quad 0 \leq t \leq \log x, \quad (\log_2 x)^{10} \leq \psi \leq (\log x)^B, \\ w \in \mathbb{N}, \quad |w - \log_2 x| \leq (\log \psi)^{1/4} (\log_2 x)^{1/2}, \end{aligned}$$

l'inégalité

$$\nabla^-(n, t) \geq \frac{3^w t}{\psi \log x}$$

ait lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll e^{-c_1 \sqrt{\log \psi}} \pi_w(x)$  exceptions.

Désignons par  $\Omega(n)$  le nombre des facteurs premiers d'un entier  $n$ , comptés avec multiplicité, et posons

$$(1.6) \quad Q(y) := y \log y - y + 1 \quad (y > 0).$$

Une version quantitative classique de l'inégalité de Hardy–Ramanujan — voir par exemple [16], formule (3.52) p. 438 — stipule que, pour tous  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $x > 3$ , on a

$$(1.7) \quad (1 - \varepsilon) \log_2 x \leq \omega(n) \leq \Omega(n) \leq (1 + \varepsilon) \log_2 x$$

pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $\ll \varepsilon^{-2} x (\log x)^{-Q(1+\varepsilon)}$  exceptions. Cela nous permet de déduire des Théorèmes 1.2 (avec  $\xi := \frac{4}{3} \log_3 x$ ) et 1.3 (avec  $\psi := (\log_2 x)^{10}$ ) le corollaire suivant, établi grâce aux formules (1.3).

**Corollaire 1.4.** (i) Pour chaque  $\alpha \in ]-\infty, 1]$  fixé et tout  $x > 16$ , les inégalités

$$(1.8) \quad E(n) \geq \frac{\log n}{3^{\omega(n)} (\log_2 n)^5}, \quad U(n, \alpha) \leq 1 + 3^{\omega(n)} (\log_2 n)^5 (\log n)^{\alpha-1}$$

ont lieu pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $\ll x (\log_2 x)^{-1/183}$  exceptions.

(ii) Il existe une constante  $b_1 > 0$  telles que, pour chaque  $\alpha \in ]-\infty, 1]$  fixé et tout  $x > 16$ , les inégalités

$$(1.9) \quad E(n) \leq \frac{2 \log n}{3^{\omega(n)}} (\log_2 n)^{10}, \quad U(n, \alpha) \geq \frac{3^{\omega(n)} (\log n)^{\alpha-1}}{2 (\log_2 n)^{10}},$$

aient lieu pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $\ll x e^{-b_1 \sqrt{\log_3 x}}$  exceptions.

Nous pouvons également exploiter les renseignements acquis sur la taille des ensembles exceptionnels pour obtenir une évaluation uniforme, valable pp, de la fonction  $t \mapsto \nabla(n, t)$ .

**Corollaire 1.5.** Il existe une constante absolue  $A > 0$  telle que

$$(1.10) \quad \frac{3^{\omega(n)} t}{\log n} e^{-A(\log_3 n)^2} \leq \nabla^\pm(n, t) \leq 1 + \frac{t 3^{\omega(n)} (\log_2 n)^{736}}{\log n} \quad (0 \leq t \leq \log n) \quad \text{pp.}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer les Théorèmes 1.2 et 1.3 avec

$$\xi := 245 \log_3 x, \quad \psi := e^{2(\log_3 x)^2 / c_1^2},$$

aux points tests  $t_j := e^j$  ( $-\log_2 x - 1 \leq j \leq 1 + \log_2 x$ ). Le résultat annoncé découle alors de la croissance en  $t$  de  $\nabla(n, t)$ .  $\square$

Ce résultat permet à son tour l'estimation de fonctions arithmétiques générales du type

$$\vartheta(n; f) := \sum_{\substack{dd'|n \\ d < d'}} f(\log(d'/d)).$$

Nous dirons qu'une fonction  $f : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  est à croissance polynomiale s'il existe une constante  $K(f) > 0$  telle que

$$f(a)/b^{K(f)} \leq f(ab) \leq f(a)b^{K(f)} \quad (a > 0, b \geq 1).$$

**Corollaire 1.6.** *Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction à croissance polynomiale. Nous avons*

$$(1.11) \quad \vartheta(n; f) = \frac{3^{\omega(n)}}{\log n} e^{O((\log_3 n)^2)} \int_{(\log n)/3^{\omega(n)}}^{\log n} f(t) dt \quad \text{pp.}$$

Le cas  $f(t) := 1/t^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) de (1.11) est particulièrement intéressant. Nous obtenons

$$(1.12) \quad \sum_{\substack{dd'|n \\ d < d'}} \frac{1}{\{\log(d'/d)\}^\alpha} = \frac{3^{\omega(n)} + 3^{\alpha\omega(n)}}{(\log n)^\alpha} e^{O((\log_3 n)^2)} \quad \text{pp,}$$

ce qui indique notamment que la sommation est essentiellement dominée par son plus grand terme si, et seulement si,  $\alpha \geq 1$ .

## 2. Preuve du Théorème 1.1

Le Théorème 1.1 découle du Corollaire 1.4 — mais on pourrait également utiliser une variante effective, établie de la même manière, du Corollaire 1.5 — par le biais du théorème classique d'Erdős-Kac, dont nous rappelons ci-dessous un énoncé avec terme d'erreur optimal.<sup>(1)</sup>

**Lemme 2.1 (Erdős-Kac).** *Nous avons, uniformément pour  $x \geq 3$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,*

$$(2.1) \quad \left| \left\{ n \leq x : \frac{\omega(n) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \leq y \right\} \right| = x\Phi(y) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

Cela permet de prouver très simplement le Théorème 1.1. Nous nous contentons de fournir les détails dans le cas de la fonction  $e(n)$ , les calculs étant essentiellement identiques pour  $u(n, \alpha)$ .

Il résulte des Théorèmes 1.2 et 1.3 que l'on a, pour une constante  $A$  convenable,

$$(2.2) \quad \frac{\log n}{3^{\omega(n)}(\log_2 n)^A} \leq E(n) \leq \frac{\log n}{3^{\omega(n)}} e^{A(\log_3 n)^2}$$

pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $\ll x/\log_2 x$  exceptions. En reportant dans la définition, nous obtenons, pour ces mêmes entiers,

$$e(n) = \frac{(\log 3)\{\log_2 n - \omega(n)\}}{\sqrt{\log_2 n}} + O\left(\frac{(\log_3 n)^2}{\sqrt{\log_2 n}}\right).$$

Au vu de (2.1), cela implique immédiatement le résultat annoncé.

---

1. Voir, par exemple, [16] p. 474

### 3. Preuve du Théorème 1.2

#### 3.1. Lemmes

Le résultat suivant, établi dans [14], fournit une borne supérieure, génériquement exacte à une constante multiplicative près, pour la valeur moyenne sur  $\mathcal{E}_w(x)$  d'une fonction multiplicative positive ou nulle vérifiant une condition de croissance peu restrictive.

Ici et dans toute la suite, la lettre  $p$  désigne exclusivement un nombre premier.

**Lemme 3.1.** Soient  $A$  et  $B$  deux nombres réels  $> 0$  et  $f$  une fonction arithmétique multiplicative à valeurs dans  $[0, +\infty[$  telle que

$$\sum_{p^\nu \leq x} f(p^\nu) \log p^\nu \leq Ax \quad (x \geq 2), \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \leq B.$$

Pour  $w \geq 1$ ,  $x \geq 2$ , nous avons

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \frac{Ax}{(w-1)! \log x} \left( \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} + B \right)^{w-1},$$

où la constante implicite est absolue. En particulier, pour toute constante  $R > 0$ , et uniformément sous la condition  $1 \leq w \leq R \log_2 x$ , nous avons

$$(3.1) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho \sum_{p \leq x} \frac{f(p) - 1}{p} \right\}$$

où l'on a posé  $\varrho := (w-1)/\log_2 x$  et où la constante implicite dépend au plus de  $A, B, R$ .

Nous ferons un usage essentiel du résultat suivant, relatif au nombre des entiers  $n$  sans petit facteur premier et pour lesquels  $\omega(n)$  est fixé. Nous notons  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier d'un entier naturel  $n$  avec la convention  $P^-(1) = \infty$ . Pour  $x \geq y > 1$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous posons

$$\pi_k(x, y) = |\{n \leq x : \omega(n) = k, P^-(n) > y\}|.$$

**Lemme 3.2.** Soit  $R > 0$ . Il existe  $u_0 = u_0(R) > 0$  tel que l'on ait uniformément pour  $u := (\log x)/\log y \geq u_0(R)$ ,  $1 \leq k \leq R \log u$ ,

$$(3.2) \quad \pi_k(x, y) \asymp \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

*Démonstration.* L'estimation indiquée est une conséquence très affaiblie de formules asymptotiques dues à Balazard [2] (lemme 5) et Alladi [1] (théorème 7). Alladi montre que l'on a uniformément pour  $\exp\{(\log_2 x)^3\} \leq y \leq \sqrt{x}$  et  $1 \leq k \leq R \log u$ ,

$$(3.3) \quad \pi_k(x, y) = \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ 1 + O_R \left( \frac{1}{\sqrt{\log u}} \right) \right\}$$

avec  $\xi := k/(\log u - \gamma)$ .<sup>(2)</sup> Balazard, en employant d'ailleurs de manière essentielle d'autres formules établies par Alladi dans [1], montre que

$$(3.4) \quad \pi_k(x, y) = g(\varrho, y) \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ 1 + O_R \left( \frac{1}{\log_2 x} \right) \right\}$$

---

2. Ici, nous désignons par  $\Gamma$  la fonction Gamma d'Euler et par  $\gamma$  la constante d'Euler.

uniformément pour  $\frac{3}{2} \leq y \leq \exp\{(\log x)^{2/5}\}$ ,  $1 \leq k \leq R \log u$ , avec  $\varrho := (k-1)/\log u$  et

$$g(\varrho, y) := \frac{(\log y)^\varrho}{\Gamma(\varrho+1)} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\varrho \prod_{p > y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\varrho \left(1 + \frac{\varrho}{p-1}\right).$$

La relation (3.2) résulte immédiatement de (3.3) et (3.4). Nous omettons les détails de la vérification.  $\square$

**Lemme 3.3.** *Sous les conditions  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \geq y > \exp\{(\log k)^2\}$ ,  $u := (\log x)/\log y$ , nous avons uniformément*

$$(3.5) \quad \pi_k(x, y) \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1} \sqrt{k}}{(k-1)!}.$$

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas  $k \leq 2 \log u$ . Nous avons alors

$$(3.6) \quad \pi_k(x, y) \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Cela résulte du Lemme 3.2 si  $u > u_0(2)$ . Si  $u \leq u_0(2)$ , alors  $k$  est également borné et (3.6) résulte par exemple du crible de Brun.

Plaçons-nous donc dans le cas  $k > 2 \log u$ . Pour tout  $z \geq 1$ , nous pouvons écrire, notant  $\mu$  la fonction de Möbius,

$$\begin{aligned} \pi_k(x, y) &\leq z^{-k} \sum_{\substack{mn \leq x \\ P^-(mn) > y}} \mu(m)^2 (z-1)^{\omega(m)} \\ &\ll \frac{x}{z^k \log y} \prod_{y < p \leq x} \left(1 + \frac{z-1}{p}\right) + \frac{1}{z^k} \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P^-(m) > y}} \mu(m)^2 (z-1)^{\omega(m)} \\ &\ll \frac{x(1+z/u)}{z^k \log y} \prod_{y < p \leq x} \left(1 + \frac{z-1}{p}\right) \\ &\ll \frac{x(1+z/u)}{z^k \log y} \exp\left\{(z-1) \log u + O\left(ze^{-\sqrt{\log y}}\right)\right\}, \end{aligned}$$

où l'avant-dernière majoration a été obtenue par application du th. 01 de [4]. Cela implique immédiatement le résultat si  $k = 1$ , en choisissant par exemple  $z = 1$ . Si  $k \geq 2$ , nous choisissons  $z := k/\log u > 2$  en tenant compte du fait que  $u \geq k$ . Nous obtenons

$$\pi_k(x, y) \ll \frac{x\{(\log u)/k\}^k e^{k-\log u}}{\log y} \asymp \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^k \sqrt{k}}{k!} \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1} \sqrt{k}}{(k-1)!}.$$

$\square$

Les deux lemmes suivants concernent la répartition des facteurs premiers des entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$ . Nous désignons par  $\{p_k(n) : 1 \leq k \leq \omega(n)\}$  la suite croissante des facteurs premiers distincts d'un entier générique  $n$  et posons

$$\omega(n, t) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq t}} 1, \quad \Omega(n, t) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq t}} \nu \quad (n \in \mathbb{N}^*, t > 0).$$

**Lemme 3.4.** Soit  $R > 1$ . Sous les conditions

$$\begin{aligned} x > 16, \quad 3 \leq \xi \leq x, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \\ \varrho := (w-1)/\log_2 x, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad \beta := \varrho Q(1/\alpha), \end{aligned}$$

les inégalités

$$(3.7) \quad \max_{\xi < t \leq x} \{\omega(n, t) - \alpha \varrho \log_2 t\} \leq 0,$$

$$(3.8) \quad \min_{\xi < t \leq x} \left\{ \omega(n, t) - \frac{\varrho}{\alpha} \log_2 t \right\} \geq 0,$$

ont lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll_R \beta^{-1} (\log \xi)^{-\beta} \pi_w(x)$  exceptions.

Si nous supposons de plus  $\alpha \leq \alpha_0 < 2$ , les mêmes estimations sont valables pour  $\Omega(n, t)$  à la place de  $\omega(n, t)$ .

*Démonstration.* Contentons-nous de considérer (3.7), le cas de (3.8) et de la fonction  $\Omega(n, t)$  relevant de manipulations identiques. Pour  $j \in \mathcal{J} := [\log_2 \xi - 1, \log_2 x + 1] \cap \mathbb{N}$ , posons  $t_j := \exp \exp j$ . Notant  $E$  l'ensemble des entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  tels que

$$\max_{j \in \mathcal{J}} \{\omega(n, t_j) - \alpha \varrho (j-1)\} > 0,$$

nous avons, pour tout  $y$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ,

$$|E| \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} y^{\omega(n, t_j) - \alpha \varrho (j-1)} \ll_R y^{\alpha \varrho \pi_w(x)} \sum_{j \in \mathcal{J}} y^{-\alpha \varrho j} e^{\varrho (y-1)j},$$

où la dernière majoration résulte du Lemme 3.1. En choisissant  $y := \alpha \in ]1, 2]$ , nous obtenons

$$|E| \ll \beta_1^{-1} (\log \xi)^{-\beta_1} \pi_w(x),$$

avec  $\beta_1 := \varrho Q(\alpha) > \beta$ .

Considérons à présent un entier  $n \in \mathcal{E}_w(x) \setminus E$ . Pour tout  $t$  de  $]\xi, x]$ , il existe un unique indice  $j \in \mathcal{J}$  tel que  $t_j < t \leq t_{j+1}$ . Nous avons alors

$$\omega(n, t) \leq \omega(n, t_{j+1}) \leq \alpha \varrho \log_2 t_j \leq \alpha \varrho \log_2 t,$$

donc  $n$  satisfait (3.7). □

**Lemme 3.5.** Soit  $R > 1$ . Sous les conditions

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x > 16, \quad 3 \leq \xi \leq \log_2 x, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \\ \varrho := (w-1)/\log_2 x, \quad 1 < \alpha \leq \frac{3}{2}, \quad \beta := Q(\alpha), \end{aligned}$$

les inégalités

$$(3.10) \quad \max_{1 \leq k \leq w} \left\{ \varrho \log \left( \frac{\log x}{\log p_k(n)} \right) - \alpha(w-k) \right\} \leq \xi,$$

$$(3.11) \quad \min_{1 \leq k \leq w} \left\{ \varrho \log \left( \frac{\log x}{\log p_k(n)} \right) - \frac{w-k}{\alpha} \right\} \geq -\xi$$

ont lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll_R \beta^{-1} e^{-\beta \xi} \pi_w(x)$  exceptions.

*Démonstration.* Commençons par évaluer le nombre des exceptions à (3.10). Le résultat annoncé étant trivialement vérifié si  $\xi \leq 2R$ , nous pouvons supposer dans la suite  $\xi > 2R$ . L'expression entre accolades dans (3.10) vaut

$$(1 - \alpha)w - 1 + \alpha k - \varrho \log_2 p_k(n).$$

Elle est donc au plus égale à  $\xi$  lorsque  $\alpha k \leq (\alpha - 1)w + \frac{3}{4}\xi \leq (\alpha - 1)w + \xi + \varrho \log_2 2$ . Dans le cas contraire, elle est évidemment majorée par  $y_k - \varrho \log_2 p_k(n)$ , avec

$$y_k := k - \frac{3}{4}(\alpha - 1)(w - k) \geq \frac{(\alpha - 1)w}{4\alpha} + \frac{3(3\alpha + 1)\xi}{16\alpha} > \frac{2}{3}\xi.$$

De plus, pour tout  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$ , l'inégalité

$$(3.12) \quad y_k - \varrho \log_2 p_k(n) \geq \frac{2}{3}\xi$$

équivaut à  $\omega(n) - \omega(n, z_k) \leq w - k$  où l'on a posé  $z_k := \exp \exp\{(y_k - \frac{2}{3}\xi)/\varrho\}$ .

Désignons par  $W_k$  le nombre des entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  vérifiant (3.12), de sorte que  $\sum_{1 \leq k \leq w} W_k$  représente une majoration du nombre des exceptions à (3.10). Pour tout  $v \in ]0, 1]$ , nous avons

$$\begin{aligned} W_k &\leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} v^{\omega(n) - \omega(n, z_k) + k - w} \ll \pi_w(x) \exp\{(k - w) \log v + \varrho(v - 1)(\log_2 x - \log_2 z_k)\} \\ &\ll \pi_w(x) \exp\left\{- (w - k) \log v + (v - 1)\left(\frac{1}{4}(3\alpha + 1)(w - k) + \frac{2}{3}\xi\right)\right\}, \end{aligned}$$

en vertu du Lemme 3.1. Choisisant  $v := 4/\{3\alpha + 1\}$ , nous obtenons

$$W_k \ll \pi_w(x) e^{-Q(v)(w-k)/v - \frac{2}{3}(1-v)\xi}.$$

On déduit le résultat annoncé de cette estimation par sommation sur  $k \leq w$  en observant que  $\frac{2}{3}(1 - v) = 2(\alpha - 1)/(3\alpha + 1) > Q(\alpha)$  pour  $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ .

Des manipulations similaires permettent d'estimer le nombre des entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  contrevenant à (3.11). L'étape liminaire consiste à se ramener, trivialement, au cas  $k \leq w - \alpha\xi$ . Il suffit ensuite d'observer que tout entier  $n$  contrevenant à (3.11) vérifie

$$\omega(n) - \omega(n, x_k) \geq w - k$$

avec  $x_k := \exp \exp\{(w - (w - k)/\alpha + \xi - 1)/\varrho\}$ . On peut donc majorer le nombre des entiers exceptionnels par

$$(3.13) \quad \sum_{k \leq w - \alpha\xi} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \alpha^{\omega(n) - \omega(n, x_k) - w + k} \ll \pi_w(x) Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)\xi}.$$

□

Introduisons, pour chaque entier  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$ , les produits

$$(3.14) \quad n_{[k]} := \prod_{1 \leq j \leq k} p_j(n)^{\nu_j(n)} \quad (0 \leq k \leq w)$$

où  $\nu_j(n)$  désigne l'exposant de  $p_j(n)$  dans la décomposition canonique de  $n$ . Notre dernier lemme concerne le comportement normal des facteurs premiers multiples des entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$ . Nous considérons en particulier la fonction de Piltz

$$\tau_3(n) := \sum_{dd'|n} 1 = \prod_{p^\nu || n} \binom{\nu + 2}{2} \quad (n \geq 1).$$

**Lemme 3.6.** Soit  $R > 1$ . Sous les conditions

$$(3.15) \quad x > 16, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \quad T \geq 1,$$

nous avons

$$(3.16) \quad \sup_{1 \leq k \leq w} \tau_3(n_{[k]})/3^k \leq T$$

pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)/T$ . De plus, la relation

$$\exists k \in [2\xi, w] : p_k(n)^2 | n$$

est réalisée pour au plus  $\ll e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} \pi_w(x)$  entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$ .

*Démonstration.* Nous avons  $\tau_3(n_{[k]})/3^k \leq \tau_3(n)/3^w = \tau_3(n)/3^{\omega(n)}$  pour tout indice  $k$ . Or

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \frac{\tau_3(n)}{3^{\omega(n)}} \ll \pi_w(x)$$

d'après le Lemme 3.1. Cela établit la première assertion de l'énoncé. La seconde résulte du Lemme 3.4 avec par exemple  $\alpha := 2$  : le nombre des entiers exceptionnels est

$$\ll \pi_w(x) e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} + \sum_{\nu \geq 2} \sum_{p > \exp(\xi/R)} \pi_{w-1}\left(\frac{x}{p^\nu}\right) \ll \pi_w(x) \left( e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} + \exp\{-e^{\xi/R}\} \right).$$

□

### 3.2. Complétion de l'argument

La constante  $c$  étant supposée assez petite et les paramètres  $w, \xi$ , vérifiant

$$w \in \mathbb{N}, \quad (1-c) \log_2 x \leq w \leq (1+c) \log_2 x, \quad \frac{6}{5} \log_3 x \leq \xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x,$$

nous posons

$$\vartheta^- := \frac{\log x}{2e^{3\xi} 3^{ww}}, \quad \vartheta^+ := e^{-2\xi} \log x.$$

Il suffit d'établir (1.4) lorsque  $\vartheta^- \leq t \leq \vartheta^+$ . Lorsque  $t > \vartheta^+$ , l'inégalité est impliquée par la majoration triviale  $\nabla^+(n, t) \leq \tau_3(n)$  au vu du Lemme 3.6. Lorsque  $t < \vartheta^-$ , le résultat appliqué à  $\vartheta^-$  fournit  $\nabla^+(n, t) \leq \nabla^+(n, \vartheta^-) = 1$  avec la majoration requise pour le nombre des exceptions. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons donc

$$\vartheta^- \leq t \leq \vartheta^+.$$

Soit  $\alpha := \frac{78}{71} \in ]1, \log 3[$ . Pour chaque valeur du paramètre entier  $\xi$ , nous considérons le sous-ensemble  $\mathcal{E}_w^*(x)$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  défini par les inégalités (3.10), (3.11) et les conditions

$$(3.17) \quad \min_{2\xi < k \leq w} \log_2 p_k(n)/k > 1/(\varrho\alpha), \quad \max_{1 \leq k \leq w} \tau_3(n_{[k]})/3^k \leq (e/2)^\xi, \quad p_k(n)^2 | n \Rightarrow k \leq 2\xi.$$

D'après les Lemmes 3.4, 3.5 et 3.6, nous avons

$$(3.18) \quad \pi_w^*(x) := |\mathcal{E}_w^*(x)| \geq \{1 - Be^{-\beta\xi}\} \pi_w(x)$$

où  $\beta := \min\{Q(\frac{1}{2}), \frac{99}{100}Q(1/\alpha), Q(\alpha)\}$  et  $B$  est une constante convenable. Notons que  $\beta \geq \frac{1}{244}$ .

Posons

$$(3.19) \quad V_t(m, z) := \sum_{\substack{dd'|m \\ 0 < |\log(d'/d) - z| \leq t}} 1 \quad (m \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{R}),$$

de sorte que  $\nabla^+(m, t) = 1 + V_t(m, 0)$  pour tout entier  $m$ . Notons que

$$(3.20) \quad V_t(mn, z) \leq \sum_{dd'|m} V_t(n, z + \log(d'/d)) \quad (m \geq 1, n \geq 1, z \in \mathbb{R})$$

avec égalité si  $(m, n) = 1$ .

Notre méthode consiste à évaluer  $V_t(n_{[k]}, 0)$  par récurrence sur  $k$ ,  $2\xi < k \leq w$ , en exploitant la relation

$$(3.21) \quad V_t(n_{[k+1]}, 0) = V_t(n_{[k]}, 0) + 2V_t(n_{[k]}, \log p_{k+1}(n)) \quad (2\xi < k < w).$$

Plus précisément, nous employons une méthode d'espérance conditionnelle analogue à celle qui a été utilisée dans [13], [7] et [8] pour majorer les moments de la fonction Delta de Hooley, et nous sommons la relation (3.21) sur l'ensemble de tous les entiers de  $\mathcal{E}_w^*(x)$  tels que  $n_{[k]}/n_{[2\xi]}$  est fixé. Spécifiquement, posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &:= \{a : \exists n \in \mathcal{E}_w^*(x), n_{[k]}/n_{[2\xi]} = a\} \quad (2\xi < k < w), \\ \mathcal{M}_\xi(k, a) &:= \{m : \exists n \in \mathcal{E}_w^*(x), n_{[k]} = ma\} \quad (2\xi < k < w, a \in \mathcal{A}_k), \\ \mathcal{M}_\xi &:= \bigcup_{2\xi < k < w} \bigcup_{a \in \mathcal{A}_k} \mathcal{M}_\xi(k, a), \end{aligned}$$

nous pouvons écrire, pour  $a \in \mathcal{A}_k$ ,  $2\xi < k \leq w - 2$ , compte tenu de (3.17),

$$(3.22) \quad \begin{aligned} S_{k+1}(a) &:= \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w^*(x) \\ n_{[k]}/n_{[2\xi]} = a}} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \log p_{k+1}(n) \\ &\leq \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k, a) \\ P^+(m) < P^-(a) \\ P^+(a) < p < \sqrt{x/am}}} \{V_t(map, 0) - V_t(ma, 0)\} (\log p) \pi_{w-k-1}\left(\frac{x}{map}, p\right), \end{aligned}$$

où, ici et dans la suite,  $P^+(m)$  désigne le plus grand facteur premier de l'entier  $m$  avec la convention  $P^+(1) = 1$ . La première des conditions (3.17) garantit que l'on a, dans la dernière sommation,

$$\log_2 p > 2\xi/\varrho\alpha > 2\log_2\{1 + w - k\}.$$

Nous pouvons donc employer le Lemme 3.3 pour majorer  $\pi_{w-k-1}(x/map, p)$ , soit

$$(3.23) \quad \pi_{w-k-1}\left(\frac{x}{map}, p\right) \ll \frac{x\sqrt{w}}{map \log(x/ma)} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{(w-k-2)!},$$

où l'on a posé

$$u(ma) := \frac{\log(x/ma)}{\log P^+(a)} \geq \frac{\log(x/map)}{\log p}.$$

La minoration de  $p_w(n)$  contenue dans (3.10) implique  $\log(x/ma) > e^{-\xi/\varrho} \log x$  pour tous  $a \in \mathcal{A}_k$ ,  $m \in \mathcal{M}_\xi(k, a)$ . Par (3.21), nous obtenons donc

$$(3.24) \quad S_{k+1}(a) \ll \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k, a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{x\sqrt{w}e^{\xi/\varrho} \{\log u(am)\}^{w-k-2}}{ma \log x} \frac{Y_t(ma)}{(w-k-2)!}$$

avec

$$Y_t(ma) := \sum_{p > P^+(a)} \frac{V_t(ma, \log p) \log p}{p}.$$

En exprimant  $V_t(ma, \log p)$  comme une somme sur les diviseurs de  $ma$  et en intervertissant les sommations, nous obtenons

$$(3.25) \quad Y_t(ma) \leq \sum_{dd'|ma} \sum_{\substack{p > P^+(a) \\ -t - \log(d'/d) \leq \log p \leq t - \log(d'/d)}} \frac{\log p}{p}.$$

Notons que  $\log P^+(a) > e^{k/\alpha\varrho}$  en vertu de (3.17). D'après le théorème des nombres premiers, la somme intérieure de (3.25) vaut donc

$$2t + O(\exp\{-e^{k/2\alpha\varrho}\}) \ll t,$$

où la dernière majoration est justifiée par la minoration  $k > 2\xi > 2\alpha\varrho \log_3 x$  dès que, par exemple,  $c < \frac{1}{11}$ . Il suit

$$Y_t(ma) \ll t\tau_3(ma) \leq t3^k(e/2)^\xi.$$

Reportons dans (3.24). Posant  $L := 1 + 1/\varrho - \log 2$ , nous obtenons

$$(3.26) \quad S_{k+1}(a) \ll \frac{x\sqrt{w}e^{L\xi}3^k t}{(w-k-2)!\log x} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k,a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{ma}.$$

Notant  $P^+(a) = P^+(ma) = p$ ,  $b = ma/p$ , avec donc  $\omega(b) = k-1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}_k, m \in \mathcal{M}_\xi(k,a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{ma(w-k-2)!} &\leq \sum_{p \leq x} \sum_{\substack{\omega(b)=k-1 \\ k \leq \varrho\alpha \log_2 p \\ P^+(b) \leq p}} \frac{(\log_2 x - \log_2 p)^{w-k-2}}{pb(w-k-2)!} \\ &\ll \sum_{p \leq x} \frac{(\log_2 x - \log_2 p)^{w-k-2} (\log_2 p)^{k-1}}{p(k-1)!(w-k-2)!} \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{w-2}}{(w-3)!} \ll w \frac{(\log_2 x)^{w-1}}{(w-1)!}. \end{aligned}$$

En reportant dans (3.26), il suit

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \log p_{k+1}(n) \ll t3^k w^{3/2} e^{L\xi} \pi_w(x),$$

et donc, en vertu de (3.10),

$$(3.27) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \ll \frac{t3^k w^{3/2} e^{\alpha(w-k)/\varrho + (L+1/\varrho)\xi}}{\log x} \pi_w(x).$$

Par sommation sur  $k \in ]2\xi, w-2]$ , il suit

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[w-1]}, 0) - V_t(n_{[2\xi]}, 0)\} \ll \frac{t3^w w^{3/2} e^{(L+1/\varrho)\xi}}{\log x} \pi_w(x).$$

Posant  $K := L + \beta + 1/\varrho = 1 + \beta + 2/\varrho - \log 2$ , nous en déduisons que

$$(3.28) \quad V_t(n_{[w-1]}, 0) - V_t(n_{[2\xi]}, 0) \ll \frac{t3^w w^{3/2} e^{K\xi}}{\log x}$$

pour tous les entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$  exceptions.

En choisissant la constante  $c$  de l'énoncé du Théorème 1.2 assez petite, il s'ensuit que la majoration

$$(3.29) \quad \nabla^+(n_{[w-1]}, t) \leq \nabla^+(n_{[2\xi]}, t) + \frac{t3^w we^{3\xi}}{4 \log x}$$

a lieu, pour tout  $t \in [\vartheta^-, \vartheta^+]$  et tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$ .

Soit alors  $z_0 := \exp \exp\{4\xi/(1-c)\}$ . D'après (3.8) avec  $\alpha = 2$  et  $t = z_0$ , nous avons  $p_{2\xi}(n) \leq z_0$  pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll e^{-4Q(1/2)\xi} \pi_w(x)$  exceptions. De plus, la relation

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\Omega(n) - \omega(n)} \ll \pi_w(x),$$

qui découle du Lemme 3.1, fournit, quitte à négliger  $\ll (2/3)^\xi \pi_w(x)$  nouveaux entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$ , la majoration  $n_{[2\xi]} \leq z := z_0^{3\xi}$ .

Nous avons donc  $\nabla^+(n_{[2\xi]}, t) \leq 1 + \nabla_0(n) + 2\nabla_1(n)$  avec

$$\nabla_0(n) := \sum_{\substack{d|n \\ 1 < d \leq e^t}} 1, \quad \nabla_1(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \sum_{1 < d < d' \leq e^t d} 1.$$

Nous allons montrer que la majoration

$$(3.30) \quad \nabla_j(n) \ll \frac{t3^w}{\log x} \quad (j = 0, 1)$$

a lieu pour tous les entiers restants sauf au plus un nombre acceptable d'exceptions.

Lorsque  $j = 0$ , nous pouvons supposer  $t \geq \log 2$  puisque  $\nabla_0(n, t) = 0$  dans le cas contraire. Soit  $h := (\log x)^{1/10}$ . D'après le Lemme 3.4, nous avons

$$\Omega(n, e^{t+h}) \leq (1+c)\varrho \log(t+h)$$

pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)/(\log x)^B$  exceptions, où l'on a posé  $B := \frac{1}{10}(1-c)Q(1/(1+c))$ . Cela implique, pour les entiers non exceptionnels,

$$\nabla_0(n) \leq 2^{\Omega(n, e^t)} \leq (t+h)^{(1+c)^2 \log 2}.$$

Nous en déduisons bien (3.30) pour  $j = 0$  dès que  $c$  est assez petite puisque le membre de droite de (3.30) excède  $t(\log x)^{(1-c)\log 3 - 1}$ .

Pour traiter le cas  $j = 1$ , nous observons que tout couple  $\{d, d'\}$  compté dans  $\nabla_1(n)$  vérifie

$$t \geq \log(d'/d) \geq \log(d'/(d'-1)) > 1/d' > e^{-t}/d$$

et donc  $d > e^{-t}/t$ . Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{n \leq x} \nabla_1(n) \leq x \sum_{e^{-t}/t < d \leq z} \frac{1}{d} \sum_{d < d' \leq e^t d} \frac{1}{d'} \ll xt \sum_{e^{-t}/t < d \leq z} \frac{1}{d} \ll tx \log z.$$

Il s'ensuit que (3.30) a lieu pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x(\log x) \log z}{3^w} \ll \pi_w(x) \frac{(w-1)!(\log x)^2 \log z}{3^w (\log_2 x)^{w-1}} \\ &\ll \pi_w(x) (\log x)^{Q(\varrho) - \varrho \log 3 + 1} (\log_2 x)^{1/2} \log z \ll \frac{\pi_w(x)}{(\log x)^{1/50}}, \end{aligned}$$

dès que  $\xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x$  et la constante  $c$  est assez petite, par exemple  $c < \frac{1}{30}$ . Cela établit bien (3.30) pour  $j = 2$ .

La conjonction de (3.30) et (3.29) fournit donc l'inégalité

$$(3.31) \quad V_t(n_{[w-1]}, 0) \leq \frac{t3^w we^{3\xi}}{2 \log x}$$

pour tous les entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$  exceptions.

Il reste à examiner l'influence du plus grand facteur premier  $p_w(n)$  sur la quantité  $\nabla^+(n, t)$ . Nous avons

$$(3.32) \quad \nabla^+(n, t) = 1 + V_t(n_{[w-1]}, 0) + 2V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \quad (n \in \mathcal{E}_w^*(x)).$$

Pour majorer le dernier terme, nous considérons la fonction sommatoire

$$S(x) := \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \leq v^{-w} \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} v^{\omega(n)} \sum_{\substack{dd'|n \\ 0 < |\log(d'/d)| \leq t \\ P^+(n)|dd'}} 1 \quad (0 < v \leq 1).$$

D'après (3.10) avec  $k = w$ , nous avons  $\log P^+(n) > e^{-\xi/\varrho} \log x$  pour tous les entiers de  $\mathcal{E}_w^*(x)$ . Compte tenu de la condition  $t \leq \vartheta^+ = e^{-2\xi} \log x$ , il s'ensuit que nous pouvons supposer, dans la dernière somme intérieure,

$$\min(d, d') > x_1 := \exp \left\{ \frac{1}{2} e^{-\xi/\varrho} \log x \right\}.$$

Il suit

$$S(x) \ll v^{-w} \sum_{\substack{x_1 < d < d' \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} v^{\omega(dd')} \sum_{m \leq x/dd'} v^{\omega(mdd') - \omega(dd')}.$$

Nous pouvons majorer la somme intérieure en notant que la fonction  $m \mapsto v^{\omega(mD) - \omega(D)}$  est multiplicative pour chaque  $D \geq 1$ . En recourant, par exemple, au théorème III.3.5 de [16], nous obtenons la majoration

$$S(x) \ll v^{-w} x \sum_{\substack{x_1 < d \leq d' \\ dd' \leq x \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} \frac{v^{\omega(dd')}}{\varphi(dd')} \left( \log \frac{2x}{dd'} \right)^{v-1},$$

où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler. En employant alors le théorème de Shiu [11] comme dans [4] — formule (5.28) —, nous obtenons, pour chaque  $d$ , par sommation d'Abel,

$$\sum_{\substack{x_1 < d < d' \leq x/d \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} \frac{v^{\omega(dd') - \omega(d)}}{\varphi(d')} \left( \log \frac{2x}{dd'} \right)^{v-1} \ll \frac{td}{v\varphi(d)} (\log x_1)^{v-1} \left( \log \frac{2x}{d^2} \right)^{v-1}.$$

Nous avons donc finalement établi que

$$S(x) \ll txv^{-w-1} (\log x_1)^{v-1} \sum_{x_1 < d \leq \sqrt{x}} \frac{v^{\omega(d)} d}{\varphi(d)^2} \left( \log \frac{2x}{d^2} \right)^{v-1} \ll txv^{-w-2} e^{(1-v)\xi/\varrho} (\log x)^{3v-2}.$$

Pour le choix  $v := \varrho/3$ , il vient

$$S(x) \ll \frac{txe^{3\xi/4} 3^w}{(\log x)^{\mathcal{Q}(\varrho)+1}} \ll \pi_w(x) \frac{t3^w \sqrt{w} e^{3\xi/4}}{\log x}.$$

Il s'ensuit que la majoration

$$V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \leq \frac{t3^w w e^{3\xi}}{4 \log x}$$

a lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x) e^{-\beta\xi}$  exceptions.

En reportant dans (3.32) et en tenant compte de (3.31), nous obtenons bien le résultat annoncé.

## 4. Preuve du Théorème 1.3

### 4.1. Notations

Le paramètre  $\psi$  étant fixé en fonction de  $x$  comme indiqué dans l'énoncé, nous nous donnons une constante  $c_0 > 0$ , qui sera choisie ultérieurement suffisamment petite pour que  $2c_0 \log \psi \leq \frac{1}{2} \log_2 x$ , et nous posons

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L &:= \log_2 x - 2c_0 \log \psi, & M &:= \log_2 x - c_0 \log \psi, & h &:= \left\lceil \sqrt{c_0 \log \psi} \right\rceil, \\ k_j &:= L + jh \quad (0 \leq j \leq h), & \mathcal{K} &:= \{k_j : 1 \leq j \leq h\}. \end{aligned}$$

Nous rappelons la définition de la fonction  $Q$  en (1.6).

Enfin, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nous posons

$$n_k := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \exp \exp k}} p.$$

Observons que la fonction  $n \mapsto n_k$  est un analogue multiplicatif de la fonction  $n \mapsto n_{[k]}$  considérée dans la preuve du Théorème 1.2.

### 4.2. Propriétés arithmétiques des entiers ayant $w$ facteurs premiers

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'établir les propriétés essentielles nécessaires à la preuve du Théorème 1.3 et qui concernent la répartition des facteurs premiers des entiers de  $\mathcal{E}_w(x)$ .

**Lemme 4.1.** *Soit  $K \leq \log_2 x$ . L'encadrement*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\omega(n) - \omega(n_k)}{(\log_2 x) - k} \leq 2 \quad (0 \leq k \leq \log_2 x - K)$$

*a lieu pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf pour au plus  $\ll xe^{-K/12}$  exceptions.*

*Démonstration.* Cela résulte immédiatement du lemme 4.5 de [8] en choisissant, dans l'énoncé de ce résultat,  $u := k$ ,  $v := \log_2 x$ ,  $\xi_1 = \xi_2 := \frac{1}{2}\sqrt{v-u}$  et en sommant sur  $k$ .  $\square$

**Lemme 4.2.** *Soit  $A > 0$ . Sous les conditions*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x &> 16, \quad w \in [1, A \log_2 x] \cap \mathbb{N}, \quad \varrho_0 := \frac{w}{\log_2 x}, \\ 0 &< \alpha < 1, \quad \beta := \varrho_0 Q(\alpha), \quad \frac{14}{\beta} + \frac{2}{\beta} \log \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta}} \right) \leq T \leq h, \end{aligned}$$

*l'inégalité*

$$(4.3) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T \leq s < h} \frac{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s})}{s} > \alpha \varrho_0 \right\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}| = \frac{9}{10} h$$

*a lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll \pi_w(x) e^{-\beta T h / 20}$  exceptions.*

*Démonstration.* Notons  $D(n)$  le nombre des indices  $k \in \mathcal{K}$  qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.3), de sorte que (4.3) équivaut à  $D(n) \leq \frac{1}{10} h$ . Soit  $\ell \in [1, h]$ . Nous avons

$$\left| \{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\} \right| \leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \prod_{k \in \mathcal{H}} \sum_{T \leq s < h} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) - \alpha \varrho_0 s}.$$

En développant le dernier produit et intervertissant les sommations, nous obtenons

$$|\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| \leq \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \sum_{\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}} \alpha^{-\alpha \varrho_0 \operatorname{Tr}(\sigma)} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n; \sigma)$$

où nous convenons que  $[T, h[ := \{s \in \mathbb{N} : T \leq s < h\}$  et avons posé  $\operatorname{Tr}(\sigma) := \sum_{k \in \mathcal{H}} \sigma(k)$ ,

$$f(n; \sigma) := \prod_{k \in \mathcal{H}} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k - \sigma(k)})} \quad (\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}).$$

La dernière somme relève du Lemme 3.1. Comme les intervalles  $]k - h, k]$ , et donc aussi les intervalles  $]k - \sigma(k), k]$ , sont deux à deux disjoints lorsque  $k$  parcourt  $\mathcal{H}$ , il vient

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n; \sigma) \ll_A \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho(\alpha - 1) \sum_{k \in \mathcal{H}} S_k(\sigma) \right\},$$

où l'on a posé

$$\varrho = \frac{w-1}{\log_2 x}, \quad S_k(\sigma) := \sum_{k - \sigma(k) < \log_2 p \leq k} \frac{1}{p} = \sigma(k) + O(e^{-L}).$$

Comme  $\ell \ll L$ , nous obtenons

$$(4.4) \quad |\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| \ll \pi_w(x) \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \sum_{\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}} e^{\{\varrho(\alpha-1) - \alpha \varrho_0 \log \alpha\} \operatorname{Tr}(\sigma)}.$$

Observant que

$$\varrho(\alpha - 1) - \alpha \varrho_0 \log \alpha = -\varrho_0 Q(\alpha) + O(1/\log_2 x) = -\beta + O(1/\log_2 x),$$

et que  $h\ell \ll \log_2 x$ , nous déduisons de (4.4) l'estimation

$$\begin{aligned} |\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| &\ll \pi_w(x) \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \left\{ \sum_{T \leq s < h} e^{-\beta s} \right\}^\ell \\ &\ll \pi_w(x) \binom{h}{\ell} e^{-\beta T \ell} (1 - e^{-\beta})^{-\ell} \ll \pi_w(x) 2^h e^{-\beta T \ell} (1 - e^{-\beta})^{-\ell}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (4.2) implique  $e^{-\beta T} (1 - e^{-\beta})^{-1} \leq 2^{-10} e^{-\beta T/2}$ . Pour le choix  $\ell := 1 + [h/10]$ , la dernière majoration est donc  $\ll \pi_w(x) e^{-\beta T h/20}$ .  $\square$

**Lemme 4.3.** Soit  $R > 0$ . Pour  $x > 16$ ,  $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq \log_2 x$ ,  $T > 0$ , on a

$$(4.5) \quad \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq \exp \exp k}} p^\nu \leq \exp(Te^k)$$

pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf pour au plus  $\ll_R e^{-T/2} \pi_w(x)$  exceptions.

*Démonstration.* Désignons par  $n(k)$  le membre de gauche de (4.5) et posons  $\alpha := \frac{1}{2}e^{-k}$ . Le nombre des entiers exceptionnels au sens de l'énoncé ne dépasse pas

$$e^{-T/2} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} n(k)^\alpha \ll_R e^{-T/2} \pi_w(x),$$

où la majoration résulte immédiatement de (3.1).  $\square$

**Lemme 4.4.** *Sous les conditions  $x > 16$ ,  $w \in [1, 2 \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ , l'inégalité*

$$(4.6) \quad \left| \{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 40e^k\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}| = \frac{9}{10} h$$

*a lieu pour tous les entiers  $n \in \mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll e^{-h} \pi_w(x)$  exceptions.*

*Démonstration.* Notons  $F(n; \mathcal{K}) := |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k > 40e^k\}|$ . Ainsi (4.6) équivaut à  $F(n; \mathcal{K}) \leq h/10$ . Nous avons

$$F(n; \mathcal{K}) \leq F_1(n) + F_2(n)$$

où  $F_1(n)$  dénombre les indices  $j \in [1, h]$  tels que

$$(F_1) \quad \log n_{k_{j-1}} > 2he^{k_{j-1}}$$

et  $F_2(n)$  ceux pour lesquels

$$(F_2) \quad \log(n_{k_j}/n_{k_{j-1}}) > 39e^{k_j}.$$

Soit  $\ell := 1 + [h/20]$ . D'après le Lemme 4.3 appliqué avec  $R := 2$  et  $T := 2h$ , nous avons

$$(4.7) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_1(n) \geq \ell}} 1 \leq \frac{1}{\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} F_1(n) \ll e^{-h} \pi_w(x),$$

puisque  $|\mathcal{K}| = h \ll \ell$ .

Pour majorer  $F_2(n)$ , nous écrivons, avec la même valeur de  $\ell$  et en posant  $\alpha_j = e^{-k_j}$  ( $1 \leq j \leq h$ ),

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_2(n) \geq \ell}} 1 \leq \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} e^{-39\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{j \in \mathcal{J}} (n_{k_j}/n_{k_{j-1}})^{\alpha_j}.$$

La somme intérieure relève du Lemme 3.1. Elle est

$$\ll \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{k_{j-1} < \log_2 p \leq k_j} \frac{p^{\alpha_j} - 1}{p} \right\} \ll \pi_w(x) e^{(e-1)\varrho\ell},$$

où l'on a posé  $\varrho := (w-1)/\log_2 x < 2$ . Il suit

$$(4.8) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_2(n) \geq \ell}} 1 \ll 2^h e^{-39\ell + 2(e-1)\ell} \pi_w(x) \ll e^{-h} \pi_w(x). \quad \square$$

Le résultat suivant est établi par exemple dans [4], p. 53, ou au lemme III.4.13 de [16].

**Lemme 4.5.** *Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, à variation bornée sur  $[0, 2\pi]$  et de valeur moyenne*

$$\bar{f} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

*Pour tout triplet  $(\vartheta, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\vartheta \neq 0$ ,  $1 < y < z$ , on a*

$$\sum_{y < p \leq z} \frac{f(\vartheta \log p)}{p} = \bar{f} \log \left( \frac{\log z}{\log y} \right) + O \left( \frac{V(f)}{|\vartheta| \log y} + \frac{M(f) + (1 + |\vartheta|)V(f)}{e^{\sqrt{\log y}}} \right)$$

où l'on a posé  $M(f) := \sup_x |f(x)|$ ,  $V(f) := \int_0^{2\pi} |df(x)|$ .

Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\vartheta > 0$ , posons

$$\varrho(n, \vartheta) := \prod_{p|n} (1 + 2 \cos(\vartheta \log p)),$$

$$\omega_\vartheta(n) := \omega(n, \exp(1/\vartheta)), \quad \mathcal{R}(n, \vartheta) := \frac{\varrho(n, \vartheta)^2}{3^{\omega(n) + \omega_\vartheta(n)}}.$$

Le résultat suivant peut être établi en appliquant successivement les Lemmes 3.1 et 4.5. Nous omettons les détails qui sont semblables à ceux de la preuve du lemme 51.3 de [4].

**Lemme 4.6.** *Soit  $R > 0$ . On a, uniformément pour  $x > 16$ ,  $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ ,  $\varrho := w / \log_2 x$ ,  $\vartheta > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \ll_R \{\log(3 + \vartheta)\}^{4\varrho} \pi_w(x).$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

**Lemme 4.7.** *Soit  $R > 0$ . Sous les conditions  $x > 16$ ,  $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ ,  $\varrho := w / \log_2 x$ ,  $V > 0$ ,  $H > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l'inégalité*

$$\int_1^H \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta \leqslant VH \{\log(3 + H)\}^{4\varrho}$$

*a lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf pour au plus  $\ll \pi_w(x)/V$  exceptions.*

**Lemme 4.8.** *Soient  $R > 0$ ,  $\delta > 1$ . Sous les conditions  $x > 16$ ,  $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ ,  $V > 0$ , l'inégalité*

$$(4.9) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{h-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \leqslant V e^{(\delta-1)(k-h)} \right\} \right| \geqslant \frac{9}{10} h$$

*a lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll_{R,\delta} \pi_w(x)/V$  exceptions.*

*Démonstration.* Posons  $\ell := 1 + [h/10]$ , et désignons par  $G(n; \mathcal{K})$  le nombre des indices  $k \in \mathcal{K}$  qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.9). Nous avons

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ G(n; \mathcal{K}) \geqslant \ell}} 1 \leqslant \frac{1}{\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} G(n; \mathcal{K}) \leqslant \frac{1}{\ell V} \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{(1-\delta)(k-h)} \int_{e^{h-k}}^1 \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta}$$

$$\ll_R \frac{\pi_w(x)}{(\delta-1)V},$$

où la dernière somme en  $n$  a été estimée grâce au Lemme 4.6. □

**Lemme 4.9.** *Soit  $R > 0$ . Sous les conditions*

$$x > 16, \quad w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}, \quad J \in \mathbb{N}, \quad k_j \in \mathbb{N} \quad (0 \leqslant j \leqslant J), \quad 0 = k_0 < k_1 < \dots < k_J,$$

*nous avons*

$$(4.10) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{1 \leqslant j \leqslant J} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \leqslant e^{c_2 R J} \pi_w(x) \quad (e^{-k_j} \leqslant \vartheta_j \leqslant e^{-k_{j-1}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J)$$

où  $c_2$  est une constante absolue positive.

*Démonstration.* Pour tous  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\vartheta > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) &\leq \prod_{\substack{p|n \\ 1/\vartheta < \log p \leq e^k}} \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\vartheta \log p))^2 \\ &= \prod_{\substack{p|n \\ 1/\vartheta < \log p \leq e^k}} \left(1 + \frac{2}{3} \cos(2\vartheta \log p) + \frac{4}{3} \cos(\vartheta \log p)\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse, les intervalles  $]1/\vartheta_j, e^{k_j}]$  ( $1 \leq j \leq J$ ) sont deux à deux disjoints. Il suit

$$\prod_{1 \leq j \leq J} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \leq f(n)$$

où  $f$  est la fonction fortement multiplicative définie par

$$f(p) := 1 + \frac{2}{3} \sum_{1 \leq j \leq J} \mathbf{1}_{[1/\vartheta_j, e^{k_j}]}(\log p) \{ \cos(2\vartheta_j \log p) + 2 \cos(\vartheta_j \log p) \}$$

D'après le Lemme 3.1, nous pouvons écrire, avec  $\varrho := (w-1)/\log_2 x$

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \pi_w(x) \exp \left\{ \frac{2}{3} \varrho \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{\exp(1/\vartheta_j) < p \leq \exp e^{k_j}} \frac{\cos(2\vartheta_j \log p) + 2 \cos(\vartheta_j \log p)}{p} \right\}.$$

Les sommes intérieures étant uniformément bornées en vertu du Lemme 4.5, nous obtenons bien la majoration requise (4.10).  $\square$

**Lemme 4.10.** *Soit  $R > 0$ . Il existe une constante  $c_3 = c_3(R) > 0$  telle que, pour tout  $\delta > 1$ , et uniformément sous les conditions  $x > 16$ ,  $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$ , l'inégalité*

$$(4.11) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^{e^{h-k}} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \leq \frac{c_3 e^{(\delta-1)k}}{\delta-1} \right\} \right| \geq \frac{9}{10} h$$

ait lieu pour tous les entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  sauf au plus  $\ll_{R,\delta} e^{-h} \pi_w(x)$  exceptions.

*Démonstration.* Posons  $\ell := 1 + \lceil h/10 \rceil$ , et désignons par  $B(n; \mathcal{K})$  le nombre des indices  $k \in \mathcal{K}$  qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.11). Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ B(n; \mathcal{K}) \geq \ell}} 1 &\leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \left( \frac{\delta-1}{c_3} \right)^\ell \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} \prod_{j \in \mathcal{J}} e^{(1-\delta)k_j} \int_{e^{-k_j}}^{e^{-k_j-1}} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \\ &= \left( \frac{\delta-1}{c_3} \right)^\ell \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} \left\{ \prod_{j \in \mathcal{J}} e^{(1-\delta)k_j} \right\} \int_{\Delta(\mathcal{J})} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \prod_{i \in \mathcal{J}} \frac{d\vartheta_j}{\vartheta_j^\delta} \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\Delta(\mathcal{J}) := \prod_{j \in \mathcal{J}} [e^{-k_j}, e^{-k_j-1}]$ . D'après le Lemme 4.9, la somme intérieure est  $\ll e^{c_2 R \ell} \pi_w(x)$ . Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ B(n; \mathcal{K}) \geq \ell}} 1 \ll \pi_w(x) 2^h c_3^{-\ell} e^{c_2 R \ell}.$$

Comme  $h \leq 10\ell$ , le choix  $c_3 := 2^{20} e^{c_2 R + 10}$  permet de conclure.  $\square$

### 4.3. Préparation

Dans ce paragraphe, nous mettons en place le cadre final de la démonstration du Théorème 1.3.

Dans toute la suite, nous posons

$$(4.12) \quad \delta := \frac{1}{2}\{1 + \log 3\} \approx 1,04931, \quad \alpha := \delta / \log 3 \in ]0, 1[.$$

Étant donnés  $B > 0$  et  $x > 16$ , nous considérons des paramètres  $\psi, w$  tels que

$$(4.13) \quad (\log_2 x)^{10} \leq \psi \leq (\log x)^B, \quad w \in \mathbb{N}, \quad |w - \log_2 x| \leq (\log \psi)^{1/4} (\log_2 x)^{1/2},$$

et nous posons

$$\varrho_0 = \varrho_0(w, x) := \frac{w}{\log_2 x}, \quad \Theta^- = \Theta^-(w, x, \psi) = \frac{\log x}{3^w} \sqrt{\psi}, \quad \Theta^+ = \Theta^+(x, \psi) := \frac{\log x}{\sqrt{\psi}}.$$

et rappelons les notations (4.1).

Pour tous  $c > 0, T > 0$ , nous désignons par  $\mathcal{S}_w(x; c, T)$  l'ensemble des entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  qui vérifient les six propriétés suivantes :

- (i)  $\frac{1}{2} \leq \frac{w - \omega(n_k)}{\log_2 x - k} \leq 2 \quad (k \in \mathcal{K})$ ;
- (ii)  $\left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T \leq s \leq k} \frac{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s})}{s} > \alpha \right\} \right| \geq \frac{9}{10} h$ ;
- (iii)  $|\{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 40e^k\}| \geq \frac{9}{10} h$ ;
- (iv)  $\left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta / \vartheta^\delta \leq ce^{(\delta-1)k} \right\} \right| \geq \frac{4}{5} h$ ;
- (v)  $\int_1^{1/\Theta^-} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta \leq e^h (\log_2 x)^{4\varrho_0} / \Theta^- \quad (k \in \mathcal{K})$ ;
- (vi)  $\prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ \log_2 p \leq M}} p^\nu \leq x^{1/10}$ , où  $M$  est défini en (4.1).

Le résultat suivant découle immédiatement des Lemmes 4.1, 4.2, 4.4, 4.8, 4.10, 4.7 et 4.3.

**Lemme 4.11.** *Il existe deux constantes  $T > 0, c > 0$  telles que, pour toute constante  $B > 0$ , tout nombre réel  $x$  suffisamment grand, et sous les conditions (4.13), on ait*

$$|\mathcal{S}_w(x; c, T)| \geq \{1 - e^{-(\delta-1)h}\} \pi_w(x).$$

Pour chaque  $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$ , notons

$$(4.14) \quad k_1(n) < k_2(n) < \dots < k_v(n)$$

les  $v := \lfloor h/2 \rfloor$  plus petits entiers  $k$  distincts qui sont simultanément comptés dans les ensembles apparaissant en (ii), (iii), (iv), et désignons par  $\mathcal{K}_n$  leur ensemble.

Compte tenu de (4.1), nous déduisons de (i) que, pour tout  $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$ , nous avons

$$(4.15) \quad \frac{1}{2} c_0 \log \psi \leq w - \omega(n_k) \leq 4c_0 \log \psi \quad (k \in \mathcal{K}_n).$$

Posons, avec la notation (3.19),

$$\mathcal{L}_t(m) := \{z \in \mathbb{R} : V_t(m, z) > t/\Theta^-\}, \quad \lambda_t(m) := \text{mes } \mathcal{L}_t(m).$$

**Lemme 4.12 (Lemme fondamental).** *Sous les conditions (4.13) et uniformément pour  $x$  assez grand,  $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$ ,  $k \in \mathcal{K}_n$  et  $\Theta^- \leq t \leq \Theta^+$ , nous avons*

$$\lambda_t(n_k) \gg e^k.$$

*Démonstration.* Nous employons la méthode développée dans [4] pour établir l'inégalité (5.49), p. 109. Les détails étant très voisins, nous nous limitons à des indications succinctes.

Pour tout entier  $m$  sans facteur carré, nous avons

$$3^{\omega(m)} \leq \frac{t + \log m}{\Theta^-} + \left\{ 2\pi \lambda_t(m) \int_{-1/\Theta^-}^{1/\Theta^-} \varrho(m, \vartheta)^2 d\vartheta \right\}^{1/2}.$$

Appliquons cette inégalité pour  $t \in [\Theta^-, \Theta^+]$  et  $m = n_k$  lorsque  $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$ ,  $k \in \mathcal{K}_n$ , en tenant compte du fait que (4.1), (4.15) et (iii) impliquent, si la constante  $c_0$  est choisie assez petite,

$$\frac{\log n_k}{\Theta^-} \leq \frac{40e^k 3^w}{\sqrt{\psi} \log x} \leq \frac{1}{4} 3^{\omega(n_k)} \quad \text{et} \quad \frac{t}{\Theta^-} \leq \frac{\Theta^+}{\Theta^-} = \frac{3^w}{\psi} \leq \frac{1}{4} 3^{\omega(n_k)}.$$

Posant

$$I(m) := \int_0^{1/\Theta^-} \frac{\varrho(m, \vartheta)^2}{3^{2\omega(m)}} d\vartheta \quad (m \geq 1),$$

il résulte de ce qui précède que

$$\lambda_t(n_k) I(n_k) \geq \frac{1}{16\pi} \quad (n \in \mathcal{S}_w(x; c, T), k \in \mathcal{K}_n),$$

de sorte que la preuve du Lemme 4.12 se réduit à établir que

$$I(n_k) \ll e^{-k}.$$

À cette fin, nous introduisons les contributions à l'intégrale  $I(n_k)$  des domaines d'intégration  $[0, e^{T-k}]$ ,  $[e^{T-k}, 1]$  et  $[1, \max(1, 1/\Theta^-)]$ . Nous notons ces contributions respectives  $I_j(n_k)$  ( $1 \leq j \leq 3$ ). Ici et dans la suite, le paramètre  $T$  est tel que défini au Lemme 4.11.

Nous avons trivialement  $I_1(n_k) \leq e^{T-k}$ . De plus, les propriétés (ii) et (iv) permettent d'écrire

$$I_2(n_k) := \int_{e^{T-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-(\omega(n_k) - \omega_\vartheta(n_k))} d\vartheta \leq 3 \int_{e^{-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-\alpha \log(\vartheta e^k)} d\vartheta \ll e^{-k}.$$

Enfin, dans le cas non trivial où  $\Theta^- < 1$ , nous avons, d'après (4.13), (4.15) et (v),

$$\begin{aligned} I_3(n_k) &\leq 3 \int_1^{1/\Theta^-} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-\omega(n_k)} d\vartheta \\ &\ll \frac{\psi^{4c_0} (\log_2 x)^{4\varrho} e^h}{3^w \Theta^-} \ll \psi^{3c_0 - 1/2} (\log_2 x)^{4\varrho_0} e^{-k} \ll e^{-k} \end{aligned}$$

sous réserve de diminuer convenablement la valeur de la constante  $c_0$ . □

#### 4.4. Complétion de l'argument

Nous utilisons la technique développée dans la preuve de la proposition 1 de [9] ou du théorème 1 de [12] et reposant sur l'argument mis en place dans [6].

Soient  $B, x, w, \psi, t$  satisfaisant (1.5). Observons d'abord, qu'il suffit d'établir que l'inégalité

$$(4.16) \quad \nabla(n, t) \geq t/\Theta^- \quad (\Theta^- \leq t \leq \Theta^+).$$

a lieu avec la majoration annoncée pour le nombre d'exceptions. En effet, si l'entier  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  vérifie (4.16), on a

$$\nabla(n, t) \geq \nabla(n, \Theta^+) \geq \frac{\Theta^+}{\Theta^-} = \frac{3^w}{\psi} \geq \frac{3^w t}{\psi \log x} \quad (\Theta^+ < t \leq \log x),$$

alors que la minoration requise découle de l'inégalité triviale  $\nabla(n, t) \geq 1$  lorsque  $t < \Theta^-$ . Nous pouvons donc nous limiter à établir (4.16).

Le nombre  $\delta$  étant défini par (4.12), les paramètres  $c$  et  $T$  étant fixés comme indiqué au Lemme 4.11 et la suite  $\{k_j(n)\}_{j=1}^v$  étant définie, pour chaque entier  $n$  de  $\mathcal{S}_w(x; c, T)$ , comme précisé en (4.14), nous posons

$$\begin{aligned} E^w &:= \{n \in \mathcal{E}_w(x) : \nabla(n, t) \leq t/\Theta^-\}, \\ \mathcal{T}_s^w &:= \{n \in \mathcal{S}_w(x; c, T) : \nabla(n_{k_s(n)}, t) \leq t/\Theta^-\} \quad (1 \leq s \leq v := [h/2]). \end{aligned}$$

On a clairement  $E^w \cap \mathcal{S}_w(x; c, T) \subset \mathcal{T}_v^w$ . En vertu du Lemme 4.11, cela implique que

$$(4.17) \quad |E^w| \leq |\mathcal{T}_v^w| + \pi_w(x)e^{-(1-\delta)h}.$$

Nous allons estimer  $|\mathcal{T}_s^w|$  ( $1 \leq s \leq v$ ) par récurrence sur l'indice  $s$ . Pour chaque  $s$ , nous formons une partition de  $\mathcal{T}_s^w$  selon les valeurs de  $k_s(n)$  : notant

$$\mathcal{T}_{s,k}^w := \mathcal{T}_s^w \cap \{n \in \mathcal{S}_w(x; c, T) : k_s(n) = k\} \quad (k \in \mathcal{K}),$$

nous avons

$$(4.18) \quad \mathcal{T}_s^w = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{T}_{s,k}^w \quad (1 \leq s \leq v).$$

Nous introduisons alors, pour chaque  $s$ , les ensembles deux à deux disjoints

$$\mathcal{M}_{s,k}^w := \left\{ m \leq x : \exists n \in \mathcal{T}_{s,k}^w, m = \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ \log_2 p \leq k}} p^\nu \right\}$$

et nous considérons l'ensemble  $\mathcal{D}_{s,k}^w$  des entiers  $n$  de  $\mathcal{E}_w(x)$  représentables sous la forme  $n = mpqb$  où  $m \in \mathcal{M}_{s,k}^w$ ,  $P^-(b) > \exp(80e^k)$  et  $(p, q)$  est un couple de nombres premiers assujetti aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} e^k < \log p \leq 40e^k, \\ \log p < \log q \leq \log p + 40e^k, \\ \log q - \log p \in \mathcal{L}_t(m_k). \end{cases}$$

Ainsi, les  $\mathcal{D}_{s,k}^w$  sont également deux à deux disjoints et l'on vérifie sans peine l'inclusion

$$\bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{D}_{s,k}^w \cap \mathcal{S}_w(x; c, T) \subset \mathcal{T}_s^w \setminus \mathcal{T}_{s+1}^w \quad (1 \leq s < v).$$

Par le Lemme 4.11, nous en déduisons que

$$(4.19) \quad |\mathcal{J}_{s+1}^w| \leq |\mathcal{J}_s^w| - \sum_{k \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}_{s,k}^w| + \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h} \quad (1 \leq s < v).$$

Il reste à minorer  $\mathcal{D}_{s,k}^w$ . D'une part, nous avons

$$|\mathcal{D}_{s,k}^w| \geq \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \sum_{(p,q)} \sum_b^* 1$$

où l'astérisque indique que la sommation porte sur les entiers  $b \leq x_1 := x/(mpq)$  tels que  $P^-(b) > y = \exp(e^{k+5})$  et  $\omega(b) = j := w - \omega(m) - 2$ . Les hypothèses du Lemme 3.2 sont alors satisfaites et l'on a  $j \ll \log u$  avec  $u := \log x_1 / \log y$ . D'où

$$\sum_b^* 1 \gg \frac{x_1 (\log_2 x - k)^{j-1}}{(\log x_1)(j-1)!} \gg \frac{x (\log_2 x - k)^j}{(mpq)j! \log x}$$

puisque  $j \asymp \log_2 x - k$ . Par ailleurs, le Lemme 4.12 permet, par une manipulation standard reposant sur une application d'une forme forte du théorème des nombres premiers, d'obtenir la minoration

$$\sum_p \frac{1}{p} \sum_q \frac{1}{q} \gg 1.$$

Nous pouvons donc énoncer que

$$(4.20) \quad \mathcal{D}_{s,k}^w \gg \frac{x (\log_2 x - k)^j}{j! \log x} \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \frac{1}{m}.$$

D'autre part, nous avons

$$(4.21) \quad |\mathcal{J}_{s,k}^w| \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \sum_{b_2}^{**} 1$$

où la double astérisque indique que la somme ainsi mentionnée porte sur les entiers  $b_2 \leq x_2 := x/m$  tels que  $P^-(b_2) \geq \exp(e^k)$  et  $\omega(b_2) = w - \omega(m) = j + 2$ . En appliquant le Lemme 3.2 et la propriété (vi), on obtient

$$(4.22) \quad \sum_{b_2}^{**} 1 \ll \frac{x_2 (\log_2 x - k)^{j+1}}{(j+1)! \log x_2} \ll \frac{x (\log_2 x - k)^j}{mj! \log x}.$$

Nous déduisons de (4.20), (4.21) et (4.22) l'existence d'une constante  $c_5 > 0$  telle que

$$(4.23) \quad |\mathcal{D}_{s,k}^w| \geq c_5 |\mathcal{J}_{s,k}^w|.$$

Supposons dans un premier temps que  $|E^w| \geq (1 + 2/c_5) e^{-(1-\delta)h} \pi_w(x)$ . Compte tenu de (4.17), pour tout entier  $s \in [1, v]$ , nous avons

$$|\mathcal{J}_s^w| \geq |\mathcal{J}_v^w| \geq |E^w| - \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h} \geq (2/c_5) \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h}.$$

Il découle donc des relations (4.23), (4.19) et (4.18) que

$$|\mathcal{J}_{s+1}^w| \leq (1 - \frac{1}{2}c_5) |\mathcal{J}_s^w| \quad (1 \leq s < v),$$

ce qui implique par récurrence sur  $s$

$$|\mathcal{J}_v^w| \leq (1 - \frac{1}{2}c_5)^{v-1} |\mathcal{J}_1^w| \leq \pi_w(x) e^{-c_6 h}.$$

Compte tenu de (4.17), nous avons donc finalement établi que l'on en toute circonstance

$$|E^w| \ll \{e^{-c_6 h} + e^{-(1-\delta)h}\} \pi_w(x) \ll e^{-c_7 h} \pi_w(x) \ll \pi_w(x) e^{-c_2 \sqrt{\log \psi}}.$$

□

### 5. Preuve du Corollaire 1.6

Pour  $n$  assez grand et tel que, par exemple,  $3^{\omega(n)} > (\log n)^{21/20}$ , nous posons

$$G(n) := 3^{\omega(n)} / \log n,$$

et  $L_n := \exp \{(A + \varepsilon_n)(\log_2 n)^2\}$  où  $A$  est la constante apparaissant dans (1.10) et  $\varepsilon_n$  est choisi dans  $[0, 1]$  de façon que

$$J_n := \frac{\log\{(\log n)G(n)L_n\}}{2 \log L_n} = \frac{\log\{3^{\omega(n)}L_n\}}{2 \log L_n} \in \mathbb{N}.$$

Définissons alors la suite

$$T_j := G(n)^{-1} L_n^{2j-1} \quad (j \geq 0),$$

qui vérifie donc  $T_{J_n} = \log n$ . D'après le Corollaire 1.4, nous avons

$$(5.1) \quad T_0 < E(n) \leq T_1 \quad \text{pp},$$

alors que (1.10) permet d'écrire

$$(5.2) \quad L_n^{2j-2} \leq \nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j) \leq L_n^{2j+3} \quad (0 \leq j < J_n) \quad \text{pp},$$

où nous avons tenu compte de (5.1) pour le cas  $j = 0$ . Par ailleurs,  $f$  étant nécessairement continue, il existe une suite  $\{\xi_j\}_{j=0}^{J_n-1}$  telle que

$$T_j \leq \xi_j \leq T_{j+1} \quad (0 \leq j < J_n), \quad \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt = \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\}.$$

Il suit, pour presque tout entier  $n$ ,

$$\begin{aligned} \vartheta(n; f) &\leq L_n^{2K(f)} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{\nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j)\} \leq \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) L_n^{2j+3+2K(f)} \\ &\leq 2G(n)L_n^{2+2K(f)} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\} = 2G(n)L_n^{2+2K(f)} \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{T_0}^{1/G(n)} f(t) dt \leq L_n^{K(f)} \int_{1/G(n)}^{L_n/G(n)} f(t) dt \leq L_n^{K(f)} \int_{1/G(n)}^{\log n} f(t) dt,$$

nous avons établi la majoration contenue dans (1.11).

Pour montrer la minoration, nous écrivons, compte tenu de (5.1) et (5.2),

$$\begin{aligned} \vartheta(n; f) &\geq \frac{1}{2L_n^{2K(f)}} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{\nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j)\} \geq \frac{1}{2} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) L_n^{2j-2-2K(f)} \\ &\geq \frac{G(n)}{4L_n^{3+2K(f)}} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\} = \frac{G(n)}{4L_n^{3+2K(f)}} \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt \quad \text{pp}. \end{aligned}$$

Cela complète la démonstration.

**Remerciements.** Les auteurs tiennent à exprimer leurs plus chaleureux remerciements à l'arbitre, dont la lecture exhaustive et méticuleuse a permis de rectifier un certain nombre d'imprécisions dans la version initiale de ce travail.

## Bibliographie

- [1] K. Alladi, The distribution of  $\nu(n)$  in the sieve of Eratosthenes, *Quart. J. Math.* (2), **33** (1982), 129–148.
- [2] M. Balazard, Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **40**, 2 (1990), 255–270.
- [3] P. Erdős, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 685–692.
- [4] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press (1988).
- [5] M. Mendès France & G. Tenenbaum, Systèmes de points, diviseurs, et structure fractale, *Bull. Soc. Math. de France* **121** (1993), 197–225.
- [6] H. Maier & G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
- [7] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **31** (1985), 393–400.
- [8] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, 2, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.
- [9] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 1, *Acta Arith.* **69** (1995), 121–152.
- [10] A. Raouj & G. Tenenbaum, Sur l'écart quadratique moyen des diviseurs d'un entier normal, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **126** (1999), 399–415.
- [11] P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* **313** (1980), 161–170.
- [12] A. Stef, *L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs*, Thèse de l'Université de Nancy I, 1992.
- [13] G. Tenenbaum, Sur la concentration moyenne des diviseurs, *Comment. Math. Helvetici* **60** (1985), 411–428.
- [14] G. Tenenbaum, A rate estimate in Billingsley's theorem for the size distribution of large prime factors, *Quart. J. Math.* (Oxford) **51** (2000), 385–403.
- [15] G. Tenenbaum, Sur l'écart quadratique moyen des diviseurs d'un entier normal, 2, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **138** (2005), 1–8.
- [16] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Abdelaziz Raouj  
 Département de mathématiques  
 Université Caddi Ayyad  
 Faculté des sciences Semlalia  
 BP S15  
 Marrakech  
 Maroc  
 raouj@ucam.ac.ma

André Stef & Gérald Tenenbaum  
 Institut Élie Cartan  
 Université Henri Poincaré-Nancy 1  
 BP 239  
 54506 Vandœuvre Cedex  
 France  
 andre.stef@iecn.u-nancy.fr  
 gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr