

# Lois du logarithme itéré avec pondérations additives

Gérald Tenenbaum

**Abstract.** We provide a very short proof that natural Lindeberg type conditions on the non-negative arithmetic additive function  $f$  ensure strong law of large numbers and law of iterated logarithm for weighted sums  $\sum_{n \leq N} f(n)X_n$  for any sequence  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  of iid random variables.

Cette note a pour but d'étendre et de simplifier des résultats récents de Berkes–Weber [1] et Fukuyama–Komatsu [3], relatifs au comportement asymptotique de sommes du type

$$\sum_{1 \leq n \leq N} f(n)X_n$$

où les  $X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, et  $f$  est une fonction arithmétique additive positive ou nulle.

Posons

$$A_N = A_N(f) := \sum_{p^\nu \leq N} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad B_N^2 = B_N(f)^2 := \sum_{p^\nu \leq N} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \quad (N \in \mathbb{N}),$$

où, ici et dans la suite, la lettre  $p$  désigne un nombre premier. Les résultats de [1], établis sous l'hypothèse que  $f$  est fortement additive, positive ou nulle, et telle que<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad f(p) = o(B_p) \quad (p \rightarrow \infty),$$

énoncent que les relations

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq N} f(n)X_n}{NA_N} = \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.s.}, \quad (2)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq N} f(n)X_n}{A_N \sqrt{2N \log_2 N}} = \|X_1\|_2 \quad \text{p.s.}, \quad (3)$$

sont valables, dans le cas de (2), si  $X_1$  est intégrable, et, dans le cas de (3), si  $X_1$  est centrée et de carré intégrable. Ici et dans la suite, nous désignons par  $\log_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme.

Nous étendons les résultats précédents au cas d'une fonction additive positive ou nulle générale tout en affaiblissant significativement les conditions de validité. Toutefois, notre motivation réside également dans la production d'une preuve directe très courte, répondant ainsi à une question implicitement soulevée dans [1].

**Théorème 1.** Soient  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, et  $f$  une fonction arithmétique additive positive ou nulle vérifiant

$$(4) \quad B_N = o(A_N) \quad (N \rightarrow \infty).$$

Alors la relation (2) a lieu dès que  $X_1$  est intégrable. De plus, la relation (3) a lieu dès que  $X_1$  est centrée et de carré intégrable et  $f$  vérifie en outre

$$(5) \quad \sum_{p^\nu \leq N} \frac{f(p^\nu)^3}{p^\nu} \ll A_N^3 \quad (N \rightarrow \infty).^{(2)}$$

---

AMS Subject classification. Primary 60F15, 11N37; secondary 60G50.

Keywords. Iterated logarithm, strong law of large numbers, weighted sums of iid random variables, additive functions.

1. Les auteurs de [1] utilisent  $\sqrt{B_n}$  à la place de  $B_n$ . Nous nous conformons ici à l'usage traditionnel.  
2. Ici et dans la suite, le symbole de Vinogradov  $a \ll b$  signifie  $a = O(b)$ .

*Remarques.* (i) Il est immédiat que l'hypothèse

$$\max_{p^\nu \leq N} f(p^\nu) = o(B_N) \quad (N \rightarrow \infty),$$

prolongeant (1), implique (4) et (5). Une fonction additive naturelle qui ne satisfait pas cette condition suffisante mais vérifie (4) et (5) est la fonction nombre de facteurs premiers,  $f(n) = \Omega(n) := \sum_{p^\nu \parallel n} \nu$ . Cette fonction n'étant pas fortement additive, elle ne relève pas non plus des résultats de [3].

(ii) La condition de Lindeberg, considérée dans [3] dans le cas où  $f$  est fortement additive,

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \sum_{\substack{p^\nu \leq N \\ f(p^\nu) > \varepsilon B_N}} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} = o(B_N^2)$$

implique également (4) de façon immédiate.

*Démonstration.* Sous l'hypothèse (4), l'inégalité de Turán–Kubilius implique classiquement (voir par exemple le th. III.3.3 de [5]) que l'on a

$$(6) \quad S_N := \sum_{n \leq N} f(n) \sim N A_N \quad (N \rightarrow \infty)$$

et

$$(7) \quad T_N := \sum_{n \leq N} f(n)^2 \sim N A_N^2 \quad (N \rightarrow \infty).$$

De plus, on a, uniformément lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$(8) \quad A_M \sim A_N \quad (\sqrt{N} \leq M \leq N).$$

Cela résulte de (4) via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme indiqué dans la démonstration du résultat de [5] précédemment cité.

Ainsi que noté dans [1], la loi forte des grands nombres établie dans [4] (th. 3), permet de réduire la preuve de (2) à celle de l'estimation

$$(9) \quad \sum_{S_N \leq t f(N)} 1 \ll t \quad (t \geq 1).$$

Or, pour  $t$  assez grand, le membre de gauche de (9) n'excède pas

$$t + \sum_{2^{j+1} > t} \sum_{2^j \leq N < 2^{j+1}} \frac{2f(N)^2 t^2}{N^2 A_N^2} \ll t + \sum_{2^{j+1} > t} \frac{t^2}{2^j} \ll t,$$

où nous avons utilisé (6), (7) et (8). Cela établit notre première assertion.

Comme dans [1], nous utilisons ensuite le fait que, compte tenu d'estimations données dans [2], la seconde assertion résulte directement de la majoration

$$(10) \quad \sum_{T_N \leq t f(N)^2} 1 \ll t \quad (t \geq 1).$$

Or, désignant par  $p_j$  des nombres premiers, on a, en vertu de (5),

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} f(n)^3 &= \sum_{p_1^{\nu_1}, p_2^{\nu_2}, p_3^{\nu_3} \leq N} f(p_1^{\nu_1}) f(p_2^{\nu_2}) f(p_3^{\nu_3}) \sum_{\substack{n \leq N \\ p_j^{\nu_j} \parallel n \ (1 \leq j \leq 3)}} 1 \\ &\ll N A_N^3 + N A_N B_N^2 + N \sum_{p^\nu \leq N} \frac{f(p^\nu)^3}{p^\nu} \ll N A_N^3, \end{aligned}$$

où nous avons scindé la somme triple selon le nombre de  $p_j^{\nu_j}$  distincts. Nous voyons ainsi que le membre de gauche de (10) est

$$\ll t + \sum_{2^{j+1} > t} \sum_{2^j \leq N < 2^{j+1}} \frac{f(N)^3 t^{3/2}}{N^{3/2} A_N^3} \ll t + \sum_{2^{j+1} > t} \frac{t^{3/2}}{2^{j/2}} \ll t.$$

Cela établit bien notre seconde assertion.  $\square$

**Remerciement.** L'auteur tient à remercier l'éditeur de lui avoir signalé l'existence de l'article très récent [3].

## Bibliographie

- [1] I. Berkes & M. Weber, A law of the iterated logarithm for arithmetic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135**, n° 1, (2007), 1223–1232.
- [2] E. Fisher, A Skorohod representation and an invariance principle for sums of weighted i.i.d. random variables, *Rocky Mountain J. Math.* **22** (1992), n° 1, 169–179.
- [3] K. Fukuyama & Y. Komatsu, A law of large numbers for arithmetic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137**, n° 1 (2009), 349–352.
- [4] B. Jamison, S. Orey & W. Pruitt, Convergence of weighted averages of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **4** (1965), 40–44.
- [5] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Gérald Tenenbaum  
Institut Élie Cartan  
Université Henri Poincaré–Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex  
France  
internet : [gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr](mailto:gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr)