

Les ensembles de multiples et la densité divisorielle

R. R. HALL

*Department of Mathematics, University of York,
Heslington, York YO1 5DD, England*

AND

G. TENENBAUM

*Université de Nancy I, UER Sciences Mathématiques,
Boîte Postale 239, 54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France*

Communicated by W. Schmidt

Received March 7, 1984

1. INTRODUCTION

Soit \mathcal{A} une suite d'entiers positifs et \mathcal{B} l'ensemble de ses multiples: $\mathcal{B} = \{ma: m \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathcal{A}\}$. Deux théorèmes classiques concernent la densité de \mathcal{B} :

THÉORÈME A (Davenport et Erdős [3]). *Tout ensemble de multiples \mathcal{B} possède une densité logarithmique, égale à sa densité asymptotique inférieure.*

THÉORÈME B (Besicovitch [1]). *Il existe une suite \mathcal{A} dont l'ensemble des multiples $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$ ne possède pas de densité asymptotique.*

Les preuves de ces deux théorèmes, et beaucoup d'autres informations, sont données dans le chapitre 5 de [17]. La construction de Besicovitch a inspiré un lemme d'Erdős [6] qui précise le point fondamental de la démonstration originale du Théorème B:

Si $d(T)$ désigne la densité asymptotique de l'ensemble des multiples de

$$\mathcal{A}(T) := \{a: T < a \leq 2T\},$$

alors $d(T) \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

On sait maintenant [39, 40], que

$$\frac{\exp\{-c\sqrt{(\log \log T \log \log \log T)}\}}{(\log T)^\delta} \ll d(T) \ll \frac{1}{(\log T)^\delta \sqrt{(\log \log T)}}$$

avec $\delta := 1 - (\log(e \log 2))/\log 2 = 0.086071\dots$; la lettre c désigne une constante absolue positive (non nécessairement la même à chacune de ses apparitions) tout au long de cet article.

De nombreux problèmes d'Arithmétique font intervenir la localisation de diviseurs dans des intervalles du type $(T, 2T]$. Le plus connu est sans doute la conjecture d'Erdős, récemment établie par Maier et Tenenbaum [34], affirmant que, pour presque chaque entier n , il existe au moins un tel intervalle contenant au moins deux diviseurs de n . La fonction de Hooley $A(n) := \max_T \text{card}\{d: d|n, T < d \leq eT\}$ a été étudiée dans [28–30, 34, 35] (la constante en facteur de T est sans importance tant qu'elle dépasse 1), et la fonction d'Erdős $\tau^+(n) := \text{card}\{k: \exists d|n, 2^k < d \leq 2^{k+1}\}$ dans [12, 27]. A une époque, Erdős espérait que sa vieille conjecture pourrait être prouvée en établissant que $\tau^+(n) = o(\tau(n))$ pour presque tout n ($\tau(n)$ désignant le nombre des diviseurs de n). On a montré dans [12] que ce n'est pas le cas.

Il est évident que l'ensemble des multiples de $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}(2^k) = \mathbb{Z}^+$ est de densité 1. Mais quelle est la manière la plus "économique" de choisir les intervalles $\mathcal{A}(T)$ tout en conservant la propriété que l'ensemble des multiples de leur réunion soit de densité 1? Autrement dit, quelle est la vitesse de croissance limite pour une suite $\{T_k: k = 0, 1, 2, \dots\}$ compatible avec la condition $\text{dens}(\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{B}(\mathcal{A}(T_k))) = 1$? Erdős a conjecturé l'existence d'une constante $\lambda > 1$ telle que le choix $T_k = \exp(k^\lambda)$ soit admissible. Nous établissons cette conjecture au § 2.

La démonstration repose sur les notions de *densité divisorielle* [25, 26, 41], et d'*équirépartition sur les diviseurs* [4, 24, 25, 41]. Rappelons brièvement les définitions. On dit qu'une suite \mathcal{A} possède une densité divisorielle $D_{\mathcal{A}} = z$ si

$$\tau(n, \mathcal{A}) := \text{card}\{d: d|n, d \in \mathcal{A}\} \sim z\tau(n) \quad (\text{p.p.}).$$

On dit qu'une fonction $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est équirépartie sur les diviseurs (*erd*) si la quantité $A(n; f)$, définie à la Sect. 3, est $o(\tau(n))$, p.p.. Ici et dans la suite la mention p.p. (presque partout) signifie "sur une suite de densité 1"; nous utiliserons également la notation p.p.l. pour "sur une suite de densité logarithmique 1"—donc une condition plus faible.

Les concepts de densité divisorielle et d'équirépartition sur les diviseurs sont interdépendants et en corrélation avec celui d'ensemble de multiples. C'est cette liaison qui est à la base du présent travail.

Le Théorème A cité plus haut nous a suggéré la véracité du résultat suivant.

THÉORÈME 1. Soit \mathcal{A} une suite d'entiers telle que $\tau(n, \mathcal{A}) \sim z\tau(n)$, (p.p.l.). Alors $D\mathcal{A} = z$.

Une autre particularité de la notion est que les progressions arithmétiques (autres que \mathbb{Z}^+) n'ont pas de densité divisorielle. Cela pourrait passer pour une déficience de la définition. En réalité, l'ensemble des suites ayant une densité divisorielle possède une structure relativement rigide. Dans le théorème simple suivant, nous en exhibons un aspect qui permet effectivement d'en exclure des suites dont les propriétés multiplicatives sont trop simples — comme les nombres sans facteurs carrés ou les progressions arithmétiques.

THÉORÈME 2. Soit \mathcal{A} une suite d'entiers. Une condition nécessaire pour que $D\mathcal{A} = z$ est que, pour chaque entier q fixé, l'on ait $D\mathcal{A}(q) = z$ où $\mathcal{A}(q) := \{m: mq \in \mathcal{A}\}$.

Les deux théorèmes suivants ont été prouvés dans [41].

THÉORÈME C. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite \mathcal{A} , de fonction caractéristique χ , possède une densité divisorielle égale à z est que

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{m < x \\ m \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{\chi(m) - z}{4^{\Omega(m)} m} \right| = o(\sqrt{\log x})$$

THÉORÈME D. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit erd est que l'on ait, pour chaque entier positif v ,

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{m < x \\ m \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{e(vf(m))}{4^{\Omega(m)} m} \right| = o(\sqrt{\log x})$$

Dans ces deux énoncés, $\Omega(m)$ désigne le nombre des facteurs premiers, comptés avec leur ordre de multiplicité, de l'entier m .

Le Théorème 2 est une conséquence immédiate du Théorème C: il suffit de restreindre k à parcourir les multiples de q . On peut aussi procéder directement. Il suffit en effet de supposer q premier; définissant $\beta = \beta(n)$ par $p^\beta \parallel n$, il vient

$$\begin{aligned} \tau(n, \mathcal{A}(q)) &= \text{card}\{d: d \mid n, dq \in \mathcal{A}\} \\ &= \text{card}\{d: dq \mid nq, dq \in \mathcal{A}\} \\ &= \tau(nq, \mathcal{A}) - \text{card}\{t: t \mid nq, t \in \mathcal{A}, q \nmid t\} \\ &= \tau(nq, \mathcal{A}) - \tau(nq^{-\beta}, \mathcal{A}) \\ &= (z + o(1)) \tau(nq) - (z + o(1)) \tau(nq^{-\beta}), \quad (\text{p.p.}) \\ &= (z + o(1)) \tau(n), \quad (\text{p.p.}) \end{aligned}$$

Aucune des deux démonstrations ne semble réversible. Cela pose le problème de l'existence d'un ensemble $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ tel que les conditions $D\mathcal{A}(q) = z, q \in \mathcal{Q}$, impliquent $D\mathcal{A} = z$. Le Théorème 2 montre que l'on peut se restreindre au cas où \mathcal{Q} est inclus dans la suite des nombres premiers.

Dans l'un des tout premiers travaux consacrés à l'étude de l'équirépartition sur les diviseurs, Kátai [32] a donné une élégante condition nécessaire suffisante pour qu'une fonction additive soit *erd*. Il semble à présent naturel de déduire ce résultat du critère général énoncé au Théorème D. Cela fait l'objet de la Sect. 4.

Lorsque f est additive, la fonction $e(vf(n)), v \in \mathbb{Z}$, est multiplicative. On est donc amené à évaluer des sommes du type

$$\sum_{n < x} \frac{g(n)}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{\Omega(n)}$$

où g appartient à la classe \mathcal{M} des fonctions multiplicatives complexes de module au plus 1. Abordé directement à la Sect. 4, ce problème induit la question du comportement asymptotique des sommes

$$\sum_{n < x} g(n) y^{\Omega(n)}$$

pour $g \in \mathcal{M}, 0 < y < 2$, que nous traitons à la Sect. 5. Le résultat obtenu étend le Théorème de Delange–Wirsing–Halász, qui correspond au cas $y = 1$.

On sait que les fonctions $(\log \log d)^\alpha, (\log d)^\beta, \theta d$ sont *erd* si et seulement si $\alpha > 1, \beta > 0$, et θ est irrationnel, respectivement [4, 25, 41]. Elles ne sont pas additives (sauf si $\beta = 1$), et, de plus, $|\theta d|$ est à croissance trop rapide pour que le Théorème 2 de [41] ou les résultats de la Sect. 3 ci-dessous s'appliquent. Cela est également vrai pour la fonction $d^\alpha, \alpha > 0$. Il est bon de garder à l'esprit que les diviseurs d'un entier "grand" et dont les facteurs premiers sont normalement répartis ont *grosso modo* une croissance exponentielle: on s'attend donc à ce que la correspondance avec le cas de l'équirépartition usuelle (mod 1) sur les entiers soit logarithmique. Partant, il faut considérer la croissance de d^α comme très rapide. En utilisant le Théorème D, nous montrons cependant à la Sect. 6 que cette fonction est *erd* pour chaque $\alpha > 0$. Qu'un tel résultat soit accessible souligne les limitations de l'analogie avec l'équirépartition classique.

Nous concluons cette section par la preuve du Théorème 1.

Supposons que \mathcal{A} soit telle que $\tau(n, \mathcal{A}) \sim z\tau(n)$, (p.p.l.); on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau(n, \mathcal{A})}{\tau(n)} - z \right)^2 = o(\log x).$$

Donc

$$L(x) := \sum_{n \leq x} \frac{(\tau(n, \mathcal{A}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}n} = o(\log x)$$

et il suffit de prouver que

$$S(x) := \sum_{n \leq x} \frac{(\tau(n, \mathcal{A}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}} = o(x).$$

Posons $r(m) = \sum \{(\chi(d) - z)(\chi(d') - z) : [d, d'] = m\}$ (où χ est la fonction caractéristique de \mathcal{A}), de sorte que

$$L(x) = \sum_{m \leq x} \frac{r(m)}{4^{\Omega(m)}m} \sum_{h \leq x/m} \frac{1}{4^{\Omega(h)}h}.$$

Il est bien connu que pour $0 < y < 2$, il existe une constante $C(y)$ telle que

$$\sum_{n \leq x} y^{\Omega(n)} = C(y) x(\log x)^{y-1} + O(x(\log x)^{y-2}).$$

Il s'ensuit que

$$L(x) = 4C\left(\frac{1}{4}\right) \int_1^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{1/4} dR(t) + O(1).$$

et similairement

$$S(x) = C\left(\frac{1}{4}\right) x \int_1^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-3/4} dR(t) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{1/4}}\right),$$

où

$$R(t) := \sum_{m \leq t} \frac{r(m)}{4^{\Omega(m)}m}.$$

Ensuite, nous calculons la transformée de Laplace de la fonction $L(e^v)$. Par la formule de convolution classique, nous obtenons

$$\tilde{L}(s) := \int_0^\infty e^{-sv} L(e^v) dv = 4C\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \frac{\tilde{R}(s)}{s^{5/4}} + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

lorsque $s \rightarrow 0+$, et, puisque $L(e^v) = o(v)$ par hypothèse, nous en déduisons que

$$\tilde{R}(s) := \int_0^\infty e^{-sv} dR(e^v) = o(s^{-3/4}).$$

Le théorème de Hardy–Littlewood–Karamata implique donc

$$R(e^v) = o(v^{3/4});$$

(la difficulté mineure provenant du fait que $r(m)$ n'est pas de signe constant peut être contournée en ajoutant $3^{\Omega(m)}$). Il reste à établir que

$$\int_0^u (u-v)^{-3/4} dR(e^v) = o(1)$$

lorsque $u = \log x \rightarrow \infty$. Comme $|r(m)| \leq 3^{\Omega(m)}$, on a $|dR(e^v)| \leq dR^+(e^v)$, où

$$R^+(t) := \sum_{m \leq t} \frac{1}{m} \left(\frac{3}{4}\right)^{\Omega(m)},$$

et, donc, l'intégrale précédente vaut

$$\int_{\eta u}^{(1-\eta)u} (u-v)^{-3/4} dR(e^v) + O(\eta^{1/4})$$

uniformément pour $0 < \eta < 1$. En intégrant par parties, on obtient que cette quantité est

$$\ll o(1) \eta^{-3/4} + \int_{\eta u}^{(1-\eta)u} o(1)(u-v)^{-7/4} v^{3/4} dv + O(\eta^{1/4})$$

pourvu que $\eta u \rightarrow \infty$. Si $\eta \rightarrow 0$ suffisamment lentement, cette majoration est bien $o(1)$, ce qu'il fallait démontrer.

Une version avec terme reste du théorème de Hardy–Littlewood–Karamata [14] permet de déduire de celles de $L(x)$ des majorations de type “ O ” pour $S(x)$. Cependant, les résultats que l'on peut atteindre par cette méthode sont très faibles: si l'on dispose de suffisamment d'informations concernant \mathcal{A} , il est en général préférable de s'attaquer directement au problème de l'estimation de $S(x)$.

2. LA CONJECTURE D'ERDÖS

THÉORÈME 3. *Posons $T_k = \exp(k^\lambda)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, pour tout λ fixé $< \lambda_0$, où $\lambda_0 = 1.314578\dots$ satisfait à $\lambda_0 \log(1 - 1/2\lambda_0) + 2\lambda_0 - 2 = 0$. Alors presque tout entier possède un diviseur dans l'un des intervalles $[T_k, 2T_k)$.*

Soit λ_1 le supremum des nombres λ pour lesquels la conjecture d'Erdős est valide. On a $\lambda_1 \geq \lambda_0$. L'argument heuristique suivant suggère que $\lambda_1 = 1/(1 - \log 2) = 3.258891\dots$. Les diviseurs de n occupent l'échelle logarithmi-

que $[0, \log n]$ dont les intervalles $[T_k, 2T_k)$ couvrent une longueur approximativement égale à $(\log n)^{1/2} \log 2$, c'est-à-dire une proportion d'environ $(\log n)^{(1/\lambda)-1} \log 2$. Il est raisonnable de penser que la conjecture ne peut être réalisée que si cette valeur est au moins égale à l'ordre normal de $1/\tau(n)$, soit $(\log n)^{-\log 2}$. Cela conduit à la borne λ_1 citée plus haut.

Il est parfois possible de donner des preuves probabilistes de l'existence de diviseurs dans des ensembles minces [8, 9, 22]. Il peut également se produire qu'une démonstration probabiliste soit (gravement) en défaut et que le résultat qu'elle suggérerait soit pourtant démontrable par d'autres moyens [11]. Nous ne pouvons pour le moment confirmer la supposition $\lambda_1 = 1/(1 - \log 2)$ ni d'une manière ni de l'autre, mais, nous notons que la majoration de $d(T)$ énoncée au début de l'introduction implique l'inégalité $\lambda_1 \leq 1/\delta = 11.618270\dots$. En effet pour $\lambda > 1/\delta$, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - d(T_k))$ est convergent, et, d'après un théorème de Behrend, sa valeur ne dépasse pas $1 - d \cup_k \mathcal{B}(T_k) < 1$.

Preuve du théorème. Dans un premier temps, supposons $\lambda < 1$. Pour $k > k_0(\lambda)$, les intervalles $[T_k, 2T_k)$ et $[T_{k+1}, 2T_{k+1})$ se chevauchent et donc pour $n > n_0(\lambda)$, n lui-même appartient à l'un de ces intervalles.

Examinons ensuite le cas $\lambda = 1$. Il faut montrer que presque tout entier possède un diviseur d tel que $\log d < \log 2 \pmod{1}$. Cela découle immédiatement de [21; *Theorem 1*]. On peut même considérablement affiner ce résultat. Il a été établi (indépendamment) dans [23] et [31] que pour chaque z fixé de $[0, 1]$, on a

$$|\text{card}\{d: d | n, \log d \leq z \pmod{1}\} - z\tau(n)| < \frac{\tau(n)}{(\log n)^\eta} \quad (\text{p.p.}),$$

pourvu que $\eta < (\log \pi / \log 2) - 1 = 0.651496\dots$. On connaît donc assez bien, pour presque tout n , le nombre des diviseurs qui appartiennent à la réunion des intervalles $[T_k, 2T_k)$. Le résultat suivant est un corollaire immédiat de [9; *Theorem 2*].

THÉORÈME 4. *Supposons que $\xi(k) \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Alors, pour presque tout n , il existe un entier k et un diviseur d de n tel que*

$$e^k \leq d < e^k(1 + k^{-\log 2 + \xi(k)/\sqrt{(\log k)}})$$

De plus, si $\xi(k) \rightarrow -\infty$, l'ensemble des entiers n ayant cette propriété est de densité asymptotique nulle.

Les résultats de [9] dépendent de théorèmes de Théorie Probabiliste des Groupes (cf. par exemple [10]). Il est usuel, lorsque de telles méthodes sont applicables, qu'elles fournissent une information assez fine.

Il reste à traiter le cas le plus important, soit $\lambda \in (1, \lambda_0)$. Posons $\alpha = 1/\lambda$. Il suffit de montrer que, pour presque tout n , il existe un diviseur d et un entier k tel que

$$k \leq (\log d)^\alpha < k + \frac{1}{4} k^{1-\lambda}.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha) := \{d: (\log d)^\alpha < \frac{1}{4}(\log d)^{\alpha-1}(\bmod 1)\}$$

et, soit \mathcal{B} l'ensemble des multiples des nombres de \mathcal{A} . Nous devons établir que \mathcal{B} est de densité asymptotique unité. Grâce au théorème de Davenport et Erdős [3] énoncé dans l'introduction, il suffit de prouver que \mathcal{B} est de densité logarithmique 1.

Posons $f(d) = (\log d)^\alpha$. On sait [41] que f est *erd* et la conclusion souhaitée découlera d'une estimation adéquate de la discrédance. Avec les notations de la Sect. 3 ci-dessous, on voit que si $\Delta(n; f) < \frac{1}{5}\tau(n)(\log n)^{\alpha-1}$, alors $n \in \mathcal{B}$. En effet, on peut choisir $u = 0$, $v = \frac{1}{4}(\log n)^{\alpha-1}$ et en déduire que

$$\text{card}\{d: d \mid n, (\log d)^\alpha < \frac{1}{4}(\log n)^{\alpha-1}(\bmod 1)\} > \frac{1}{20}\tau(n)(\log n)^{\alpha-1}.$$

Comme $uf'(u) = \alpha(\log u)^{\alpha-1}$, on peut appliquer le corollaire au Théorème 5 énoncé plus bas, avec $\beta = 1 - \alpha$. On trouve que, si $\xi(n) \rightarrow \infty$ avec n , on a

$$\Delta(n; f) < \xi(n) \tau(n)^\gamma \log \log n \quad (\text{p.p.l.}),$$

où $\gamma = \log_4(4 - 2\alpha)$. Puisque l'ordre normal de $\tau(n)$ est $(\log n)^{\log 2}$, il s'ensuit que pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

$$\Delta(n; f) < \tau(n)(\log n)^{\kappa+\varepsilon} \quad (\text{p.p.l.}),$$

où

$$\kappa = \frac{1}{2} \log(4 - 2\alpha) - \log 2 = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{2\lambda} \right).$$

Comme $\lambda < \lambda_0$, on a $\kappa < \lambda^{-1} - 1$ et $\kappa + \varepsilon < \alpha - 1$ pour ε assez petit. Ainsi $\Delta(n; f) < \frac{1}{5}\tau(n)(\log n)^{\alpha-1}$; cela achève la démonstration.

3. DISCRÉPANCE

Soit f une fonction arithmétique ($f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) qui est *erd*, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta(n; f) &:= \sup_{0 \leq u < v \leq 1} |\text{card}\{d: d \mid n, f(d) \in [u, v)(\bmod 1)\} - \tau(n)(v - u)| = o(\tau(n)) \end{aligned}$$

Dans cette section nous obtenons une majoration, valide p.p.l., pour $\Delta(n; f)$ sous l'hypothèse que $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, que $uf'(u)$ est monotone pour u assez grand et satisfait une condition de croissance. Le type de condition que nous envisageons comporte un paramètre unique $\beta \in (0, 1)$ qui mesure la précision de notre borne supérieure pour Δ . Nous imposons

$$(\log u)^{-\beta} \ll |uf'(u)| \ll R((\log u)^\beta) \quad (u \geq u_0),$$

où R appartient à une classe de fonction décrite plus loin. Cette classe contient par exemple la fonction $R(u) = \exp(\sqrt{u})$: nos résultats s'appliquent donc à $f(u) = (\log u)^\alpha$ pour tout $\alpha > 0$.

THÉORÈME 5. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\sum_{n < x} \frac{1}{n} \frac{\Delta(n; f)^2}{(2 + 2\beta)^{\Omega(n)}} \ll (\log \log x)^2 \log x.$$

COROLLAIRE 1. *Si $\xi(n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a*

$$\Delta(n; f) < \xi(n) \tau(n)^\gamma \log \log n \quad (\text{p.p.l.}),$$

avec $\gamma = \log_4(2 + 2\beta)$

COROLLAIRE 2. *Sous les hypothèses précédentes, f est *erd*.*

En effet, définissons pour chaque z de $[0, 1]$ la suite $\mathcal{A}(z; f) = \{d: f(d) < z(\text{mod } 1)\}$. D'après le corollaire 1, $\Delta(n; f) = o(\tau(n))$ p.p.l. donc $\tau(n, \mathcal{A}(z; f)) \sim z\tau(n)$ p.p.l. pour chaque z fixé. D'après le Théorème 1, on a donc $D\mathcal{A}(z; f) = z$ pour chaque z fixé, $0 < z < 1$. On a montré dans [26] que cela implique que f est *erd*.

La classe des fonctions qui sont *erd* pour de simples raisons de croissance comprend donc des fonctions d'ordre relativement élevé, comme $f(u) = \exp(\sqrt{\log u})$. Pour des fonctions f à croissance lente, comme $f(u) = (\log \log u)^2$, on dispose du corollaire 2 au Théorème 2 de [41], qui est optimal. Le Théorème 5 ne donne rien dans le cas de telles fonctions parce qu'il correspond au cas $\beta = 1$. Le Théorème 6 énoncé à la fin de cette section, étend le domaine de validité du Théorème 2 de [41] et par là-même notre connaissance des suites par blocs d'Erdős.

Décrivons maintenant la classe des fonctions R ; elle est définie par les deux conditions suivantes:

(i) $R: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croît assez vite pour que, quel que soit le réel positif $a < 1$ fixé, il existe un $b = b(a) < 1$ tel que

$$R(au) \ll_{a\zeta} R(u)^b.$$

(ii) On a

$$\sum_{n \leq x} y^{\Omega(n)} = \int_0^{1/2} x^{1-v} d\chi_y(v) + O\left(\frac{x}{R(\log x)}\right)$$

où

$$|d\chi_y(v)| \ll v^{-y} dv \quad \text{uniformément pour } \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Le problème de la détermination des couples $\{\chi_y, R\}$ pour lesquels on a (ii) est assez intéressant. Bien entendu, en dehors du présent contexte, il faudrait considérer un domaine de variation plus étendu en y . Nous n'approfondirons pas cette question ici, et, nous nous contenterons de noter que l'on peut choisir

$$d\chi_y(v) = \frac{\sin \pi y}{\pi(1-v)v^y} h(1-v, y) dv \quad (0 \leq y \leq y_0 < 1),$$

$$R(u) = \exp\{c(\varepsilon)(\log u)^{(3/5) - \varepsilon}\}$$

où $c(\varepsilon)$ est positive pour chaque ε positif. Nous avons posé

$$h(s, y) := (s-1)^y \zeta(s, y) = (s-1)^y \prod_p (1 - yp^{-s})^{-1}$$

(initialement définie dans le demi plan $\text{Re}(s) > 1$ et prolongée à un domaine convenable simplement connexe et sans zéro de la fonction zêta de Riemann [47]). Remarquons également que la condition (i) implique l'existence de constantes positives c, κ telles que $R(u) \gg \exp\{cu^\kappa\}$, d'où

$$\int_0^\infty uR(u)^{-\delta} du < \infty \quad (\delta > 0).$$

Preuve du Théorème 5. Posons

$$L(x, y) := \sum_{n < x} \frac{y^{\Omega(n)}}{n} \Delta(n; f)^2 \leq e \sum_{n=1}^\infty \frac{y^{\Omega(n)}}{n^\sigma} \Delta(n; f)^2$$

pour $\sigma = 1 + 1/\log x$ et $y \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. L'inégalité d'Erdős et Turán pour la discrépance [33] et celle de Cauchy-Schwarz impliquent que l'on a, uniformément pour $T \in \mathbb{Z}^+$,

$$\Delta(n; f)^2 \ll \frac{\tau(n)^2}{T^2} + (\log T) \sum_{v=1}^T \frac{1}{v} |\omega_v(n; f)|^2$$

où

$$\omega_v(n; f) := \sum_{d|n} e(vf(d)), \quad (e(x) := \exp(2i\pi x)).$$

La contribution du terme $\tau(n)^2/T^2$ à la majoration de $L(x, y)$ est

$$\ll \frac{1}{T^2} \frac{\zeta(\sigma, y)^4}{\zeta(2\sigma, y^2)} \ll \frac{1}{T^2} (\sigma - 1)^{-4y} = O(1)$$

si l'on choisit $T = [\log x]$. Nous allons montrer qu'avec ce choix de T on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{\Omega(n)}}{n^\sigma} \sum_{v=1}^T \frac{1}{v} |\omega_v(n; f)|^2 \ll (\log x)^{(2+2\beta)y} \log \log x;$$

la conclusion s'ensuit en choisissant $y = 1/(2 + 2\beta)$. Posons

$$\begin{aligned} Z(\sigma, v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{\Omega(n)}}{n^\sigma} |\omega_v(n; f)|^2 \\ &= \zeta(\sigma, y) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} e(vf(d) - vf(t)) \frac{y^{\Omega([d,t])}}{[d,t]^\sigma} \\ &= \zeta(\sigma, y) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y^{\Omega(dt)}}{(dt)^\sigma} e(vf(d) - vf(t)) \sum_{r|(d,t)} \frac{\phi(r; \sigma, y)}{y^{\Omega(r)}} \\ &= \zeta(\sigma, y) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{y^{\Omega(r)} \phi(r; \sigma, y)}{r^{2\sigma}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^{\Omega(m)} e(vf(mr))}{m} \right|^2 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\phi(r; \sigma, y) = r^\sigma \prod_{p|r} (1 - yp^{-\sigma}) \ll r^\sigma.$$

Pour chaque $M \in \mathbb{Z}^+$, la somme intérieure est (uniformément)

$$\begin{aligned} &\ll (\log M)^y + \int_M^\infty e(vf(ur)) u^{-\sigma} \left(\int_0^{1/2} (1-v) u^{-v} d\chi_y(v) \right) du \\ &\quad + v \int_M^\infty \frac{R((\log ur)^\beta)}{R(\log u)} du. \end{aligned}$$

On choisit $M = [\exp\{(\log x)^\beta + c(\log r)^\beta\}]$. Si $c = c(\beta)$ est assez grand, on voit que pour $u \geq M$, on a $(\log ur)^\beta < \frac{1}{2} \log u$. Avec $b = b(\frac{1}{2})$, le troisième terme est donc

$$\ll v \int_M^\infty R(\log u)^{b-1} du = v \int_{\log M}^\infty t R(t)^{b-1} dt \ll \frac{v}{R(\log M)^{(1-b)/2}}.$$

La contribution de ce terme à la somme finale est négligeable et celle du terme $(\log M)^y$ compatible avec la majoration annoncée. Il reste à estimer le second terme, soit

$$\int_0^{1/2} (1-v) M^{1-v-\sigma} \int_0^\infty e^{-(v+\sigma-1)t} g'(t) dt d\chi_y(v)$$

compte tenu du changement de variable défini par $u = Me^t$, et, où l'on a posé

$$g(t) := \int_0^t e^{v\omega} f(Mre^\omega) d\omega \ll \frac{1}{v} (\log(Mre^t))^\beta$$

d'après le Lemme 4.2 de [43]. En intégrant par parties en t on majore l'intégrable double par

$$\begin{aligned} &\ll \frac{1}{v} \int_0^{1/2} (v+\sigma-1) M^{1-v-\sigma} \int_0^\infty e^{-(v+\sigma-1)t} \{t^\beta + (\log Mr)^\beta\} dt d\chi_y(v) \\ &\ll \frac{1}{v} \int_0^{1/2} M^{-v} \{(v+\sigma-1)^{-\beta} + (\log Mr)^\beta\} v^{-y} dv \\ &\ll \frac{1}{v} \{(\log x)^\beta + (\log Mr)^\beta\} (\log M)^{y-1} \\ &\ll \frac{1}{v} \{(\log x)^{\beta y} + (\log r)^{\beta y}\}. \end{aligned}$$

La contribution de cette majoration a la somme finale ne dépasse pas la borne annoncée, et, cela achève la démonstration.

Nous concluons cette section en énonçant une forme plus forte du Théorème 2 de [41].

THÉORÈME 6. Soit $\{b_j\}$ une suite croissante de nombres réels satisfaisant à

$$\text{card}\{j: b_j < x\} \ll R(\eta(x) \log x)$$

où $\eta(x) = o(1)$ et R est une fonction de la classe décrite plus haut.

Si la suite

$$\mathcal{A} := \{a: \exists j: b_{2j} \leq a < b_{2j+1}\}$$

possède une densité logarithmique égale à z , alors $D\mathcal{A} = z$.

COROLLAIRE 1. Conservons les notations du théorème précédent. Si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que

- (i) $f'(x) = o(1)$
 - (ii) la suite $\{f(n): n = 1, 2, 3, \dots\}$ est équirépartie modulo 1,
- et, si θ est une bijection croissante de $C^1(\mathbb{R}^+)$ satisfaisant à
- (iii) $\theta(x) \ll \theta'(x) x \log x$
 - (iv) $\theta(x) \ll R(\eta(x) \log x)$

alors la fonction $f \circ \theta(d)$ est erd.

COROLLAIRE 2. Si g est une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ et s'il existe une fonction θ satisfaisant aux hypothèses du Corollaire 1 telle que

- (i) $|\theta'(x)/g'(x)| + |xg'(x)| = o(\theta(x))$,
- (ii) $\theta'(x)/g'(x)$ soit monotone à l'infini;

alors la fonction $g(d)$ est erd.

Nous nous bornerons à faire quelques remarques concernant les démonstrations, pratiquement inchangées. Après avoir prolongé à \mathbb{R}^+ la fonction caractéristique de \mathcal{A} en posant $\chi(u) := \chi([u + \frac{1}{2}])$ et défini

$$M(u) := \sum_{n < u} \left(\frac{1}{4}\right)^{\Omega(n)},$$

on constate qu'il suffit de montrer que l'on a

$$\int_{x/x_1}^{x/k} \frac{\chi(ku) - z}{u} dM(u) = o\left(\log x \left(\log \frac{x}{k}\right)^{-3/4}\right)$$

uniformément pour $k < x_1 := x \exp\{-\eta(x) \log x\}$. On estime l'intégrale en écrivant $M(u) = M_1(u) + \mathcal{E}(u)$ où $M_1 \in C^1[1, x]$ est seulement astreint à la condition

$$\int_v^\infty |dM_1(e^\omega)| \ll v^{-3/4}.$$

Les détails sont comme dans [41], sauf pour le choix

$$M_1(u) = \int_0^{1/2} u^{1-t} d\chi_{1/4}(t)$$

qui remplace l'approximation précédente $\phi_q(u)$. Le Corollaire 1 découle du Théorème et du fait que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, les suites

$$\mathcal{A}^\pm = \{d: f([\theta(d)]) < z \pm \varepsilon \pmod{1}\}$$

sont de densité logarithmique $z \pm \varepsilon$. On obtient le corollaire 2 en vérifiant que $f(x) = g \circ \theta^{-1}(x)$ satisfait aux hypothèses du Corollaire 1.

4. LE CAS DES FONCTIONS ADDITIVES ET LE THÉORÈME DE KÁTAI

Dans [32], Kátai a prouvé le résultat suivant:

THÉORÈME E (Kátai). *Soit f une fonction arithmétique additive réelle. Alors f est erd si, et seulement si, on a pour tout entier relatif non nul v*

$$\sum_p \frac{\|vf(p)\|^2}{p} = +\infty. \tag{1}$$

On obtient ainsi, par exemple, que les fonctions $d \mapsto \theta\Omega(d)$ et $d \mapsto \theta\omega(d)$ sont erd si, et seulement si, θ est irrationnel. L'idée essentielle de Kátai, pour démontrer le théorème E, consiste à considérer les moyennes de Weyl

$$\sigma_v(n, f) := \tau(n)^{-1} \sum_{d|n} e(vf(d)).$$

D'après le critère de Weyl, si $\Delta(n; f) \rightarrow 0$ alors $\sigma_v(n; f) \rightarrow 0$. De plus l'inégalité d'Erdős-Turán

$$\Delta(n; f) \ll \frac{1}{T} + \sum_{v=1}^T \frac{1}{v} |\sigma_v(n; f)| \ll \frac{1}{T} + \left(\sum_{v=1}^T |\sigma_v(n; f)|^2 \right)^{1/2}$$

implique

$$\sum_{n < x} \Delta(n; f) \ll \frac{x}{T} + \left(x \sum_{v=1}^T \sum_{n < x} |\sigma_v(n; f)|^2 \right)^{1/2};$$

on voit donc que la validité, pour tout v non nul, de la condition

$$\sum_{n < x} |\sigma_v(n; f)|^2 = o(x) \tag{2}$$

est nécessaire et suffisante pour que f soit erd . Lorsque f est additive, les fonctions $n \mapsto |\sigma_v(n; f)|^2$ sont multiplicatives et de module ≤ 1 . D'après le théorème de Wirsing ([49, Satz 1.2.2]) on a alors:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n < x} |\sigma_v(n; f)|^2 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{j=0}^{\infty} |\sigma_v(p^j; f)| p^{-j}$$

où le produit infini doit être interprété comme valant 0 lorsqu'il est divergent, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\sum_p \frac{1 - |\sigma_v(p; f)|^2}{p} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1 - \cos(2\pi vf(p))}{p} = +\infty.$$

Cette dernière condition est classiquement équivalente à (1).

On peut également donner une courte preuve du théorème E en utilisant le théorème D, le théorème taubérien de Karamata et le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques additives réelles coïncidant sur l'ensemble des nombres premiers. Alors f est erd si, et seulement si, g l'est.*

En effet, admettons momentanément ce lemme qui nous permet de nous restreindre au cas où f est complètement additive. On a dans cette circonstance

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ k|n}} \frac{e(\nu f(n))}{n 4^{\Omega(n)}} \right| = \sum_{k < x} \frac{1}{k 4^{\Omega(k)}} \left| S_{\nu} \left(\frac{x}{k} \right) \right|,$$

où l'on a posé

$$S_{\nu}(u) := \sum_{n < u} \frac{e(\nu f(n))}{n 4^{\Omega(n)}}.$$

En remarquant que $S_{\nu}(\frac{x}{k}) = S_{\nu}(x) + O(\varepsilon(\log x)^{1/4})$ pour $k < x^{\varepsilon}$, on constate que l'équirépartition de f sur les diviseurs équivaut à la validité de la relation asymptotique

$$S_{\nu}(x) = o((\log x)^{1/4}). \quad (3)$$

En appliquant alors le théorème de Karamata aux séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(2\pi \nu f(n))}{n 4^{\Omega(n)}} \frac{1}{n^{\sigma}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(2\pi \nu f(n))}{n 4^{\Omega(n)}} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

on obtient que (3) a lieu si, et seulement si,

$$F_{\nu}(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(\nu f(n))}{n^{1+\sigma} 4^{\Omega(n)}} = o(\sigma^{-1/4})$$

lorsque $\sigma \rightarrow 0+$. Or on a,

$$|F_{\nu}(\sigma)|^2 = \prod_p \left| 1 - \frac{e(\nu f(p))}{4p^{1+\sigma}} \right|^{-2} = \prod_p \left(1 - \frac{\cos(2\pi \nu f(p))}{2p^{1+\sigma}} + \frac{1}{16p^{2+2\sigma}} \right)^{-1},$$

d'où l'on déduit facilement la conclusion souhaitée.

Preuve du lemme 1. Supposons f équirépartie; il existe donc une suite d'entiers $\{n_j: j = 1, 2, \dots\}$ de densité 1 telle que, pour tout intervalle I du tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} , on ait en notant λ la mesure de Haar sur le tore

$$\tau(n_j; f, I) := \text{card}\{d: d|n, f(d) \in I(\text{mod } 1)\} \sim \lambda(I) \tau(n_j)$$

lorsque $j \rightarrow +\infty$. Considérons alors un entier k arbitrairement grand mais fixé. La densité de la sous-suite $\{n_j(k) : j = 1, 2, \dots\}$ de $\{n_j\}$ constituée de tous les n_j qui sont produits de facteurs premiers distincts et $\geq k$ vaut $(6/\pi^2) \prod_{p < k} (1 + (1/p))^{-1}$. Notons $\{m_h(k) : h = 1, 2, \dots\}$ la suite des entiers dont tous les facteurs premiers sont $< k$; la densité de la suite des entiers qui sont le produit d'un $m_h(k)$ par un $n_j(k)$ vaut

$$\frac{6}{\pi^2} \prod_{p < k} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \sum_{h=1}^{\infty} m_h(k)^{-1} = \prod_{p \geq k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Cela implique, pour tout ε de $]0, 1[$, l'existence d'un $k = k(\varepsilon)$ et d'un $h_0 = h_0(\varepsilon)$ tels que, la suite $\mathcal{S}(k, h_0)$ des entiers n qui se décomposent sous la forme $n = m_h(k) n_j(k)$, avec $1 \leq h \leq h_0$ et $j \geq 1$, soit de densité $\geq 1 - \varepsilon$. Etant donné un intervalle I du tore, on obtient, lorsque $n = m_h(k) n_j(k)$ tend vers l'infini en restant dans $\mathcal{S}(k, h_0)$,

$$\begin{aligned} \tau(n; g, I) &= \sum_{d|m_h(k)} \tau(n_j(k); g, -g(d) + I) = \sum_{d|m_h(k)} \tau(n_j(k); f, -g(d) + I) \\ &\sim \tau(m_h(k)) \lambda(I) \tau(n_j(k)) = \lambda(I) \tau(n). \end{aligned}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, cela achève la démonstration.

Remarque. En comparant les deux démonstrations du théorème E on voit que les conditions (1), (2), et (3) sont équivalentes. En fait, on peut montrer élémentairement le résultat général suivant:

Etant donné un nombre réel $y_0, 1 \leq y_0 < 2$, et une fonction multiplicative complexe g à valeurs dans le disque unité et telle que pour $y \in [1, y_0[$ et $p = 2$ ou 3 on ait $\sum_{j=0}^{\infty} g(p^j)(y/p)^j \neq 0$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\exists y \in]0, y_0[$ tel que

$$\sum_{n < x} \frac{y^{\Omega(n)} g(n)}{n} = o((\log x)^y); \tag{4}$$

(ii) la relation (4) est satisfaite pour tout y de $]0, y_0[$;

(iii) pour presque tout entier n on a $|\sum_{d|n} g(d)| = o(\tau(n))$;

(iv) $\sum_p (1 - \operatorname{Re} g(p))/p = +\infty$.

5. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DELANGE-WIRSING-HALÁSZ

Nous avons vu dans la section précédente comment le problème de l'équirépartition sur les diviseurs d'une fonction additive réelle se ramène à

celui de la validité d'une relation du type (4) avec $y = \frac{1}{4}$. Dans le cas $y = 1$, le théorème de Delange–Wirsing–Halász fournit un équivalent asymptotique de la moyenne de la fonction multiplicative g de module ≤ 1 ; on en déduit un équivalent du membre de gauche de (4) par simple sommation d'Abel. Le problème général de l'estimation de

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n)$$

pour y réel, $0 < y < 2^*$ a été abordé par Timofeev [42] dans le cas $y > \frac{1}{2}$ et peut être complètement résolu en utilisant un résultat de Wirsing [49] et la méthode de Halász dans [16]. Ainsi le Théorème 7 présenté ici n'est pas, à proprement parler, un résultat original. Il nous a toutefois semblé utile d'en donner un énoncé précis et une démonstration complète—ce qui, à notre connaissance n'existait pas dans la littérature.

THÉORÈME 7. *Soit g une fonction multiplicative de module ≤ 1 et soit y un nombre réel, $0 < y < 2$. Alors*

(i) *s'il existe un nombre réel τ tel que la série*

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(g(p) p^{-i\tau})}{p} \quad (5)$$

converge, on a, pour x infini,

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n) = \frac{K_\tau(y)}{\Gamma(y)} \frac{x^{1+i\tau}}{1+i\tau} (\log x)^{y-1} L_\tau(\log x)^y + o(x(\log x)^{y-1}) \quad (6)$$

où $K_\tau(y)$ est égal au produit infini convergent

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^y \exp\{-iy \operatorname{Im}(g(p) p^{-(1+i\tau)})\} \sum_{j=0}^{\infty} y^j g(p^j) p^{-j(1+i\tau)} \quad (7)$$

et où $L_\tau(u)$ est la fonction à croissance lente et de module 1 définie par

$$L_\tau(u) := \exp\left\{i \operatorname{Im} \sum_{p < e^u} g(p) p^{-(1+i\tau)}\right\}.$$

(ii) *si la série (5) diverge pour tout τ , on a, pour x infini,*

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n) = o(x(\log x)^{y-1}). \quad (8)$$

* Si l'on remplace Ω par ω , cette condition devient $0 < y \leq y_0$ où y_0 est arbitraire.

Remarque. Posons

$$K'_\tau(y) := \begin{cases} K_\tau(y)/\{\Gamma(y)(1+i\tau)\} & \text{si le produit (7) converge} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe alors un réel τ tel que l'on ait pour x infini

$$\sum_{n < x} \frac{y^{\Omega(n)}g(n)}{n} = K'_\tau(y) \int_0^{\log x} e^{itu}u^{y-1}L_\tau(u)^y du + o((\log x)^y).$$

Comme l'intégrale est $o((\log x)^y)$ si, et seulement si, $\tau \neq 0$, on voit que (4) équivaut à $K'_0(y) = 0$. On retrouve ainsi l'équivalence des conditions (i), (ii), et (iv) de la dernière remarque de la section 4.

DÉMONSTRATION. Montrons le point (i). Dans un premier temps, on a

$$\sum_{p < x} \frac{\log p}{p^{1+i\tau}} g(p) = (1 + o(1)) \log x. \tag{9}$$

En effet, si l'on note respectivement $r(p)$ et $\theta(p)$ le module et l'argument du nombre complexe $g(p)p^{-i\tau}$, avec $-\pi < \theta(p) \leq \pi$, on peut écrire le membre de gauche de (9) sous la forme

$$\sum_{p < x} \frac{\log p}{p} + O\left(\sum_{p < x} \frac{\varepsilon_p \log p}{p}\right)$$

avec $\varepsilon_p := |1 - r(p)e^{i\theta(p)}| \leq 1 - r(p) + |\theta(p)|$. Des inégalités $1 - r(p) \leq 1 - \operatorname{Re}(g(p)p^{-i\tau})$ et $|\theta(p)|^2 \leq \pi^2(1 - \operatorname{Re}(g(p)p^{-i\tau}))$ on déduit alors la convergence de la série $\sum_p \varepsilon_p^2/p$, d'où, pour $x_1 < x$,

$$\sum_{p < x} \frac{\varepsilon_p \log p}{p} \leq 2 \sum_{p < x_1} \frac{\log p}{p} + \left\{ \sum_{x_1 \leq p < x} \frac{(\log p)^2}{p} \cdot \sum_{p \geq x_1} \frac{\varepsilon_p^2}{p} \right\}^{1/2};$$

en choisissant $x_1 = x^{o(1)} \rightarrow +\infty$, on obtient (9). La fonction arithmétique $n \mapsto y^{\Omega(n)}g(n)n^{-i\tau}$ satisfait donc aux hypothèses du *Satz* 1.1.1 de Wirsing dans [49], d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} y^{\Omega(n)}g(n)n^{-i\tau} &\sim \frac{e^{-\gamma y}}{\Gamma(y)} \frac{x}{\log x} \prod_{p < x} \sum_{j=0}^{\infty} y^j g(p^j) p^{-j(1+i\tau)} \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(y)} x (\log x)^{y-1} \cdot \prod_{p < x} G_p \cdot L_\tau(\log x)^y, \end{aligned}$$

où G_p désigne le facteur d'indice p de (7). En utilisant l'inégalité

$|\log(1+u) - u| \leq 2|u|^2$ valable pour $|u| \leq \frac{2}{3}$, $u \in \mathbb{C}$, on montre que, pour p assez grand,

$$|\log G_p| \leq y \frac{1 - \operatorname{Re}(g(p) p^{-iy})}{p} + \frac{16}{(p-y)^2}.$$

Cela implique la convergence du produit infini (7) et, par conséquent, la validité de la formule asymptotique

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n) n^{-iy} = \left(\frac{K_\tau(y)}{\Gamma(y)} L_\tau(\log x)^y + o(1) \right) x(\log x)^{y-1}. \quad (10)$$

Le fait que $L_\tau(u)$ soit une fonction à croissance lente de u découle de (9) par sommation d'Abel. Une nouvelle intégration par parties permet ensuite de déduire (6) de (10).

Montrons le point (ii).

Remarquons d'abord que l'on peut se restreindre au cas d'une fonction complètement multiplicative. Admettons, en effet, que la conclusion est valide pour la fonction g^* définie par $g^*(2) = g^*(3) = 0$, $g^*(p) = g(p)$ pour $p \geq 5$, et $g^*(p^j) = g^*(p)^j$ pour tout p et tout $j \geq 1$; si χ_0 désigne le caractère principal modulo 6 et h la fonction multiplicative déterminée par l'identité

$$\chi_0(n) g(n) = \sum_{d|n} h(d) g^*\left(\frac{n}{d}\right),$$

on vérifie facilement que $h(p) = 0$ pour tout p , $h(2^j) = h(3^j) = 0$ pour $j \geq 1$, et, $|h(p^j)| \leq 2^j$ pour $p \geq 5$ et $j \geq 1$. Ainsi il existe un $\eta > 0$ tel que la série $\sum_{d=1}^{\infty} y^{\Omega(d)} h(d) d^{\eta-1}$ soit absolument convergente et l'on a:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n < x} \chi_0(n) y^{\Omega(n)} g(n) \right| &\leq \sum_{d < x} y^{\Omega(d)} |h(d)| \left| \sum_{m < x/d} g^*(m) y^{\Omega(m)} \right| \\ &\ll \sum_{d < \sqrt{x}} \frac{y^{\Omega(d)} |h(d)|}{d} \cdot o(x(\log x)^{y-1}) + \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{y^{\Omega(d)} |h(d)|}{d} \cdot x \log x \\ &= o(x(\log x)^{y-1}). \end{aligned}$$

On en déduit (8) en utilisant l'inégalité

$$\left| \sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n) \right| \leq \sum_{d|6^\infty} \frac{y^{\Omega(d)}}{d} \left| \sum_{n < x/d} \chi_0(n) y^{\Omega(n)} g(n) \right|$$

et la convergence de la série $\sum_{d|6^\infty} y^{\Omega(d)}/d$.

Supposons, donc, la fonction g complètement multiplicative et introduisons les notations suivantes:

$$\zeta(s, y) := \prod_p (1 - yp^{-s})^{-1}, \quad G(s, y) := \prod_p (1 - yg(p)p^{-s})^{-1},$$

$$P(T, x) := \min_{|\tau| \leq T} \sum_{p < x} \frac{1 - \operatorname{Re}(g(p)p^{-i\tau})}{p}, \quad N(x) := \sum_{n < x} y^{\Omega(n)} g(n) \log n.$$

Pour tout réel positif T fixé, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} P(T, x) = +\infty$. La relation

$$-\frac{1}{s} G'(s, y) = \int_0^\infty N(e^u) e^{-u\sigma} e^{-i\tau} du$$

montre que, pour $\sigma > 1$, la fonction $\tau \mapsto -1/(\sigma + i\tau) G'(\sigma + i\tau, y)$ est la transformée de Fourier de la fonction $u \mapsto N(e^u) e^{-u\sigma}$. L'existence de la majoration triviale

$$|N(e^u)| \ll_y e^{u^y} \tag{11}$$

permet donc d'écrire la formule de Plancherel

$$I(\sigma) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{G'(s, y)}{s} \right|^2 d\tau = 2\pi \int_0^\infty |N(e^u)|^2 e^{-2u\sigma} du. \tag{12}$$

En écrivant (12) pour la fonction $G_m(s, y) := G(s + im, y)$, $m \in \mathbb{Z}$, et en constatant que (11) est également valable pour la fonction N_m correspondante, on obtient pour $1 < \sigma \leq 2$,

$$\int_{m-1}^{m+1} |G'(s, y)|^2 d\tau \leq 5 \int_{-1}^1 \left| \frac{G'_m(s, y)}{s} \right|^2 d\tau \ll_y (\sigma - 1)^{-1-2y}$$

d'où, pour $T > 0$,

$$\int_{|\tau| \geq T} \left| \frac{G'(s, y)}{s} \right|^2 d\tau \ll_y T^{-1} (\sigma - 1)^{-1-2y}. \tag{13}$$

De plus, on a:

$$\int_{|\tau| \leq T} \left| \frac{G'(s, y)}{s} \right|^2 d\tau \leq \max_{|\tau| \leq T} |G(s, y)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{G'(s, y)}{G(s, y)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2}$$

alors que, d'une part,

$$\begin{aligned} \frac{|G(s, y)|}{\zeta(\sigma, y)} &= \exp \left\{ - \sum_{p, k \geq 2} \frac{y^k (1 - \operatorname{Re}(g(p)^k p^{-ik\tau}))}{k p^{k\sigma}} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ - \frac{y}{e} P(T, e^{1/(\sigma-1)}) \right\} \end{aligned}$$

et que, d'autre part, la formule de Plancherel appliquée à G'/G s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{G'(s, y)}{G(s, y)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} \left| \sum_{n < e^u} y^{\Omega(n)} g(n) A(n) \right|^2 e^{-2u\sigma} du \ll (\sigma - 1)^{-1}.$$

On obtient donc finalement

$$I(\sigma) \ll_y (\sigma - 1)^{-1-2y} \left(T^{-1} + \exp \left\{ -\frac{2y}{e} P(T, e^{1/(\sigma-1)}) \right\} \right). \quad (14)$$

En utilisant encore (12) sous la forme

$$I(\sigma) = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{|N(u)|^2}{u^{3+2(\sigma-1)}} du \geq \frac{2\pi}{e^2} \int_1^{e^{1/(\sigma-1)}} \frac{|N(u)|^2}{u^3} du$$

il vient, en choisissant $\sigma = 1 + (1/\log x)$,

$$\begin{aligned} & \int_1^x \frac{|N(u)|}{u^2} du \\ & \leq \left\{ \int_1^x \frac{|N(u)|^2}{u^3} du \cdot \int_1^x \frac{du}{u} \right\}^{1/2} \ll_y (\log x)^{y+1} \left(T^{-1/2} + \exp \left\{ -\frac{y}{e} P(T, x) \right\} \right) \end{aligned}$$

d'où, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé

$$\begin{aligned} & \int_1^x \frac{|N(u)|}{u^2 \log u} du \ll_y \int_1^{x^\varepsilon} (\log u)^{y-1} \frac{du}{u} + (\varepsilon \log x)^{-1} \int_1^x \frac{|N(u)|}{u^2} du \\ & \ll_y (\log x)^y \left(\varepsilon^y + \varepsilon^{-1} T^{-1/2} + \varepsilon^{-1} \exp \left\{ -\frac{y}{e} P(T, x) \right\} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Le résultat suivant démontré par Elliott dans [5] (*lemma 19.3*) permet maintenant de conclure.

LEMME 2. *Soit h une fonction arithmétique complètement multiplicative satisfaisant à $|h(p)| \leq y < 2$ pour tout p et soit A un nombre complexe. Posons $N^*(u) := \sum_{n < u} (h(n) - A) \log n$. Alors on a*

$$\left| N^*(x) - Ax \sum_{p < x} (h(p) - 1) \frac{\log p}{p} \right| \ll_y x \int_2^x \frac{|N^*(u)|}{u^2 \log u} du + x(\log x)^y \log \log x,$$

où l'on a posé $v := \max(0, y - 1)$.

En effet, en choisissant $h(n) = y^{\Omega(n)}g(n)$, $A = 0$, et en utilisant (15), on obtient:

$$|N(x)| \ll_{\varepsilon} x(\log x)^y \left(\varepsilon^y + \varepsilon^{-1} T^{-1/2} + \varepsilon^{-1} \exp \left\{ -\frac{y}{e} P(T, x) \right\} + (\log x)^{y-y} \log \log x \right).$$

En faisant, dans cette inégalité, tendre successivement x et T vers l'infini puis ε vers 0, on déduit

$$N(x) = o(x(\log x)^y)$$

d'où finalement (8) par sommation d'Abel.

6. LE CAS $f(d) = d^{\alpha}$

Nous prouvons le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Soit α un nombre réel positif non entier. Alors la fonction $d \mapsto d^{\alpha}$ est erd. Plus précisément, si y est réel, $0 \leq y \leq 1$, on a pour x infini*

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ k|n}} e(n^{\alpha}) y^{\Omega(n)} \right| = o(x(\log x)^{2y-1}). \tag{16}$$

Compte tenu du Théorème D le résultat d'équirépartition découle de la formule asymptotique, avec $y = \frac{1}{4}$, par sommation d'Abel. Nous n'avons pas cherché ici à expliciter la quantité figurant au membre de droite de (16); le lecteur pourra y parvenir en réduisant, dans le Lemme 3, la valeur de h lorsque $j \geq 12$ grâce aux résultats de Vinogradov [48], et, en choisissant convenablement, dans les calculs qui suivent, ε en fonction de x .

Le cas $f(d) = d^{\alpha}$ est semblable au cas $f(d) = \theta d$ traité dans [4] mais plus simple car la discrépance de la suite $\{n^{\alpha}\}$ est majorée indépendamment de la nature arithmétique de α . Le point fondamental réside dans le résultat suivant dû à van der Corput [44, p. 401].

LEMME 3. *Supposons $a < b$, $j \geq 2$, et considérons une application f de classe C^j sur $]a, b[$. On note*

$$h := 2^j, \quad \rho := \min_{a \leq u \leq b} |f^{(j)}(u)|, \quad \sigma := \max_{a \leq u \leq b} |f^{(j)}(u)|.$$

Alors on a

$$\left| \sum_{a \leq k < b} e(f(k)) \right| < 21(b-a) \{ (\rho\sigma^{-2})^{1/(h-2)} + (\rho(b-a)')^{-2/h} + (\rho\sigma^{-1}(b-a))^{-2/h} \}.$$

Choisissons $f(u) = vu^\alpha$, avec $v > 0$; en appliquant le résultat précédent aux intervalles $[a_m, b_m[:= [2^{-m-1}x, 2^{-m}x[$ successivement pour $m = 0, 1, \dots, [\log x/\log 2]$, on obtient, pour $h > \alpha$, l'estimation

$$\sum_{k < x} (x; v, \alpha) := \sum_{k < x} e(vk^\alpha) \ll_{\alpha, v} x \{ (vx^{\alpha-j})^{1/(h-2)} + (vx^\alpha)^{-2/h} + x^{-2/h} \}. \tag{17}$$

En particulier, on voit, en choisissant $j = [\alpha + 2 + (\log v/\log x)]$, que pour tout $A > 0$, il existe un $\eta > 0$, dépendant de α et de A , tel que l'on ait pour $1 < v < x^A$

$$\sum (x, v, \alpha) \ll_{\alpha, A} x^{1-\eta}. \tag{18}$$

Choisissons alors un réel ε dans $]0, \frac{1}{2}[$ et posons $x_0 := x^\varepsilon$, $x_1 := x^{1-\varepsilon}$. Le membre de gauche de (16) est

$$\ll_{\nu} U(x; y, \alpha) + \varepsilon^y x (\log x)^{2y-1}$$

avec

$$U(x; y, \alpha) := \sum_{x_0 \leq k < x_1} \left| \sum_{m < x/k} e(m^\alpha k^\alpha) y^{\Omega(m)} \right|.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |U(x; y, \alpha)|^2 &\ll \sum_{x_0 \leq k < x_1} k^{-1} \sum_{m, m' < x/k} ke((m^\alpha - m'^\alpha) k^\alpha) y^{\Omega(mm')} \\ &\ll \log x \left\{ \frac{x^2}{x_0} + \sum_{m' < m < x_1} \left| \sum_{x_0 \leq k < \min\{x_1, x/m\}} ke((m^\alpha - m'^\alpha) k^\alpha) \right| \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Lorsque $\alpha > 1$, on a, d'après (18), en choisissant $A = 2\alpha/\varepsilon$,

$$\sum (u; m^\alpha - m'^\alpha, \alpha) \ll_{\alpha, \varepsilon} u^{1-\eta}$$

pour $(\min\{x_1, x/m\})^{1/2} \leq u < \min\{x_1, x/m\}$ et $m' < m < x_1$; on en déduit,

par sommation d'Abel, que la somme intérieure de (19) est $\ll_{\alpha, \varepsilon} (\min\{x_1, x/m\})^{2-\eta}$, d'où

$$|U(x; y, \alpha)|^2 \ll_{\alpha, \varepsilon} \log x \left\{ x^{2-\varepsilon} + \sum_{m < x_0} m x_1^{2-\eta} + \sum_{x_0 \leq m < x_1} m \left(\frac{x}{m}\right)^{2-\eta} \right\} \\ \ll_{\alpha, \varepsilon} x^{2-\varepsilon\eta} \log x.$$

La formule (16) découle aisément de cette majoration. Lorsque $0 < \alpha < 1$, on majore la somme intérieure de (19) en appliquant directement (17) avec $j > 1/\varepsilon$; il vient, en notant $w = \min\{x_1, x/m\}$,

$$|U(x; y, \alpha)|^2 \ll_{\alpha, \varepsilon, j} (\log x) \left(x^{2-\varepsilon} \sum_{\substack{m < x_1 \\ m' < m}} w^2 \{ (m^\alpha - m'^\alpha)^{1/(h-2)} w^{(\alpha-j)/(h-2)} \right. \\ \left. + (m^\alpha - m'^\alpha)^{-2/h} w^{-2\alpha/h} + w^{-2/h} \right) \ll_{\alpha, \varepsilon, j} x^{2-\delta}$$

pour tout δ satisfaisant à $0 < \delta < \min\{2\alpha/h, 2\varepsilon/h, (\varepsilon j - \alpha)/(h-2)\}$. Cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. S. BESICOVITCH, On the density of certain sequences of integers, *Math. Ann.* **110** (1934), 336–341.
2. H. DAVENPORT, On some infinite series involving arithmetical functions, II, *Quart. J. Math.* **8** (1937), 313–320.
3. H. DAVENPORT AND P. ERDÖS, On sequences of positive integers, *Acta Arith.* **2** (1937), 147–151.
4. Y. DUPAIN, R. R. HALL, AND G. TENENBAUM, Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs, *J. London Math. Soc.* (2) **26** (1982), 397–411.
5. P. D. T. A. ELLIOTT, "Probabilistic Number Theory," I et II, Springer-Verlag New York, 1979.
6. P. ERDÖS, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 126–8.
7. P. ERDÖS, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 695–92.
8. P. ERDÖS AND R. R. HALL, Proof of a conjecture about the distribution of divisors of integers in residue classes, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), 281–9.
9. P. ERDÖS AND R. R. HALL, Some distribution problems concerning the divisors of integers, *Acta Arith.* **26** (1974), 175–188.
10. P. ERDÖS AND R. R. HALL, Some new results in probabilistic group theory, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 448–457.
11. P. ERDÖS AND R. R. HALL, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 304–307.
12. P. ERDÖS AND G. TENENBAUM, Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier* (1) **31** (1981), 17–37.

13. O. M. FOMENKO, The distribution of numbers with a fixed number of different primes "Stud. Numb. Theory 5; Zap." *Naučn. Sem. Leningrad, Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)* **82** (1979), 158–164. [Russian]
14. G. FREUD, Restglied eines Tauberschen Satzes I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **2** (1951), 299–308.
15. G. HALÁSZ, Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (3)–(4) **19** (1968), 365–403.
16. G. HALÁSZ, On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions, *Studia Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 211–233.
17. H. HALBERSTAM AND K. F. ROTH, "Sequences," Vol. 1, Oxford, Univ. Press, London, 1966.
18. R. R. HALL, On the distribution of integers in residue classes (mod k), I, *J. Number Theory* **2** (1970), 168–188.
19. R. R. HALL, On the distribution of integers in residue classes (mod k) II, *J. Number Theory* **3** (1971), 204–209.
20. R. R. HALL, On the distribution of integers in residue classes (mod k) III, *J. Number Theory* **3** (1971), 278–287.
21. R. R. HALL, The divisors of integers, I, *Acta Arith.* **26** (1974), 41–46.
22. R. R. HALL, The divisors of integers, II, *Acta Arith.* **28** (1975), 129–135.
23. R. R. HALL, Sums of imaginary powers of the divisors of integers, *J. London Math. Soc.* **9** (1975), 571–580.
24. R. R. HALL, The distribution of $f(d) \pmod{1}$, *Acta Arith.* **31** (1976), 91–97.
25. R. R. HALL, A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **26** (1978), 487–500.
26. R. R. HALL, The divisor density of integer sequences, *J. London Math. Soc.* (2) **24** (1981), 41–53.
27. R. R. HALL AND G. TENENBAUM, Sur la proximité des diviseurs, in "Recent Progress in Analytic Number Theory" (H. Halberstam and C. Hooley, Eds.), Academic Press, New York, 1981.
28. R. R. HALL AND G. TENENBAUM, On the average and normal orders of Hooley's Δ -function, *J. London Math. Soc.* (2) **2** (1982), 392–406.
29. R. R. HALL AND G. TENENBAUM, The average orders of Hooley's Δ -functions, *Mathematika* **31** (1984), 98–109.
30. C. HOOLEY, On a new technique and its applications to the theory of numbers, *Proc. London Math. Soc.* **38** (1979) 115–151.
31. I. KÁTAI, The distribution of divisors (mod 1), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **27** (1976), 149–152.
32. I. KÁTAI, Distribution mod 1 of additive functions on the set of divisors, *Acta Arith.* **30** (1976), 209–212.
33. L. KUIPERS AND H. NIEDERREITER, "Uniform Distributions of Sequences," Wiley, New York, 1974.
34. H. MAÏER AND G. TENENBAUM, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
35. H. MAÏER AND G. TENENBAUM, On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **31** (1985), 393–400.
36. H. L. MONTGOMERY AND R. C. VAUGHAN, Exponential Sums with multiplicative coefficients, *Invent. Math.* **43** (1977), 69–82.
37. G. J. RIEGER, Zum Teilerproblem von Alte Selberg, *Math. Nachr.* **30** (1965), 181–192.
38. A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* **18** (1954), 83–87.
39. G. TENENBAUM, Sur la répartition des diviseurs, *Sem. Delange Pisot Poitou* **17** (1975)–(1976), G14.

40. G. TENENBAUM, Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Compositio Math.* **51** (1984), 243–263.
41. G. TENENBAUM, Sur la densité divisorielle d'une suite d'entiers, *J. Number Theory*, **15** (1982), 331–346.
42. N. M. TIMOFEEV, Application of the analytic method to the summation of multiplicative functions, *Vladimir Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap.* **38** (1971), 204–249. [Russian]
43. E. C. TITCHMARSH, "The Theory of the Riemann Zeta-Function," Oxford 1951.
44. J. G. VAN DER CORPUT, Neue zahlentheoretische Abschätzungen, zweite Mitteilung, *Math. Z.* **29** (1929), 397–426.
45. R. C. VAUGHAN, Sommes trigonométriques sur les nombres premiers, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **285** (1977), 981–983.
46. R. C. VAUGHAN, On the distribution of αp modulo 1, *Mathematika* (2) **24** (1977), 135–141.
47. I. M. VINOGRADOV, On the ζ -function, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)* (1958), 631.
48. I. M. VINOGRADOV, "The Method of Trigonometrical Sums in Theory of Numbers," Interscience, New York, 1954.
49. E. WIRSING, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II, *Acta Math. Acad. Scient. Hungar.* **18** (1967), 411–467.