Proc. London Math. Soc.
(3) **84** (2002), 289–323.

SUR LES LOIS LOCALES DE LA RÉPARTITION DU k-IÈME DIVISEUR D'UN ENTIER*

RÉGIS DE LA BRETÈCHE *et* GÉRALD TENENBAUM

1. *Introduction et énoncé des résultats*

Désignons par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre des facteurs premiers distincts (resp. comptés avec multiplicité) d'un entier générique n et par $\tau(n)$ celui de ses diviseurs. Notons $\{p_j(n)\}_{j=1}^{\omega(n)}$ la suite croissante des facteurs premiers de n et $\{d_j(n)\}_{j=1}^{\tau(n)}$ celle de ses diviseurs. Introduites dans [**5**] et étudiées dans [**6**], [**3**], les quantités

$$\begin{aligned}\lambda_k(p) &:= \mathbf{d}\{n \geqslant 1 : p_k(n) = p\} \qquad (k \geqslant 1,\, p \geqslant 2),\\ \Lambda_k(d) &:= \mathbf{d}\{n \geqslant 1 : d_k(n) = d\} \qquad (k \geqslant 1, d \geqslant 1),\end{aligned}$$

où $\mathbf{d}\,\mathcal{A}$ dénote la densité naturelle d'une suite d'entiers $\mathcal{A}$, témoignent toutes deux d'une remarquable distorsion entre les valeurs normales et modales des fonctions arithmétiques dont elles sont les lois locales.

Il découle en effet d'estimations aujourd'hui classiques sur la répartition des facteurs premiers d'un entier n (cf. [**4**] ; [**7**], chap. 1 ; [**18**], chap. III.3) que, notant, ici et dans la suite, $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1{\cdot}1)\qquad \begin{aligned}\sum_{|\log_2 p - k| > r_k} \lambda_k(p) &= o(1) \qquad (k \to \infty),\\ \sum_{|\log_2 d - (\log k)/\log 2| > R_k} \Lambda_k(d) &= o(1) \qquad (k \to \infty),\end{aligned}$$

avec

$$r_k := \sqrt{(2+\varepsilon)k \log_2 k}, \qquad R_k := \sqrt{\{(2+\varepsilon)/\log 2\} \log k \log_3 k}.$$

On peut interpréter heuristiquement (1·1) en énonçant que les approximations

$$(1{\cdot}2)\qquad p_k(n) \approx \exp\exp k, \quad d_k(n) \approx \exp\left(k^{1/\log 2}\right)$$

sont pertinentes pour tous les entiers n sauf au plus ceux d'une suite de densité tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$. Ainsi, quitte à étendre légèrement le concept introduit par Hardy et Ramanujan, on peut considérer que la question des *valeurs normales* des fonctions arithmétiques $n \mapsto p_k(n)$ et $d \mapsto d_k(n)$ est essentiellement élucidée.

AMS (2000) subject classification : 11N25, 11N37.

* Nous incluons ici des corrections par rapport à la version publiée.

Le problème des *valeurs modales* concerne les extremums

$$\lambda_k^* := \max_p \lambda_k(p), \qquad \Lambda_k^* := \max_d \Lambda_k(d) \tag{1·3}$$

et, plus précisément, les arguments en lesquels ils sont atteints. On pourrait être tenté de déduire de (1·2) que ces arguments doivent être proches des membres de gauche respectifs de (1·2). Il n'en est rien en fait. Erdős énonce dans [**5**] que

$$\begin{aligned} \lambda_k(p) = \lambda_k^* &\Rightarrow p = \mathrm{e}^{k+o(k)} \qquad (k \to \infty) \\ \Lambda_k(d) = \Lambda_k^* &\Rightarrow d = k^{\{1+o(1)\}\log_2 k} \quad (k \to \infty) \end{aligned} \tag{1·4}$$

en indiquant, dans son style caractéristique, que l'explication de ce phénomène — qu'il désigne d'ailleurs comme un « apparent paradoxe » — réside, disons pour le cas de la suite $p \mapsto \lambda_k(p)$, dans l'observation qu'« *il y a beaucoup plus de nombres premiers autour de* $\exp\exp k$ *qu'autour de* e^k ».

Les deux implications (1·4) sont fausses : la première a été infirmée dans [**6**] et c'est l'un des objets du présent travail que de rectifier la seconde. Il n'en demeure pas moins que l'intuition d'Erdős était essentiellement pertinente. Son explication, judicieuse et qualitativement exacte, signifie que, dans la somme infinie

$$\sum_p \lambda_k(p) = 1,$$

la décroissance en p du terme général est suffisamment lente pour que la contribution des (nombreux) termes au « voisinage » de $\exp\exp k$[1] soit dominante alors que les grandes valeurs de $\lambda_k(p)$ sont trop peu nombreuses, et en fait trop peu grandes, pour contribuer significativement à l'ensemble.

Bien que d'énoncés jumeaux, ces deux problèmes « non conventionnels »[2] sont de difficultés inégales. Désignons par $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique n avec la convention $P^+(1) = 1$. Le crible d'Ératosthène fournit l'écriture explicite

$$\lambda_k(p) = \frac{1}{p}\prod_{q<p}\Big(1-\frac{1}{q}\Big)s_{k-1}(p) \tag{1·5}$$

où la lettre q désigne un nombre premier et où

$$s_j(p) := \sum_{\substack{P^+(m)<p \\ \omega(m)=j}} \frac{1}{m} \qquad (j \geqslant 0)$$

est le coefficient de z^j dans le polynôme

$$F_p(z) := \prod_{q<p}\Big(1+\frac{z}{q-1}\Big).$$

1. C'est-à-dire dans un intervalle du type
$$\exp\exp\{(1-\varepsilon)k\} \leqslant p \leqslant \exp\exp\{(1+\varepsilon)k\}.$$

2. Voir en particulier [**5**].

La représentation

$$F_p(z) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(p) z^j$$

permet de recourir à la méthode du col pour estimer $\lambda_k(p)$, ce qui constitue, d'un point de vue analytique, une situation très privilégiée. On peut ainsi établir que l'on a

$$\lambda_k(p) = \frac{\exp\big\{(1+O(\varepsilon_p))k\log_2(\log p/\log k) + O(k)\big\}}{k!p\log p} \qquad (p \geqslant p_k) \tag{1·6}$$

où p_k désigne le k-ème nombre premier et où l'on a posé $\varepsilon_p := \log_3 p/\log_2 p$. L'estimation (1·6) résulte du corollaire 1 de [**6**] lorsque, disons, $p > k^2$, et la même méthode fonctionne encore dans le cas complémentaire. Un tel résultat montre qu'au moins en première approximation $\lambda_k(p)$ ne dépend que de la taille de p. Posant $\ell_1 := \log k$, $\ell_2 := \log_2 k$, il est établi dans [**6**] que

$$\lambda_k^* = \exp\Big\{-k\Big(\ell_1 - \ell_2 - 1 + \frac{2\ell_2+1}{\ell_1} + \frac{2\ell_2^2 - \ell_2 + O(1)}{\ell_1^2}\Big)\Big\}.$$

Une telle estimation n'est pas en elle-même suffisante pour permettre une évaluation fine des valeurs modales de la loi $\{\lambda_k(p)\}_{p\geqslant 2}$. Cependant, les formules semi-asymptotiques caractéristiques de la méthode du col fournissent une description précise du comportement local de $\lambda_k(p)$. Cela a permis à Erdős et au second auteur de montrer ([**6**], corollaire 5) que toute valeur de p réalisant le maximum λ_k^* satisfait à

$$\log p = \frac{k}{\ell_1}\Big\{1 + \frac{2\ell_2}{\ell_1} + \frac{2\ell_2^2 - 3\ell_2 + O(1)}{\ell_1^2}\Big\}. \tag{1·7}$$

D'autres applications des estimations de $\lambda_k(p)$ par la méthode du col sont décrites dans [**3**].

L'étude des valeurs modales de $\{\Lambda_k(d)\}_{d=1}^{\infty}$ est beaucoup plus compliquée. Désignons par $\tau(n,z)$ le nombre des diviseurs d'un entier n qui n'excèdent pas z. Le pendant de la représentation (1·5) est la formule (cf. [**6**])

$$\Lambda_k(d) = \frac{1}{d}\prod_{p\leqslant d}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{P^+(m)\leqslant d\\ \tau(md,d)=k}} \frac{1}{m}. \tag{1·8}$$

Ici, la somme en m dépend à l'évidence de la structure arithmétique de d et les questions d'apparence les plus anodines peuvent se révéler délicates, à l'instar de la preuve donnée dans [**6**] de l'équivalence

$$\Lambda_k(d) > 0 \Leftrightarrow \tau(d) \leqslant k \leqslant d. \tag{1·9}$$

Posons

$$K := \exp\Big\{\frac{\log k\ \log_2 k}{\log 2}\Big\}, \quad K_j := \exp\Big\{\frac{\log k\ \log_{j+2} k}{\log 2}\Big\} \quad (j=1,2).$$

Il est bien connu que l'on a

$$\min_{\tau(d)\geqslant k} d = K^{1+o(1)}. \tag{1·10}$$

Soit $N_y := \prod_{p\leqslant y} p$ avec y minimal sous la contrainte $\tau(N_y) = 2^{\pi(y)} \geqslant k$. En choisissant $d = d_k(N_y)$ et en réduisant la somme en m de (1·8) au seul nombre $m = N_y/d$, on obtient l'inégalité de gauche de l'encadrement

$$K^{-1}K_1^{-1+O(1/\log_3 k)} \leqslant \Lambda_k^* \leqslant K^{-1}K_1^{1+O(1/\log_3 k)} \tag{1·11}$$

prouvé dans [**6**]. Le fait que la borne inférieure ne soit pas trop éloignée de la borne supérieure a conduit les auteurs de [**6**] à supposer que la version correcte de la seconde implication (1·4) était

$$\Lambda_k(d) = \Lambda_k^* \Rightarrow d = K^{1+o(1)}. \tag{1·12}$$

Il y a essentiellement deux modèles raisonnables pour la structure des entiers d réalisant le maximum Λ_k^*. Ou bien $\tau(d) \approx k$, donc $d \approx K$, et la somme en m de (1·8) est de la taille de l'unité, ou bien m et d contribuent équitablement aux diviseurs comptés dans $\tau(md, d)$, et $\tau(d) \approx \tau(m, d) \approx \sqrt{k}$ — de sorte que d et les entiers m sommés dans (1·8) sont au moins de taille $\sqrt{K}$.(3) Cette seconde éventualité est évidemment beaucoup plus complexe que la première car il est difficile de concevoir la structure des entiers m (qui sont alors nécessairement nombreux) dont les diviseurs se combinent avec ceux de d pour réaliser la condition $\tau(md, d) = k$. La conjecture (1·12) correspondait à l'espoir que la situation la plus simple prévalait. Elle est également erronée : la présente étude met en évidence que le paradoxe d'Erdős pour les valeurs modales de la loi $\{\Lambda_k(d)\}_{d=1}^{\infty}$ recèle des phénomènes très subtils. Nous établissons les résultats suivants.

THÉORÈME 1.1. *On a, pour une constante convenable k_0,*

$$\frac{k^{O(1)}}{K\sqrt{K_1}K_2} \leqslant \Lambda_k^* \leqslant \frac{\sqrt{K_2}\,k^{O(1)}}{K\sqrt{K_1}} \qquad (k \geqslant k_0). \tag{1·13}$$

THÉORÈME 1.2. *Il existe des constantes positives b_1, b_2 et k_0 telles que, pour tout entier d vérifiant $\Lambda_k(d) = \Lambda_k^*$, on ait*

$$K^{\frac12-\varepsilon_k} \leqslant d \leqslant K^{\frac12+\eta_k} \qquad (k \geqslant k_0). \tag{1·14}$$

avec $\varepsilon_k := b_1\sqrt{\log_3 k/\log_2 k}$, $\eta_k := \left\{\frac32 \log_4 k + b_2\right\}/\log_3 k$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $k_0(\varepsilon)$ telle que, pour tout $k > k_0(\varepsilon)$ et tout entier d tel que $\Lambda_k(d) = \Lambda_k^*$, on ait

$$\tau(d) > 2^{\{1-\mu_d\}(\log d)/\log_2 d}, \tag{1·15}$$

avec $\mu_d := (3+\varepsilon)\log_4 d/\log_3 d$.

La preuve de ces estimations nécessite plusieurs étapes et repose sur trois arguments essentiels que nous nous proposons maintenant de décrire brièvement.

Le premier est une majoration élémentaire de la loi de répartition du nombre de diviseurs des diviseurs d'un entier.

3. On pourrait *a priori* imaginer un troisième modèle dans lequel d aurait peu de facteurs premiers et les entiers m de (1·8) vérifieraient $\tau(m) \approx k$. Un argument élémentaire reposant sur le Théorème 1.3 permet d'écarter facilement une telle éventualité.

THÉORÈME 1.3. *Soit* $E : [0, \frac{1}{2}[\to [0, 1[$ *la fonction définie par*

$$E(\beta) := \frac{1-\beta}{\log 2} \log\Big(\frac{1}{1-\beta}\Big) + \frac{\beta}{\log 2} \log\Big(\frac{1}{\beta}\Big).$$

Alors, pour tout $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ *et tout entier* $n \geqslant 1$*, on a*

$$\sum_{\substack{d|n\\ \tau(d)\leqslant\tau(n)^\beta}} 1 \leqslant \tau(n)^{E(\beta)}. \tag{1·16}$$

Ce résultat, qui, dans le cas particulier d'un entier sans facteur carré ayant m facteurs premiers, fournit la majoration

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant\beta m} \binom{m}{j} \leqslant 2^{E(\beta)m},$$

généralise donc au cas d'une somme de variables discrètes équiréparties les estimations de type « bornes exponentielles » (cf., par exemple, [**16**], théorème VII.4.2, ou [**2**], exercice 12, p. 91) pour une variable aléatoire binomiale.

Posons

$$d_k^- := \min_{\Lambda_k(d)=\Lambda_k^*} d, \qquad d_k^+ := \max_{\Lambda_k(d)=\Lambda_k^*} d.$$

Le Théorème 1.3 nous permettra d'obtenir des assertions du type

(a) $d_k^- > K^{\frac{1}{2}+o(1)}$;

(b) $\Lambda_k^* \leqslant K^{-1}K_1^{-\frac{1}{2}+o(1)}$;

(c) $\forall v > \frac{1}{2}\ \exists\eta > 0 : \sup_{d>K^v} \Lambda_k(d) \leqslant K^{-1}K_1^{-\frac{1}{2}-\eta}$.

Dans les trois cas, on raisonne en restreignant les entiers m apparaissant dans la somme de (1·8). Considérons par exemple la minoration (a). Si $d < K^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$, alors il découle de (1·10) que tous les diviseurs t comptés dans $\tau(md, d)$ satisfont, pour un $\varepsilon_1 > 0$ convenable, à $\tau(t) \leqslant k^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} \leqslant \tau(md)^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$, puisque $k = \tau(md, d) \leqslant \tau(md)$. L'inégalité (1·16) fournit donc $\tau(md) \geqslant k^{1+c}$ avec $c > 0$.[4] Une telle minoration renforce considérablement la borne triviale $\tau(md) \geqslant k$ et permet de montrer que $\Lambda_k(d) < \Lambda_k^*$ pour $d < K^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Il résulte de ce qui précède qu'une majoration du type

(d) $d_k^+ \leqslant K^{\frac{1}{2}+o(1)}$

est impliquée par une minoration de la forme

(e) $\Lambda_k^* \geqslant K^{-1}K_1^{-\frac{1}{2}+o(1)}$.

La preuve d'une telle borne inférieure occupe la plus grande partie de ce travail. Notre approche consiste à choisir d égal à un produit de nombres premiers consécutifs, soit

$$d = N_y := \prod_{p\leqslant y} p,$$

où y est aussi grand que possible sous la contrainte $N_y \leqslant K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Ensuite, nous construisons un ensemble d'entiers m tels que $\tau(mN_y, N_y) = k$. Soit ℓ l'unique

4. En fait $c = \{1 - E\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)\}/E\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)$.

entier tel que $k/2\tau(N_y) < 2^\ell \leqslant k/\tau(N_y)$. Les entiers m choisis sont tous les produits de la forme $m_1 r$ avec

$$\mu(m_1)^2 = 1, \quad \omega(m_1) = \ell, \quad p \mid m_1 \Rightarrow \ell < p \leqslant \ell^{1+\varepsilon},$$

où ε est un paramètre assez petit, et où r décrit, pour chaque valeur de m_1, un ensemble $\mathcal{E}(m_1)$ constitué d'entiers dont tous les facteurs premiers sont dans l'intervalle $\left]\ell^{1+\varepsilon}, N_y\right]$ et tels que $\tau(N_y m_1 r, N_y) = k$.

Les deux étapes de la preuve qui restent à décrire concernent les évaluations respectives de $\sum 1/m_1$ et $\sum_{r\in\mathcal{E}(m_1)} 1/r$.

La première relève d'une application standard de la méthode du col. Dans l'énoncé suivant, nous utilisons pour $1 \leqslant y < z$ la fonction

$$F(w) = F_{y,z}(w) = \prod_{y<p\leqslant z} \Big(1 + \frac{w}{p}\Big).$$

Si $h < \pi(z) - \pi(y)$, il existe une unique solution $\varrho = \varrho(y, z; h)$ à l'équation

$$\frac{\varrho F'(\varrho)}{F(\varrho)} = \sum_{y<p\leqslant z} \frac{\varrho}{p+\varrho} = h. \tag{1·17}$$

Nous posons également

$$R := (\log y)(\log u)/\log_2 y, \tag{1·18}$$

où u est défini par $z = y^u$. On note que $R \gg 1$ dès que $z > y(\log y)^c$ où c est une constante positive arbitraire.

THÉORÈME 1.4. *Il existe deux constantes positives $\kappa_1 > 1$ et y_0 telles que l'on ait, uniformément pour $z > y(\log y)^{\kappa_1}$, $y > y_0$, $y \geqslant h \geqslant 2$,*

$$s_h(y, z) := \sum_{\substack{\omega(m)=h\\ p\mid m\Rightarrow y<p\leqslant z}} \frac{\mu(m)^2}{m} = \frac{F(\varrho)h^h}{\mathrm{e}^h \varrho^h h!}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{R}\Big)\Big\} \tag{1·19}$$

où ϱ et R sont définis respectivement par (1·17) *et* (1·18)*. En particulier, on a sous les mêmes conditions*

$$s_h(y, z) = \frac{(\log u)^h}{h!}\mathrm{e}^{O(h/R)} \tag{1·20}$$

où u est défini par $z = y^u$.

De plus, il existe une constante κ_2 telle que, sous l'hypothèse supplémentaire $z \leqslant y^2$, les estimations (1·19) *et* (1·20) *restent valables lorsque la sommation est restreinte aux entiers m satisfaisant à*

$$(yz)^{h(1-\vartheta)/2} < m \leqslant (yz)^{h(1+\vartheta)/2} \tag{1·21}$$

avec $\vartheta > \kappa_2(\log_2 y)/\{(\log u)^{2/3}\log y\}$.

La construction des ensembles $\mathcal{E}(m_1)$ repose sur un procédé itératif. Décomposons $r = p_1 \cdots p_J$ (avec donc $J := \Omega(r)$) et posons

$$r_j := p_1 \cdots p_j, \quad k_j = k - \tau(N_y m_1 r_j, N_y) \qquad (1 \leqslant j \leqslant J).$$

Nous cherchons alors un ensemble I de nombres premiers $p = p_{j+1}$ tels que k_{j+1}/k_j soit petit mais

$$\sum_{p\in I} \frac{1}{p}$$

ne soit pas trop petit. Soient $h := \log k$ et x_j, x_j^* des nombres entiers tels que

$$\tau(N_y m_1 r_j, x_j) = \big[k_j(1 - 1/h)\big], \quad \tau(N_y m_1 r_j, x_j^*) = \big[k_j(1 - 1/2h)\big]. \tag{1·22}$$

L'identité

$$\tau(N_y m_1 r_{j+1}, N_y) = \tau(N_y m_1 r_j, N_y) + \tau(N_y m_1 r_j, N_y/p_{j+1}),$$

valable dès que $p_{j+1} \nmid N_y m_1 r_j$, implique la majoration $k_{j+1} \leqslant k_j/h$ si en outre $p_{j+1} \in I := \big]N_y/x_j^*, N_y/x_j\big]$. Maintenant, sous d'anodines conditions de taille relatives à x_j et x_j^* et lorsque, par exemple, $k_j \gg h^2$, il découle du théorème des nombres premiers que

$$\sum_{N_y/x_j^* < p \leqslant N_y/x_j} \frac{1}{p} \gg \frac{x_j^* - x_j}{x_j \log N_y}.$$

Il reste donc à déduire une minoration de $(x_j^* - x_j)/x_j$ à partir de (1·22). En supposant que la fonction $x \mapsto \tau(N_y m_1 r_j, x)$ est sous-linéaire en un sens faible, nous avons

$$\frac{k_j}{h} \ll \tau(N_y m_1 r_j, x_j^*) - \tau(N_y m_1 r_j, x_j) \ll \frac{x_j^* - x_j}{x_j}\tau(N_y m_1 r_j, x_j) \ll \frac{x_j^* - x_j}{x_j} k_j$$

d'où

$$\frac{x_j^* - x_j}{x_j} \gg \frac{1}{h},$$

une minoration suffisante pour notre application.

La troisième étape de notre raisonnement consiste donc à établir la sous-linéarité faible des fonctions $x \mapsto \tau(N_y m_1 r_j, x)$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$, qu'on peut essentiellement ramener à celle de la fonction $x \mapsto \tau(N_y, x)$. Une autre formulation du même problème s'énonce en termes du comportement local de la fonction de comptage des entiers sans facteur carré et sans grand facteur premier. La méthode du col fournit spécifiquement des estimations du type requis(5) en permettant une évaluation du *taux relatif* d'accroissement des fonctions de comptage même dans les domaines où ces fonctions ne sont pas susceptibles d'être explicitement approchées. Nous rassemblons les résultats obtenus et les preuves correspondantes dans le paragraphe suivant. C'est le Corollaire 2.6 qui contient l'information nécessaire à la complétion de notre argument. Cependant nous obtenons également plusieurs autres énoncés d'intérêt intrinsèque.

5. Ce sont précisément les estimations désignées par Erdős sous le nom de formules semi-asymptotiques.

2. *Entiers sans facteur carré et sans grand facteur premier*

2·1. Énoncés des résultats

Posons
$$\Psi_1(x,y) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)\leqslant y}} \mu(n)^2.$$

On note encore $\zeta_1(s,y) := \prod_{p\leqslant y}(1+1/p^s)$, $\varphi(s,y) := \sum_{p\leqslant y}\log(1+1/p^s)$ $(\sigma := \Re e\, s>0)$, et $\varphi^{(j)}(s,y) := \mathrm{d}^j\varphi(s,y)/\,\mathrm{d}s^j$. Nous réservons également la lettre ϑ pour désigner la fonction de Tchébychev. Pour $x\geqslant 2$, $y\geqslant 2$, $\vartheta(y)>2\log x$, on désigne par $\alpha=\alpha(x,y)$ l'unique solution positive de l'équation

$$-\varphi'(\alpha,y)=\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{1+p^\alpha}=\log x. \tag{2·1}$$

Nous posons $\sigma_j := \big|\varphi^{(j)}(\alpha,y)\big|$ $(j\geqslant 1)$.

Nous désignons par
$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
la fonction de répartition décroissante de la loi de Gauss et nous posons

$$G(z) := \mathrm{e}^{z^2/2}\Phi(z) \qquad (z\in\mathbb{R}). \tag{2·2}$$

On a $G(z)=\frac12+O(z)$ quand $z\to 0$. Lorsque $z\to\infty$, des intégrations par parties successives fournissent un développement asymptotique : à l'ordre deux, on obtient

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}z}\Big\{1-\frac{1}{z^2}+O\Big(\frac{1}{z^4}\Big)\Big\} \qquad (z\geqslant 1). \tag{2·3}$$

Nous convenons que dans tout ce paragraphe la lettre κ, avec ou sans indice, désigne une constante positive absolue.

Nous posons systématiquement, dans tout le paragraphe 2,

$$u := \frac{\log x}{\log y} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2). \tag{2·4}$$

Théorème 2.1. *On a*

$$\Psi_1(x,y)=x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)G\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big)\Big\{1+O\Big(\frac1u\Big)\Big\} \tag{2·5}$$

uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$ tels que $\vartheta(y)>2\log x$.

L'estimation (2·5) peut bien entendu être considérée comme une assertion relative à la répartition des diviseurs de $N_y := \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$. C'est d'ailleurs cette interprétation qui nous permet de restreindre *a priori* l'étude de $\Psi_1(x,y)$ au cas $\vartheta(y)>2\log x$, c'est-à-dire $x<\sqrt{N_y}$: le cas complémentaire s'y ramène en faisant appel à la symétrie de diviseurs de N_y. Nous ferons plus loin un usage essentiel de cette remarque.

L'apparition de la fonction G dans une formule asymptotique issue de la méthode du col est inhabituelle dans un cadre arithmétique. Dans le cas de la fonction $\Psi(x,y)$,[6] par exemple, l'analogue de la quantité $\alpha\sqrt{\sigma_2}$ est toujours $\gg \min(y,\log x)/\log y$ et l'erreur commise en remplaçant $G(z)$ par le terme principal de (2·3) dans la formule finale est englobée par le terme d'erreur. Ici, au contraire, le facteur impliquant G est nécessaire dès que l'on a, pour une constante absolue convenable c dans $]0,\frac12[$,

$$N_y^{(1/2)-c} \leqslant x < N_y^{1/2}.$$

En insérant dans (2·5) les estimations (2·17), (2·18) pour α et (2·20) pour σ_2, énoncées et établies au paragraphe suivant, on peut obtenir des évaluations explicites de $\Psi_1(x,y)$. Des formules asymptotiques de ce type sont établies dans [**12**][7] pour $(\log x)^{1+\varepsilon} < y \leqslant x^{1/(\log_2 x)^2}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire et fixé, et, par une méthode différente, dans [**11**] pour $(\log x)^{2+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$. Les mêmes travaux contiennent également des estimations uniformes du rapport $\Psi_1(x,y)/\Psi(x,y)$, dont une forme affaiblie est

$$\frac{\Psi_1(x,y)}{\Psi(x,y)} = \frac{1}{\zeta(\beta_1)} + o(1) \qquad (x \geqslant y \geqslant 2,\ x \to \infty), \tag{2·6}$$

avec $\beta_1 := \max\{1, 2\log(1+y/\log x)/\log y\}$. (Voir [**19**], exercice corrigé III.5.7, pour une preuve directe de ce résultat simplifié.) Nous donnons aux Corollaires 2.2 et 2.3 *infra* des conséquences explicites de (2·5) valables pour les « petites » valeurs de y, notamment celles pour lesquelles on ne disposait jusqu'à présent que de majorations de $\Psi_1(x,y)$. Cela permet, en particulier, de décrire quantitativement un changement de phase du comportement asymptotique de $\Psi_1(x,y)$ autour de $y = 2\log x$. Ces résultats, pourraient d'ailleurs être encore précisés ou étendus au prix de certaines complications des énoncés.

Le premier de nos deux corollaires est un théorème de grandes déviations qui mesure le caractère gaussien de la répartition des diviseurs de N_y et fournit ainsi une description probabiliste simple du changement de phase mentionné plus haut.

COROLLAIRE 2.2. *Soient* $y \geqslant 2$, $N_y = \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$, $D(y)^2 = \frac14\sum_{p\leqslant y}(\log p)^2$. *On a uniformément pour* $0 \leqslant z \ll \big(y/\log y\big)^{1/4}$ *et* $x = \sqrt{N_y}\,\mathrm{e}^{-zD(y)}$,

$$\Psi_1(x,y) = \tau(N_y,x) = 2^{\pi(y)}\Phi(z)\Big\{1 + O\Big(\frac{z^4+1}{u}\Big)\Big\}. \tag{2·7}$$

Remarque. Une estimation de même nature résulte d'un théorème effectif sur les grandes déviations dans le théorème de la limite centrale dû à Petrov et généralisant un résultat de Cramér. En appliquant le théorème VIII.2 de [**14**] aux variables aléatoires $(\xi_p\log p)/\log y$ avec $\mathbb{P}(\xi_p = \frac12) = \mathbb{P}(\xi_p = -\frac12) = \frac12$, on obtient pour $z \geqslant 0$, $k := \pi(y)$, $z = o(\sqrt{k})$, $x = \sqrt{N_y}\,\mathrm{e}^{-zD(y)}$

$$\Psi_1(x,y) = 2^{\pi(y)}\Phi(z)\mathrm{e}^{\left(z^3/\sqrt{k}\right)g_y\left(z/\sqrt{k}\right)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1+z}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}. \tag{2·8}$$

6. Voir [**10**].
7. Voir [**13**] pour une présentation détaillée.

Ici, $g_y(v) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,y} v^j$ où $\{a_{j,y}\}_{j=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes satisfaisant à $|a_{j,y}| \leqslant A^j$ $(j \geqslant 1)$ pour une constante convenable A indépendante de y, et $a_{1,y} \asymp 1$. La formule (2·5), qui est valable sans restriction sur $z \geqslant 0$, est toujours plus précise que (2·8). Dans le domaine considéré au Corollaire 2.2, on a $k = \pi(y) \asymp u$. Le théorème de Petrov fournit donc lorsque $z \ll u^{1/4}$

$$\Psi_1(x,y) = 2^{\pi(y)}\Phi(z)\Big\{1 + O\Big(\frac{1+z}{\sqrt{u}} + \frac{z^4}{u}\Big)\Big\}. \tag{2·9}$$

Cette évaluation est moins précise que (2·7) dans le domaine considéré.

Le second corollaire est une formule asymptotique pour

$$\log\big\{\tau(N_y,x)/\tau(N_y)\big\} = \log\big\{\Psi_1(x,y)/2^{\pi(y)}\big\}$$

dans un domaine plus large. Nous posons

$$\gamma(v) := \frac{1}{\log 2}\Big\{\frac{v}{\mathrm{e}^v+1} + \log(1+\mathrm{e}^{-v})\Big\} = E\Big(\frac{1}{1+\mathrm{e}^v}\Big).$$

Corollaire 2.3. *Soient $y \geqslant 2$, $N_y = \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$, x satisfaisant à $2\log x < \vartheta(y) \leqslant (\log x)^3$ et $v := \log\big(\{\vartheta(y)/\log x\} - 1\big) > 0$. On a*

$$\Psi_1(x,y) = 2^{\pi(y)\gamma(v)\{1+O((v+1)/\log y)\}}.$$

Pour la commodité du lecteur, nous mentionnons que, dans le domaine non couvert par cet énoncé, disons $y \gg (\log x)^3$, une formule asymptotique pour $\log\Psi_1(x,y)$ résulte immédiatement de (2·6) et d'évaluations uniformes classiques pour $\log\Psi(x,y)$, par exemple [**18**], théorème III.5.2.

À l'instar de la plupart des estimations issues de la méthode du col, le Théorème 2.1 fournit comme application spécifique une formule semi-asymptotique pour la fonction $x \mapsto \Psi_1(x,y)$.

Corollaire 2.4. *On a, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$ tels que $\vartheta(y) > 2\log(cx)$ et $1 \leqslant c \leqslant y$,*

$$\Psi_1(cx,y) = c^{\alpha}\Psi_1(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{u}}\Big)\Big\}. \tag{2·10}$$

La méthode fournit également de bonnes estimations dans le cas des intervalles courts.

Théorème 2.5. *Soit $\varepsilon > 0$. On a, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $z \geqslant 1$, tels que $\vartheta(y) > 2\log(x + x/z)$,*

$$\begin{aligned}\Psi_1\Big(x+\frac{x}{z},y\Big) &- \Psi_1(x,y)\\ &= \Psi_1(x,y)\left\{\frac{1+O\big(1/z+1/u\big)}{z\sqrt{2\pi\sigma_2}G\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big)} + O\Big(\frac{1+\alpha\log y}{\mathrm{e}^{\kappa_3 u/(\log 2u)^2}} + \frac{1}{Y_\varepsilon}\Big)\right\}\end{aligned} \tag{2·11}$$

Le corollaire suivant est le résultat dont nous aurons besoin pour la minoration de Λ_k^*. La symétrie des diviseurs de $N_y := \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$ nous permet d'obtenir une estimation valable sans condition sur le couple (x,y). La démonstration utilise l'estimation analogue de Hildebrand [**8**] pour $\Psi(x,y)$.

COROLLAIRE 2.6. *Soit* $\kappa \geqslant 1$. *On a uniformément sous les conditions* $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, $1 \leqslant z \leqslant \min\{x, y^\kappa\}$,

$$\Psi_1(x + x/z, y) - \Psi_1(x, y) \ll \Psi_1(x, y)/z. \tag{2·12}$$

Remarque. Il n'est pas exclu que la méthode de Hildebrand dans [**9**] puisse être appliquée directement pour montrer qu'il existe une constante y_0 telle que, pour $x \geqslant y \geqslant y_0$ et $c \geqslant 1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}$, on ait

$$\Psi_1(cx, y) \leqslant c\Psi_1(x, y). \tag{2·13}$$

On peut, en effet, établir assez facilement la validité de (2·13) sous les conditions supplémentaires $y \leqslant x \leqslant y^2$, $c \leqslant 4$. Cependant, des difficultés techniques importantes apparaissent lorsqu'on essaie d'obtenir le cas général en faisant appel à l'équation fonctionnelle

$$\Psi_1(x, y) \log x - \int_1^x \Psi_1(t, y) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p \leqslant y} \Psi_p(x/p, y) \log p \tag{2·14}$$

où l'on a posé

$$\Psi_p(z, y) := \sum_{\substack{n \leqslant z,\, p \nmid n \\ P^+(n) \leqslant y}} \mu(n)^2.$$

2·2. *Évaluation de* $\boldsymbol{\alpha(x, y)}$

Nous observons d'abord que l'existence de la solution $\alpha = \alpha(x, y)$ à (2·1) résulte immédiatement de la décroissance de $-\varphi'(\sigma, y)$ en tant que fonction de σ et des relations $-\varphi'(0, y) = \frac{1}{2}\vartheta(y)$, $-\varphi'(1, y) < \log x$ ($x \geqslant x_0$, $x \geqslant y \geqslant 2$).(8) On a donc pour ces mêmes valeurs de x et y

$$0 < \alpha(x, y) < 1.$$

Nous posons

$$L_\varepsilon(y) := \mathrm{e}^{(\log y)^{(3/5)-\varepsilon}}, \quad Y_\varepsilon := \mathrm{e}^{(\log y)^{(3/2)-\varepsilon}}. \tag{2·15}$$

Le résultat suivant est établi par sommation d'Abel à partir d'une forme forte du théorème des nombres premiers comme dans [**10**] (lemme 13). Nous omettons les détails.

LEMME 2.7. *On a*

$$-\varphi'(\sigma, y) = \frac{y^{1-\sigma} - 1}{(1 + y^{-\sigma})(1 - \sigma)} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} + O(1) \tag{2·16}$$

uniformément pour $0 < \sigma < 2$. *De plus, pour tous* $\varepsilon > 0$, $\sigma_0 > 0$, *le terme d'erreur* $O(1/\log y)$ *peut être remplacé par* $O\big(1/L_\varepsilon(y)\big)$ *lorsque* $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Nous rassemblons nos évaluations pour $\alpha(x, y)$ dans l'énoncé suivant. Nous faisons un usage systématique de la notation (2·4). Nous utilisons également la fonction $\xi(t)$, définie sur $[1, \infty[$ comme l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^\xi = 1 + t\xi$ si $t > 1$ et prolongée par continuité en $t = 1$ — de sorte que $\xi(1) = 0$.

8. Cette dernière relation résulte de la formule bien connue
$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p - 1} = \log y - \gamma + o(1) \qquad (y \to \infty).$$

Lemme 2.8. *Soient $\varepsilon > 0$ et $x \geqslant x_0(\varepsilon)$.*

(i) Si $(\log x)^{1+\varepsilon} < y \leqslant x$, on a

$$\alpha = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\Big(\frac{1}{u(\log y)^2} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\Big). \tag{2·17}$$

(ii) Si $2\log x < \vartheta(y) \leqslant (\log x)^3$, on a

$$\alpha = \frac{\{1 + O(1/\log y)\}}{\log y} \log\Big(\frac{\vartheta(y)}{\log x} - 1\Big). \tag{2·18}$$

Démonstration. La relation (2·17) est établie, à partir de (2·16), de manière identique à l'évaluation (7·8) de [**10**]. Nous renvoyons le lecteur à [**10**] pour les détails des calculs.

Pour montrer (2·18), nous observons d'abord qu'au vu de (2·16) on a nécessairement, sous les hypothèses effectuées,

$$y^{1-\alpha} \asymp \log x.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\log x - \frac{\vartheta(y)}{1+y^\alpha} &= \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p(y^\alpha - p^\alpha)}{(1+p^\alpha)(1+y^\alpha)}\\ &\ll \alpha y^{1-\alpha} \ll \alpha \log x.\end{aligned}$$

Désignant par β la solution de

$$\frac{\vartheta(y)}{1+y^\beta} = \log x,$$

on en déduit

$$|\alpha-\beta| \log x \log y \ll \frac{\vartheta(y)|y^\alpha - y^\beta|}{(1+y^\alpha)(1+y^\beta)} \ll \alpha \log x.$$

Cela fournit bien (2·18). □

2·3. Estimations préliminaires à l'emploi de la méthode du col

Lemme 2.9. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $\vartheta(y) > 2\log x$,*

$$\varphi^{(k)}(\alpha, y) \ll u(\log y)^k. \tag{2·19}$$

Lorsque $k = 3$, on peut multiplier le membre de droite par $\min(1, \alpha\log y)$. De plus, lorsque $k = 2$ on peut remplacer le signe $\ll$ par $\asymp$. Plus précisément

$$\varphi''(\alpha, y) = \frac{w-1}{w} \log x \log y \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \tag{2·20}$$

où l'on a posé $w := \vartheta(y)/\log x$.

Démonstration. Observons d'abord que l'on a, en vertu de (2·16),

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{1+p^\alpha}\asymp\frac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\asymp\log x \tag{2·21}$$

uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$, $\vartheta(y)>2\log x$. On remarque ensuite que

$$(-1)^k\varphi^{(k)}(\alpha,y)=\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^kQ_{k-1}(p^\alpha)}{(1+p^\alpha)^k}$$

où Q_{k-1} est un polynôme de degré $k-1$ de terme dominant positif. On note que $Q_0(X)=1$, $Q_1(X)=X$. La majoration (2·19) découle donc du théorème des nombres premiers et de (2·21). L'assertion relative au cas $k=3$ résulte aisément du fait que $Q_2(X)=X(X-1)$; nous omettons les détails.

Pour établir (2·20), on montre d'abord, en appliquant le théorème des nombres premiers comme dans la preuve de (2·16), que l'on a

$$\varphi''(\sigma,y)=\frac{(y^{1-\sigma}-1)\log y}{(1+y^{-\sigma})^2(1-\sigma)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}+O(1)$$

uniformément pour $\sigma>0$. Compte tenu de la définition de α, il suit

$$\varphi''(\alpha,y)=\frac{\log x\log y}{1+y^{-\alpha}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}+O(1).$$

On conclut en évaluant $1+y^{-\alpha}$ par (2·17) et (2·18). □

LEMME 2.10. *Soient $x\geqslant y\geqslant 2$ tels que $\vartheta(y)>2\log x$ et $s=\alpha(x,y)+i\tau$ avec $\tau\in\mathbb{R}$.*

(i) Si $|\tau|\leqslant 1/\log y$, on a

$$\Big|\frac{\zeta_1(s,y)}{\zeta_1(\alpha,y)}\Big|\leqslant \mathrm{e}^{-\kappa_0u(\tau\log y)^2} \tag{2·22}$$

(ii) Si $\varepsilon>0$ est fixé et si $y>y_0(\varepsilon)$, $1/\log y<|\tau|\leqslant Y_\varepsilon$, on a

$$\Big|\frac{\zeta_1(s,y)}{\zeta_1(\alpha,y)}\Big|\leqslant \mathrm{e}^{-\kappa_0u\tau^2/\{(1-\alpha)^2+\tau^2\}}. \tag{2·23}$$

Démonstration. On a pour tout nombre premier p

$$\Big|\frac{1+p^{-s}}{1+p^{-\alpha}}\Big|=\Big|1-\frac{2\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p^\alpha(1+p^{-\alpha})^2}\Big|^{-1/2}\leqslant\exp\Big\{-\frac{1-\cos(\tau\log p)}{2(1+p^\alpha)}\Big\}.$$

Les estimations annoncées peuvent être établies, comme au lemme 8 de [**10**], en formant le produit sur $p\leqslant y$ de cette inégalité et en faisant appel aux estimations classiques de Vinogradov–Korobov concernant les sommes d'exponentielles sur des nombres premiers. Nous omettons les détails qui sont très voisins de ceux de [**10**]. □

Lemme 2.11. *Soit $\varepsilon > 0$. On a, uniformément pour tous nombres réels x, y, z tels que $x \geqslant y \geqslant 2$, $\vartheta(y) > 2\log x$, et $z \in [1, Y_\varepsilon]$*

$$\Psi_1(x + x/z, y) - \Psi_1(x, y) \ll x^\alpha \zeta_1(\alpha, y)\big\{1/z + \mathrm{e}^{-\kappa_1 u}\big\}. \tag{2·24}$$

Démonstration. Introduisons la fonction de poids

$$w_z(t) := \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin tz/2}{tz/2}\Big)^2.$$

Le membre de gauche de (2·24) est

$$\ll \sum_{P^+(n)\leqslant y} \mu(n)^2 \Big(\frac{x}{n}\Big)^\alpha w_z\Big(\log\frac{x}{n}\Big) = \frac{1}{2\pi iz}\int_{\alpha - iz}^{\alpha+iz} \zeta_1(s, y) x^s (1 - |\tau/z|)\,\mathrm{d}s.$$

En majorant $|\zeta_1(s, y)|$ par $\zeta_1(\alpha, y)$ lorsque $|\tau| \leqslant 1$ et par $\zeta_1(\alpha, y)\mathrm{e}^{-\kappa_1 u}$, grâce à (2·23), lorsque $1 \leqslant |\tau| \leqslant Y_\varepsilon$, on obtient bien l'estimation annoncée. □

2·4. Preuve du Théorème 2.1

Lorsque

$$u \leqslant (\log_2 y)^5, \tag{2·25}$$

nous pouvons faire appel au théorème 1 de [**11**] qui fournit

$$\Psi_1(x, y) = \frac{6}{\pi^2}\Psi(x, y)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Le terme d'erreur de cette formule est donc $\ll \mathrm{e}^{-\frac12 u^{1/5}}$. De plus, on a dans le même domaine, d'après le théorème 1 de [**10**],

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\beta \zeta(\beta, y)}{\beta\sqrt{2\pi\varphi_2(\beta, y)}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\} \tag{2·26}$$

où $\zeta(s, y) := \prod_{p\leqslant y}(1 - 1/p^s)^{-1}$, $\beta = \beta(x, y)$ est la solution réelle de l'équation

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\zeta(s, y) = \sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\beta - 1} = \log x,$$

et où l'on a posé

$$\varphi_2(\beta, y) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\log\zeta(\beta, y).$$

Il découle de la formule (7·8) de [**10**] et du Lemme 2.8(i) que

$$\beta = \alpha\{1 + O\big(1/u(\log y)^2\big)\}.$$

On en déduit facilement que

$$\sigma_2 = \varphi_2(\beta, y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u(\log y)^2}\Big)\Big\},$$

$$x^\beta\zeta(\beta, y) = x^\alpha\zeta(\alpha, y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u(\log y)^2}\Big)\Big\} = \frac{\pi^2}{6}x^\alpha\zeta_1(\alpha, y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u(\log y)^2}\Big)\Big\}.$$

En reportant dans (2·26) et en tenant compte de l'évaluation (2·3), on obtient bien (2·5) sous la condition (2·25).

Considérons ensuite le cas

$$u > (\log_2 y)^5. \tag{2·27}$$

Nous déduirons le résultat annoncé de la conjonction des deux énoncés suivants.

PROPOSITION 2.12. *Soit $\varepsilon\in]0,1[$. On a, uniformément pour tous nombres réels x, y tels que $x\geqslant y\geqslant 2$, $\vartheta(y)>2\log x$,*

$$\Psi_1(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}\zeta_1(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}+O\big(x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)E\big),\tag{2·28}$$

avec $E:=\mathrm{e}^{-\kappa_2u/(\log u)^2}+1/Y_\varepsilon$.

PROPOSITION 2.13. *On a, uniformément pour tous nombres réels x, y tels que $x\geqslant y\geqslant 2$, $\vartheta(y)>2\log x$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}\zeta_1(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}=x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)G\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}.\tag{2·29}$$

Avant de démontrer ces résultats, vérifions qu'ils impliquent bien (2·5) sous la condition (2·27). Il suffit de montrer que le terme d'erreur de (2·28) est absorbé par celui de (2·5). Or, on a d'après (2·3) et (2·19)

$$G\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big)\asymp\frac{1}{1+\alpha\sqrt{\sigma_2}}\gg\frac{1}{\sqrt{u}\log y}$$

alors que, sous les conditions (2·27) et $\vartheta(y)>2\log x$, le terme d'erreur E de (2·28) satisfait, par exemple,

$$E\ll\frac{\mathrm{e}^{-(\log u)^{4/3}}}{\log y}.$$

Ces estimations sont amplement suffisantes pour notre objectif.

Démonstration de la Proposition 2.12. Nous procédons comme au lemme 10 de [**10**] et, en conséquence, nous nous contentons d'indications succinctes.

La formule de Perron effective permet d'écrire

$$\Psi_1(x,y)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\zeta_1(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\ll x^\alpha\sum_{P^+(n)\leqslant y}\frac{\mu(n)^2}{n^\alpha\{1+T|\log(x/n)|\}}.$$

En choisissant $T=1/E^2$ et en appliquant le Lemme 2.11, on obtient immédiatement que le membre de droite est $\ll x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)E$. On majore ensuite la contribution du domaine $1/\log y<|\tau|\leqslant T$ à l'intégrale de Perron en utilisant le Lemme 2.10 et la relation $1-\alpha\asymp\xi(u)/\log y$ qui découle du Lemme 2.8. □

Démonstration de la Proposition 2.13. Observons d'abord que le terme principal de (2·29) satisfait à

$$x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)G\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big)\asymp\frac{x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)}{1+\alpha\sqrt{\sigma_2}}\asymp\frac{x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)}{1+\alpha\sqrt{u}\log y}.\tag{2·30}$$

Posons $T_0 := u^{-1/3}/\log y$. Le Lemme 2.10(i) permet d'estimer la contribution au membre de gauche de (2·29) des nombres réels τ tels que $T_0 < |\tau| \leqslant 1/\log y$. Elle est

$$\ll x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) \int_{T_0}^{1/\log y} \mathrm{e}^{-\kappa_0 u(\tau \log y)^2} \frac{\mathrm{d}\tau}{\alpha + \tau} \ll \frac{x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) \mathrm{e}^{-\kappa_0 u^{1/3}}}{u^{-1/3} + \alpha \log y}.$$

Par (2·30), cette contribution est donc englobée par le terme d'erreur de (2·29).

Comme $T_0^j \sigma_j \ll 1$ pour $j = 3$, 4 et comme $\left|\varphi^{(4)}(\alpha + i\tau, y)\right| \ll \sigma_4^* := u(\log y)^4$ pour $|\tau| \leqslant 1/\log y$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iT_0}^{\alpha + iT_0} \zeta_1(s, y) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} &= \frac{x^\alpha \zeta_1(\alpha, y)}{2\pi} \int_{-T_0}^{T_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2 + \frac{1}{6} i \tau^3 \sigma_3 + O(\tau^4 \sigma_4^*)} \frac{\mathrm{d}\tau}{s} \\ &= \frac{x^\alpha \zeta_1(\alpha, y)}{2\pi} \{J_2 + \tfrac{1}{6} i J_3 + O(V)\} \end{aligned} \tag{2·31}$$

avec

$$\begin{aligned} J_2 &:= \int_{-T_0}^{T_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2} \frac{\mathrm{d}\tau}{s}, \quad J_3 := \sigma_3 \int_{-T_0}^{T_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2} \tau^3 \frac{\mathrm{d}\tau}{s}, \\ V &:= \int_{-T_0}^{T_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2} \{\tau^6 \sigma_3^2 + \tau^4 \sigma_4^*\} \frac{\mathrm{d}\tau}{|s|}. \end{aligned}$$

Montrons d'abord que V n'induit qu'une contribution au terme résiduel de (2·29). En effectuant le changement de variables $\tau = v/\sqrt{\sigma_2}$, on obtient en effet

$$\begin{aligned} V &\ll \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} \Big(\frac{v^6 \sigma_3^2}{\sigma_2^3} + \frac{v^4 \sigma_4^*}{\sigma_2^2} \Big) \frac{\mathrm{d}v}{\alpha\sqrt{\sigma_2} + v} \\ &\ll \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} v^4 (1 + v^2) \frac{\mathrm{d}v}{u\big(\alpha\sqrt{\sigma_2} + v\big)} \ll \frac{1}{u\big(1 + \alpha\sqrt{\sigma_2}\big)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la symétrie de l'intégrale pour établir que la même majoration est valable pour J_3. En effet,

$$\begin{aligned} J_3 &= -2i\sigma_3 \int_0^{T_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2} \tau^4 \frac{\mathrm{d}\tau}{\alpha^2 + \tau^2} \\ &\ll \frac{\min(1, \alpha \log y)}{\sqrt{u}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{v^4 \, \mathrm{d}v}{\alpha^2 \sigma_2 + v^2} \\ &\ll \frac{\alpha \log y}{\alpha\sqrt{u\sigma_2}(1 + \alpha\sqrt{\sigma_2})} \ll \frac{1}{u\big(1 + \alpha\sqrt{\sigma_2}\big)}. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer J_2. Posons $m := \alpha\sqrt{\sigma_2}$. On a

$$J_2 = 2\alpha \int_0^{T_0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau^2 \sigma_2} \, \mathrm{d}\tau}{\alpha^2 + \tau^2} = G_0\big(m^2\big) - 2 \int_{T_0/\alpha}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-m^2 t^2/2} \, \mathrm{d}t}{1 + t^2} \tag{2·32}$$

avec $G_0(v) := 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-vt^2/2} \, \mathrm{d}t/(1 + t^2)$. Comme $m^2 T_0^2/\alpha^2 \asymp u^{1/3}$, la dernière intégrale du membre de droite de (2·32) est négligeable. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\big(\mathrm{e}^{-v/2} G_0(v)\big) = -\mathrm{e}^{-v/2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-vt^2/2} \, \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-v/2} \sqrt{\frac{\pi}{2v}},$$

d'où

$$G_0(v) = \mathrm{e}^{v/2}\int_v^\infty \mathrm{e}^{-t/2}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{e}^{v/2}\Phi\big(\sqrt{v}\big) = 2\pi G\big(\sqrt{v}\big). \tag{2·33}$$

En reportant dans (2·32) puis (2·31), on obtient bien (2·29). □

2·5. Preuve des Corollaires 2.2 et 2.3

Preuve du Corollaire 2.2. Dans le domaine considéré on a

$$\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\alpha}\big\{\sigma^3|\varphi'''(\sigma,y)| + \sigma^4|\varphi^{(4)}(\sigma,y)|\big\} \ll \alpha^4 u(\log y)^4.$$

En estimant $\varphi(0,y)$ par un développement de Taylor à l'ordre 4 en $\sigma=\alpha$, on obtient

$$\varphi(\alpha,y) - \varphi(0,y) - \alpha\varphi'(\alpha,y) + \tfrac12\alpha^2\varphi''(\alpha,y) \ll u(\alpha\log y)^4.$$

Par (2·18) on a encore

$$\alpha\log y \asymp zD(y)/\log x \asymp z/\sqrt{u},$$

alors que $z^4 \ll u$ par hypothèse. En reportant dans (2·5), il suit donc

$$\tau(N_y,x) = \tau(N_y)\Phi(z_1)\Big\{1+O\Big(\frac{z^4+1}{u}\Big)\Big\}$$

avec $z_1 := \alpha\sqrt{\sigma_2}$.

Comparons z à z_1. On a

$$\begin{aligned}\vartheta(y) - 2\log x = 2\varphi'(\alpha,y) - 2\varphi'(0,y) &= 2\alpha\sigma_2 + O(\alpha^3 u(\log y)^4)\\ &= 2\alpha\sqrt{\sigma_2}D(y) + O(\alpha^3 u(\log y)^4).\end{aligned}$$

On en déduit que $z_1 = z + O(z^3/u)$, d'où

$$\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z)}{\Phi(z)} \ll (1+z)|z-z_1| \ll \frac{1+z^4}{u}.$$

□

Preuve du Corollaire 2.3. La formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha,y) - \varphi(0,y) - \alpha\varphi'(\alpha,y) &= -\int_0^\alpha t\varphi''(t,y)\,\mathrm{d}t\\ &= -(\log 2)\sum_{p\leqslant y}\int_0^\alpha (\log p)\gamma'(t\log p)\,\mathrm{d}t\\ &= -(\log 2)\pi(y) + (\log 2)\sum_{p\leqslant y}\gamma(\alpha\log p).\end{aligned}$$

En reportant dans (2·5), nous en en déduisons

$$\tau(N_y,x)=\exp\Big\{\sum_{p\leqslant y}\gamma(\alpha\log p)\Big\}G(\alpha\sqrt{\sigma_2})\big\{1+O(1/u)\big\}. \tag{2·34}$$

Maintenant, on a par sommation d'Abel

$$\sum_{p\leqslant y}\gamma(\alpha\log p)=\pi(y)\gamma(\alpha\log y)-\alpha\int_2^y\gamma'(\alpha\log t)\frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\gamma'(v)\ll v\mathrm{e}^{-v}$ et, par (2·18), $\alpha=v\{1+O(1/\log y)\}/\log y$, une majoration de type Tchébychev permet d'estimer le second terme :

$$\alpha\int_2^y\gamma'(\alpha\log t)\frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ll\alpha^2\int_2^y t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t\ll\pi(y)v\gamma(v)/\log y.$$

Il découle également de (2·18) que

$$\gamma(\alpha\log y)=\gamma(v)\{1+O(v/\log y)\}.$$

L'estimation $G(z)\asymp 1/(1+z)$ $(z\geqslant 0)$ fournissant $G(\alpha\sqrt{\sigma_2})=\mathrm{e}^{O(\log y)}$, la démonstration du Corollaire est complète. □

2·6. Preuve du Corollaire 2.4

La variable y étant fixée, $y\geqslant 2$, nous pouvons écrire, en vertu de (2·5),

$$\Psi_1(y^u,y)=\mathrm{e}^{f(u)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}$$

pour tout nombre réel u tel que $1\leqslant u<\frac12\vartheta(y)/\log y$, avec

$$\begin{aligned}&f(u):=\alpha_u u\log y+\varphi(\alpha,y)+g\big(\alpha\sqrt{\sigma_2}\big),\quad \alpha_u:=\alpha(y^u,y),\\ &g(z):=\log G(z)=\tfrac12 z^2+\log\Phi(z).\end{aligned}$$

La formule (2·10) équivaut alors à

$$f(u+t)-f(u)=t\alpha_u\log y+O(1/\sqrt{u})\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

et il nous suffit donc d'établir que l'on a

$$f'(u)=\alpha_u\log y+O(1/\sqrt{u}),\qquad f''(u)\ll 1/u\qquad(u\geqslant 1). \tag{2·35}$$

Pour établir (2·35), nous observons d'abord que la relation $u\log y+\varphi(\alpha_u,y)=0$ fournit par dérivation

$$\alpha_u'=-\frac{\log y}{\sigma_2}\asymp\frac{-1}{u\log y},\quad \alpha_u''=\frac{(\alpha_u')^2\sigma_3}{\sigma_2}\ll\frac{1}{u^2\log y},$$

et donc, posant $\lambda_u := \alpha_u\sqrt{\sigma_2}$

$$\begin{aligned}\lambda'_u &= \alpha'_u\sqrt{\sigma_2}\Big\{1-\frac{\alpha_u\sigma_3}{2\sigma_2}\Big\} \ll \frac{1+\alpha_u\log y}{\sqrt{u}},\\ \lambda''_u &= \Big\{\alpha''_u\sqrt{\sigma_2}-\frac{(\alpha'_u)^2\sigma_3}{2\sqrt{\sigma_2}}\Big\}\Big\{1-\frac{\alpha_u\sigma_3}{2\sigma_2}\Big\}+\frac{(\alpha'_u)^2}{2\sqrt{\sigma_2}}\Big\{\alpha_u\sigma_4^*-\sigma_3-\frac{\alpha_u\sigma_3^2}{\sigma_2}\Big\}\\ &\ll \frac{1+\alpha_u\log y}{u^{3/2}}.\end{aligned}$$

Nous notons ensuite que la formule (2·3) implique

$$g'(z) \ll \frac{1}{1+z}, \quad g''(z) \ll \frac{1}{1+z^2} \qquad (z \geqslant 0). \tag{2·36}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}f'(u) &= \alpha'_u u\log y+\alpha_u\log y-\alpha'_u\sigma_1+\lambda'_u g'(\lambda_u)\\ &= \alpha_u\log y+O\Big(\frac{1+\alpha_u\log y}{\sqrt{u}\big(1+\alpha_u\sqrt{\sigma_2}\big)}\Big) = \alpha_u\log y+O\Big(\frac{1}{\sqrt{u}}\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f''(u) &= \alpha'_u\log y+\lambda''_u g'(\lambda_u)+(\lambda'_u)^2 g''(\lambda_u)\\ &\ll \frac{1}{u}+\frac{1+\alpha_u\log y}{u^{3/2}\big(1+\alpha_u\sqrt{\sigma_2}\big)}+\frac{1+\alpha_u^2(\log y)^2}{u\big(1+\alpha_u^2\sigma_2\big)} \ll \frac{1}{u}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du Corollaire 2.4. □

2·7. Preuve du Théorème 2.5

La proposition suivante peut être établie de manière semblable à la Proposition 2.13, avec en fait des calculs plus simples. Nous en omettons la démonstration.

Proposition 2.14. *On a, uniformément pour tous nombres réels x, y tels que $x \geqslant y \geqslant 2$, $\vartheta(y) > 2\log x$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}\zeta_1(s,y)x^s\,\mathrm{d}s = \frac{x^\alpha\zeta_1(\alpha,y)}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}. \tag{2·37}$$

De plus la même estimation vaut pour

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}|\zeta_1(s,y)x^s|\,|\mathrm{d}s|.$$

Posons $x_1 := x+x/z$, et $\alpha_1 := \alpha(x_1,y)$. Comme on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{x\varphi''(\alpha,y)} \asymp \frac{-1}{xu(\log y)^2}$$

d'après le Lemme 2.9, on voit que

$$0 \leqslant \alpha-\alpha_1 \ll \frac{1}{u(\log y)^2} \tag{2·38}$$

et donc, pour tout $\sigma \in [\alpha, \alpha_1]$

$$x_1^\sigma |\zeta_1(\sigma + i\tau, y)| \asymp x^\alpha |\zeta_1(\alpha + i\tau, y)|. \tag{2·39}$$

Cette estimation, appliquée avec $\tau = 0$, nous permet en particulier, grâce à la Proposition 2.12, d'obtenir

$$\Psi_1(x_1, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 - i/\log y}^{\alpha_1 + i/\log y} \zeta_1(s, y) x_1^s \, \mathrm{d}s + O\big(x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) E\big) \tag{2·40}$$

avec $E := \mathrm{e}^{-\kappa_2 u/(\log 2u)^2} + 1/Y_\varepsilon$. D'après (2·38) et (2·39), on voit par une application immédiate du théorème des résidus que l'erreur commise en remplaçant α_1 par α dans le terme principal de (2·40) est

$$\ll \frac{x^\alpha |\zeta_1(\alpha + i/\log y, y)|(\alpha - \alpha_1)}{\alpha + 1/\log y} \ll \frac{x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) \mathrm{e}^{-\kappa_0 u}}{\log y}$$

où nous avons utilisé (2·23). Cette dernière majoration est d'un ordre inférieur à celle du terme d'erreur de (2·40), quitte à modifier convenablement la valeur de κ_2. Nous obtenons donc

$$\Psi_1(x_1, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta_1(s, y) x_1^s \, \mathrm{d}s + O\big(x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) E\big),$$

et, en effectuant la différence avec (2·28), nous obtenons

$$\begin{aligned}\Psi_1\Big(x + \frac{x}{z}, y\Big) &- \Psi_1(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta_1(s, y) x^s \Big\{\frac{(1 + 1/z)^s - 1}{s}\Big\} \, \mathrm{d}s + O\big(x^\alpha \zeta_1(\alpha, y) E\big).\end{aligned}$$

Compte tenu de (2·3) et du Théorème 2.1, on voit que le terme d'erreur est bien de l'ordre de celui de (2·11).

En utilisant le développement limité

$$(1 + 1/z)^s - 1 = s/z + O\big(|s|/z^2\big),$$

nous pouvons estimer le terme principal par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i z} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta_1(s, y) x^s \, \mathrm{d}s + O\Big(\frac{1}{z^2} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} |\zeta_1(s, y) x^s| \, |\mathrm{d}s|\Big) \\ = \frac{x^\alpha \zeta_1(\alpha, y)}{z\sqrt{2\pi\sigma_2}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{u}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

d'après la Proposition 2.14. On conclut grâce au Théorème 2.1. $\square$

2·8. Preuve du Corollaire 2.6

Nous pouvons supposer $x \geqslant y$: dans le cas contraire le résultat découle immédiatement du fait que la densité de Schnirelmann des entiers sans facteurs carrés est strictement positive.(9)

Plusieurs cas sont à considérer. Lorsque $y > (\log x)^3$, nous avons, d'après le corollaire 2 de Hildebrand dans [**8**] et le théorème 1 de Ivić & Tenenbaum [**11**], pour $1 \leqslant z \leqslant \min\{x, y^\kappa\}$,

$$\Psi_1(x + x/z, y) - \Psi_1(x, y) \leqslant \Psi(x + x/z, y) - \Psi(x, y) \ll \frac{\Psi(x, y)}{z} \ll \frac{\Psi_1(x, y)}{z}.$$

Lorsque $y \leqslant (\log x)^3$ et $\vartheta(y) > 2\log(x + x/z)$, le Théorème 2.5 fournit l'estimation requise avec beaucoup de marge puisque l'on a alors $u \gg y^{1/3}/\log y$.

Soit $N_y := \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$. Lorsque $x \geqslant \sqrt{N_y}$, nous utilisons la symétrie de diviseurs de N_y autour de $\sqrt{N_y}$ sous la forme

$$\Psi_1(x + x/z, y) - \Psi_1(x, y) = \Psi_1(x_1, y) - \Psi_1(x_1 - x_1/z_1, y) \tag{2·41}$$

avec $x_1 := (N_y/x) - 0$, et $z_1 := z + 1$. D'après ce qui précède le membre de droite de (2·41) est

$$\ll \frac{\Psi_1(x_1, y)}{z_1} \ll \frac{\tau(N_y)}{z} \ll \frac{\Psi(x, y)}{z}.$$

Lorsque $x + x/z \geqslant \sqrt{N_y} > x$, nous appliquons les résultats établis jusqu'ici aux intervalles $]x, \sqrt{N_y}]$ et $]\sqrt{N_y}, x + x/z]$. Cela achève la démonstration. □

3. *Étude de* $\Lambda_k(d)$

3·1. Lemmes généraux relatifs à la fonction de diviseurs ; preuve du Théorème 1.3

LEMME 3.1. *Soit* $\lambda(\alpha) := \log\big(1 + 2^{-\alpha}\big)/\log 2$ $(\alpha > 0)$. *Alors on a*

$$\sum_{d \mid n} \tau(d)^{-\alpha} \leqslant \tau(n)^{\lambda(\alpha)} \qquad (n \geqslant 1). \tag{3·1}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (3·1) vaut

$$\prod_{p^\nu \| n} \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} (j+1)^{-\alpha}. \tag{3·2}$$

La majoration annoncée équivaut donc à la validité de l'inégalité

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} (j+1)^{-\alpha} \leqslant (\nu + 1)^{\lambda(\alpha)} \tag{3·3}$$

9. Cette densité vaut en fait exactement $\frac{53}{88}$, un résultat dû à K. Rogers [**17**].

pour chaque entier $\nu \geqslant 1$. Or, (3·3) est trivialement réalisée pour $\nu = 1$ et, en supposant la propriété réalisée jusqu'au rang ν, on a pour $\nu \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu+1} (j+1)^{-\alpha} &\leqslant (\nu+1)^{\lambda(\alpha)} + (\nu+2)^{-\alpha} \\ &= (\nu+2)^{\lambda(\alpha)}\Big\{\Big(\frac{\nu+1}{\nu+2}\Big)^{\lambda(\alpha)} + (\nu+2)^{-\alpha-\lambda(\alpha)}\Big\}.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\lambda(\alpha) + \alpha > 1$. Cela permet de montrer, par une étude standard, que le terme entre accolades est une fonction de $x = 1/(\nu+2)$ qui est décroissante puis croissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Comme cette fonction vaut 1 en $x = 0$ et en $x = \frac{1}{2}$, elle n'excède pas 1 sur $\big[0, \frac{1}{2}\big]$. Cela établit bien (3·3) et donc (3·1). □

Remarque. La démonstration précédente s'achève donc par la preuve, via une étude de fonction standard, de l'inégalité

$$(1-x)^{\lambda(\alpha)} + x^{\alpha+\lambda(\alpha)} \leqslant 1 \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1). \tag{3·4}$$

Mohan Nair (communication personnelle) a donné une intéressante explication relative à la valeur des exposants apparaissant dans (3·4). Cela repose sur l'observation générale suivante, également déduite d'un facile calcul de variations : pour tous $a > 1$, $0 < b < 1$, la fonction $F(x) := 1 - x^a - (1-x)^b$ possède dans l'intervalle $]0, 1[$ un unique zéro γ, et, de plus, on a $F(x) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \gamma$ alors que $F(x) \leqslant 0$ pour $\gamma \leqslant x \leqslant 1$. Dans le cas de notre application, le choix $a = \alpha + \lambda(\alpha)$, $b = \lambda(\alpha)$, impose $F\big(\frac{1}{2}\big) = 0$, d'où $\gamma = \frac{1}{2}$ et donc la conclusion.

Preuve du Théorème 1.3. Soit $\alpha > 0$. La quantité à majorer n'excède pas

$$\sum_{d|n} \frac{\tau(n)^{\alpha\beta}}{\tau(d)^{\alpha}} \leqslant \tau(n)^{\alpha\beta+\lambda(\alpha)}, \tag{3·5}$$

d'après (3·1).

En choisissant optimalement

$$\alpha := \frac{1}{\log 2} \log\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big), \tag{3·6}$$

on obtient bien (1·16). □

Remarque. Soit $D(x) := \sup_{m\leqslant x} \tau(m)$ $(x \geqslant 1)$. L'inégalité (3·1) fournit une preuve très simple de la majoration

$$\sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant n^{\beta}}} 1 \leqslant D(n)^{E(\beta)+o(1)} \qquad (0 \leqslant \beta < \tfrac{1}{2},\ n \to \infty) \tag{3·7}$$

établie par le premier auteur dans [**1**]. En effet, puisque $D(n^{\beta}) = D(n)^{\beta+o(1)}$, on peut majorer le membre de gauche de (3·7) par

$$\sum_{d|n} \frac{D(n)^{\alpha\beta+o(1)}}{\tau(d)^{\alpha}} \leqslant D(n)^{\alpha\beta+\lambda(\alpha)+o(1)},$$

d'après (3·1). On conclut comme précédemment en choisissant α égal au membre de droite de (3·6).

Nous aurons plusieurs fois l'occasion de faire appel au résultat suivant, qui fait l'objet du lemme 4 de [**6**].

LEMME 3.2 ([**6**]). *On a uniformément pour $\xi \geqslant 0$, $2^\xi \leqslant T$,*

$$\sum_{P^+(m)\leqslant T} \frac{\tau(m)^\xi}{m} \ll (1+\log T)^{2^\xi}. \tag{3·8}$$

3·2. Majoration de $\Lambda_k(d)$

Posons

$$\vartheta_k := 1/(\log_2 k).$$

Il sera également commode d'introduire le paramètre $h := \big[(\log k)/\log 2\big]$, de sorte que

$$2^h \leqslant k < 2^{h+1}, \qquad K = \mathrm{e}^{h\log h + O(h)}, \qquad K_j = \mathrm{e}^{h\log_{j+1} h + O(h)} \quad (j=1,2). \tag{3·9}$$

LEMME 3.3. *Soit $d < (KK_1)^{1/2}$ et $s \in]0,1[$ défini par $d = (KK_1)^{(1-s)/2}$. On a alors, pour une constante convenable $c > 0$,*

$$\Lambda_k(d) \ll \frac{k^{O(1)}}{K^{1+cs^2}}. \tag{3·10}$$

En particulier, tout entier d tel que $\Lambda_k(d) = \Lambda_k^*$ satisfait à

$$d > K^{\frac12 - e_k} \tag{3·11}$$

avec $e_k := c_1\sqrt{\log_3 k/\log_2 k}$ pour une constante positive convenable c_1.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \log d &= \tfrac12(1-s)h\{\log h + \log_2 h + O(1)\},\\ \log_2 d &= \log h + \log_2 h + \log(1-s) + O(1),\\ \frac{\log d}{\log_2 d} &= \tfrac12(1-s)h + O\Big(\frac{h}{\log h}\Big). \end{aligned}$$

On en déduit, en faisant appel à la majoration de Ramanujan [**15**] pour l'ordre maximal de la fonction de diviseurs,

$$\max_{t\leqslant d} \tau(t) \leqslant d^{\{\log 2 + O(1/\log_2 d)\}/\log_2 d} \leqslant k^{\frac12(1-s)+O(\vartheta_k)}. \tag{3·12}$$

Rappelons la formule (1·8). Nous allons montrer que l'on a, pour k assez grand et c assez petite,

$$\tau(md) > k^{1+cs^2-\vartheta_k^2} \tag{3·13}$$

pour tout entier m apparaissant au membre de gauche de (1·8). C'est évident si $cs^2 < \vartheta_k^2$. Mais, pour un choix convenable de c, $cs^2 \geqslant \vartheta_k^2$ implique que la borne supérieure de (3·12) est $< \sqrt{k}$. On peut donc appliquer le Théorème 1.3 sous la forme

$$k \leqslant \sum_{\substack{t\mid md\\ \tau(t)\leqslant k^\beta}} 1 \leqslant \tau(md)^{E(\beta)}$$

pour $\beta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}s + O(\vartheta_k) > 0$. Comme on a

$$E(\tfrac{1}{2} - \varepsilon) = 1 - \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \varepsilon^{2n}}{2n(2n-1)} \leqslant 1 - \frac{2\varepsilon^2}{\log 2}$$

lorsque $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$, cela fournit bien (3·13).

Il suit, pour tout $\xi \in [0, (\log d)/\log 2]$,

$$\begin{aligned} \Lambda_k(d) &\ll \frac{1}{d \log d} \sum_{P^+(m) \leqslant d} \frac{\tau(md)^\xi}{m k^{(1+cs^2-\vartheta_k^2)\xi}} \\ &\ll \frac{\tau(d)^\xi (1+\log d)^{2^\xi - 1}}{d k^{(1+cs^2-\vartheta_k^2)\xi}}, \end{aligned} \tag{3·14}$$

d'après (3·8). En majorant $\tau(d)$ par le membre de gauche de (3·12) et en opérant le choix quasi-optimal défini par

$$2^\xi = \frac{\log k}{\log_2 k}, \tag{3·15}$$

on obtient

$$\Lambda_k(d) \ll \frac{K_1^s k^{O(1)}}{K^{1+cs^2}}.$$

En distinguant les cas $s > 1/\log_3 k$ et $s \leqslant 1/\log_3 k$, on obtient bien (3·10) quitte à altérer la valeur de la constante c.

La minoration (3·11) est obtenue en comparant (3·10) à la minoration de (1·11). Nous omettons les détails du calcul. □

Lemme 3.4. *On a pour* $k \geqslant 100$, $\frac{1}{3} \leqslant v \leqslant 2$,

$$\sup_{d > K^v} \Lambda_k(d) \leqslant \frac{K_2^{1-v} k^{O(1)}}{K K_1^v}. \tag{3·16}$$

En particulier,

$$\Lambda_k^* \leqslant \frac{\sqrt{K_2}\, k^{O(1)}}{K \sqrt{K_1}}. \tag{3·17}$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.3, le maximum Λ_k^* est atteint en une valeur $d = K^u$ avec $u \geqslant \frac{1}{2} + O\big(\sqrt{(\log_2 h)/\log h}\big)$. On peut aussi supposer $d \leqslant K^2$ puisque $\Lambda_k(d) \leqslant 1/d$. La majoration (3·17) découle donc bien de (3·16).

Pour ces valeurs de d, nous allons majorer le second membre de (1·8).

Nous pouvons d'abord, grâce à (3·14), écarter les entiers m tels que $\tau(md) > k^2$.

Pour les entiers m restants, posons $T = T_k := \exp\big\{(\log_2 k)^6\big\}$ et décomposons chaque entier m apparaissant au second membre de (1·8) sous la forme $m = m_1 m_2$ avec

$$P^+(m_1) \leqslant T < P^-(m_2).$$

Nous allons établir que l'on a pour k assez grand

$$\tau(m_1 d) > k^{1-\vartheta_k^2}. \tag{3·18}$$

C'est évident si $\tau(m_2) \leqslant k^{\vartheta_k^2}$ puisque

$$k = \tau(md, d) \leqslant \tau(m_1 d)\tau(m_2, d). \tag{3·19}$$

Dans le cas contraire, on observe que chaque diviseur t de m_2 n'excédant pas d vérifie

$$\tau(t) \leqslant 2^{\Omega(t)} \leqslant d^{(\log 2)/\log T} \leqslant k^{2\vartheta_k^5} \leqslant \tau(m_2)^{2\vartheta_k^3}.$$

D'après le Théorème 1.3, on en déduit, pour k assez grand,

$$\tau(m_2, d) \leqslant \tau(m_2)^{E(2\vartheta_k^3)} \leqslant k^{2E(2\vartheta_k^3)} \leqslant k^{\vartheta_k^2}.$$

On en déduit encore (3·18) par (3·19).

La contribution à (1·8) des entiers m satisfaisant (3·18) n'excède pas

$$\frac{1}{d}\prod_{p\leqslant d}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{P^+(m_1)\leqslant T}\frac{\tau(m_1 d)^\xi}{k^{(1-\vartheta_k^2)\xi}m_1}\sum_{\substack{P^-(m_2)>T\\ P^+(m_2)\leqslant d}}\frac{1}{m_2} \ll \frac{\tau(d)^\xi(1+\log T)^{2^\xi-1}}{dk^{(1-\vartheta_k^2)\xi}},$$

d'après (3·8). Insérons la première majoration (3·12) et opérons le choix quasi-optimal $\xi := (\log_2 k - \log_4 k)/\log 2$. Posant $\lambda := \log_3 k/\log_2 k$, nous obtenons la majoration

$$\frac{k^{-\xi(1-u+\lambda u)+O(1)}}{K^u} = \frac{K_2^{1-u}k^{O(1)}}{KK_1^u}.$$

□

3·3. Preuve du Théorème 1.4

Commençons par établir (1·19) et (1·20). Le renseignement supplémentaire selon lequel la somme est dominée par les entiers vérifiant (1·21) ne sera pas employé directement dans ce travail. Nous l'avons cependant inclus en vue d'applications ultérieures.

Nous utilisons ici la méthode du col sous une forme très voisine de celle qui est employée pour établir le théorème 1 de [**6**]. Nous nous contentons donc d'indications relativement sommaires, renvoyant le lecteur à [**6**] pour les détails calculatoires.

L'existence de la solution ϱ à l'équation (1·17) résulte immédiatement de la croissance de l'expression figurant au membre de gauche, dont la limite à l'infini vaut

$$\pi(z) - \pi(y) \sim z/\log z > y(\log y)^{\kappa_1 - 1}.$$

On a de plus $\varrho \gg h/\log u$ puisque

$$\frac{h}{\varrho} = \frac{F'(\varrho)}{F(\varrho)} \leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1}{p} \ll \log u.$$

Ensuite, on remarque que $\varrho \ll y/\log u$ pour y assez grand car, pour $5/\log u < s \leqslant \sqrt{z/y}$, on a

$$\sum_{y<p\leqslant z}\frac{sy}{sy+p} \geqslant \sum_{\sqrt{yz}<p\leqslant y^u}\frac{sy}{2p} > \tfrac{1}{5}sy\log u > h.$$

Posons alors $\varrho_1 := y(1 + c/\log u)$, où c est assez grande pour que $\varrho \leqslant \varrho_1$. On note que $\varrho_1 \in]y, z[$ pour $y > y_0$. On a

$$\sum_{y<p\leqslant z} \frac{\varrho}{p(p+\varrho)} \leqslant \sum_{y<p\leqslant z} \frac{\varrho_1}{p(p+\varrho_1)} \leqslant \sum_{y<p\leqslant \varrho_1} \frac{1}{p} + \varrho_1 \sum_{p>\varrho_1} \frac{1}{p^2} \ll \frac{\log_2 y}{\log y}.$$

D'où

$$\frac{F'(\varrho)}{F(\varrho)} = \sum_{y<p\leqslant z} \Big\{\frac{1}{p} - \frac{\varrho}{p(p+\varrho)}\Big\} = \log u + O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big) = \log u\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{R}\Big)\Big\},$$

et donc

$$\varrho = \frac{h}{\log u}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{R}\Big)\Big\}. \tag{3·20}$$

Pour $v \in \mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, -y]$, posons

$$\varphi(v) := \sum_{y<p\leqslant z} \log\Big(1 + \frac{v}{p}\Big)$$

où les logarithmes sont pris en détermination principale, de sorte que $F(v) = \mathrm{e}^{\varphi(v)}$ pour ces mêmes valeurs de v. Il est clair que $\varphi(w\varrho)$ est défini dès que $|w| < (y+\varrho)/2\varrho$ et que l'on a alors

$$\varphi(w\varrho) - \varphi(\varrho) = \sum_{y<p\leqslant z} \log\Big(1 + \frac{\varrho(w-1)}{p+\varrho}\Big) = (w-1)h + O\Big(|w-1|^2 \frac{h}{R}\Big), \tag{3·21}$$

où nous avons utilisé l'estimation

$$\sum_{y<p\leqslant z} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} \ll \frac{\varrho}{\log y} \ll \frac{h}{R \log_2 y}.$$

Cela permet d'établir facilement (1·19) lorsque $h \ll R$, et donc $\varrho \ll (\log y)/\log_2 y$. En effet, dans ce cas, on peut supposer y_0 assez grand pour que $\varrho < \frac{1}{3}y$, de sorte que $|w| = 1$ implique $|w-1| \leqslant 2 \leqslant (y+\varrho)/2\varrho$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} s_h(y,z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \mathrm{e}^{\varphi(\varrho w)} \frac{\mathrm{d}w}{\varrho^h w^{h+1}} \\ &= \frac{F(\varrho)}{2\pi i \varrho^h} \oint_{|w|=1} \Big\{1 + O\Big(\frac{h|w-1|^2}{R}\Big)\Big\} \mathrm{e}^{h(w-1)} \frac{\mathrm{d}w}{w^{h+1}}. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy et une évaluation classique du terme d'erreur fournissent alors (1·19).

Lorsque $h \gg R$, nous obtenons (1·19) en développant $F(\varrho e^{i\vartheta})$ au voisinage de $\vartheta = 0$. Par (3·21), il existe une constante absolue c_0 telle que l'on ait pour $|\zeta| \leqslant c_0$, $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(\varrho e^{i\zeta}) = \varphi(\varrho) + h(e^{i\zeta} - 1) + O(h|\zeta|^2/R). \tag{3·22}$$

Cela implique par la formule de Cauchy que, pour chaque entier $r \geqslant 1$ fixé,

$$\alpha_r := i^{-r}\Big[\frac{d^r\varphi(\varrho e^{i\zeta})}{d\zeta^r}\Big]_{\zeta=0} = h\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{R}\Big)\Big\}.$$

Comme $\alpha_1 = h$ par définition de ϱ, on peut écrire, pour $|\vartheta| \leqslant c_0$,

$$\varphi(\varrho e^{i\vartheta}) = \varphi(\varrho) + ih\vartheta - \tfrac{1}{2}\alpha_2\vartheta^2 - \tfrac{1}{6}i\alpha_3\vartheta^3 + O(h\vartheta^4)$$

où la majoration du terme d'erreur découle également de (3·22). En reportant ce développement limité dans l'intégrale

$$s_h(y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\varrho e^{i\vartheta})e^{-ih\vartheta}\, d\vartheta$$

pour y estimer la contribution du domaine $|\vartheta| \leqslant c_0 h^{-1/3}$ et en majorant la contribution complémentaire grâce à l'estimation

$$F(\varrho e^{i\vartheta}) \ll F(\varrho)e^{-c_1 h\vartheta^2} \qquad (|\vartheta| \leqslant \pi)$$

qu'on établit, pour une constante absolue convenable c_1, en raisonnant comme au lemme 3 de [**6**], on obtient (1·19) avec des calculs semblables à ceux de la fin de la preuve du théorème 1 de [**6**].

On déduit (1·20) de (1·19) en faisant appel à (3·20) et en notant que

$$\varphi(\varrho) = \varrho \log u + O(h/R) = h + O(h/R).$$

□

LEMME 3.5. *On a uniformément pour $y \geqslant 2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,*

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^{1-\alpha}} = \log_2 y + \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\int_1^w t\xi'(t)\, dt + O(1)$$

avec $w := (y^\alpha - 1)/(\alpha \log y)$ et où ξ est la fonction apparaissant au Lemme 2.8.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la formule

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^{1-v}} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y^v - 1}{v} + O(1),$$

que l'on peut établir grâce au théorème des nombres premiers sous une forme forte, cf. [**19**], exercice corrigé III.5.1(d) p. 204.

LEMME 3.6. *Pour* $h < y \leqslant 2y < z \leqslant y^2$ *et* $0 < \vartheta < 1$, *on a*

$$\sum_{\substack{\omega(m)=h\\ p\,|\,m\Rightarrow y<p\leqslant z\\ m>(yz)^{h(1+\vartheta)/2}}} \frac{\mu(m)^2}{m} \ll \frac{(\log u)^h}{h!}\,\mathrm{e}^{-\vartheta h/(u-1)^{2/3}+O((u-1)^{2/3}h)} \tag{3·23}$$

Démonstration. Posons $\varepsilon := u-1$. Soit $\sigma = \varepsilon^{1/3}$. Désignons par S la somme à majorer. On a

$$S \leqslant \mathrm{e}^{-\sigma h(1+\vartheta)/\varepsilon}\frac{\left(\sum_{y<p\leqslant z} p^{\alpha-1}\right)^h}{h!} \tag{3·24}$$

avec $\alpha\log y := \sigma/\{\varepsilon(1+\frac12\varepsilon)\}$. D'après le Lemme 3.5 et l'estimation $t\xi'(t) = 1+O(1/\log t)$ $(t\geqslant 2)$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{y<p\leqslant z} p^{\alpha-1} &= \left[\frac{z^\alpha-1}{\alpha\log z}-\frac{y^\alpha-1}{\alpha\log y}\right]\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\alpha\log y}\Big)\Big\}+O(1)\\
&= \Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}}{1+\varepsilon}-\mathrm{e}^{\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}\right]+O(1)\\
&= \Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\mathrm{e}^{\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\sigma/(1+\varepsilon/2)}}{1+\varepsilon}-1+O(\mathrm{e}^{-\sigma/2\varepsilon})\right]\\
&= \Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\mathrm{e}^{\sigma/\varepsilon-\sigma/2}\sigma\{1+\tfrac12\sigma+O(\sigma^2)\}\\
&= \Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}+\sigma^2\Big)\Big\}\varepsilon\mathrm{e}^{\sigma/\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En reportant dans (3·24), on obtient

$$S \leqslant \frac{(u-1)^h}{h!}\mathrm{e}^{-\sigma h\vartheta/\varepsilon+O(\varepsilon h/\sigma+\sigma^2 h)}.$$

Cela implique bien (3·23). □

LEMME 3.7. *Pour* $h < y \leqslant 2y < z \leqslant y^2$ *et* $0 < \vartheta < 1$, *on a*

$$\sum_{\substack{\omega(m)=h\\ p\,|\,m\Rightarrow y<p\leqslant z\\ m\leqslant(yz)^{h(1-\vartheta)/2}}} \frac{\mu(m)^2}{m} \ll \frac{(\log u)^h}{h!}\,\mathrm{e}^{-\vartheta h/(u-1)^{2/3}+O((u-1)^{2/3}h)} \tag{3·25}$$

Démonstration. Posons $\varepsilon := u-1$. Soit $\sigma = \varepsilon^{1/3}$. Désignons par T la somme à majorer. On a

$$T \leqslant \mathrm{e}^{\sigma h(1-\vartheta)/\varepsilon}\frac{\left(\sum_{y<p\leqslant z} p^{-\alpha-1}\right)^h}{h!} \tag{3·26}$$

avec $\alpha\log y := \sigma/\{\varepsilon(1+\frac12\varepsilon)\}$. D'après le théorème des nombres premiers, on a

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leqslant z} p^{-\alpha-1} &= \Big[\frac{y^{-\alpha}}{\alpha\log y}-\frac{z^{-\alpha}}{\alpha\log z}\Big]\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\alpha\log y}\Big)\Big\}+O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}y^{-\alpha}\Big)\\ &=\Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[\frac{1+\varepsilon}{\mathrm{e}^{\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}}\Big]\\ &\quad+O\Big(\mathrm{e}^{-\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma/\varepsilon}}\Big)\\ &=\Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\mathrm{e}^{-\sigma/\{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\}}\Big[\frac{1+\varepsilon}{\mathrm{e}^{\sigma/(1+\varepsilon/2)}}-1+O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma/\varepsilon}}\Big)\Big]\\ &=\Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big)\Big\}\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\sigma\{1-\frac12\sigma+O(\sigma^2)}{\mathrm{e}^{\sigma/\varepsilon+\sigma/2}}\}\\ &=\Big\{1+O\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}+\sigma^2\Big)\Big\}\varepsilon\mathrm{e}^{-\sigma/\varepsilon}.\end{aligned}$$

En reportant dans (3·26), on obtient

$$T\leqslant\frac{(u-1)^h}{h!}\mathrm{e}^{-\sigma h\vartheta/\varepsilon+O(\varepsilon h/\sigma+\sigma^2h)}.$$

Cela implique bien (3·25). □

Nous sommes maintenant en mesure de compléter la preuve du Théorème 1.4. En effet, l'assertion complémentaire est une conséquence immédiate de (1·20), (3·23) et (3·25).

3·4. Minoration de Λ_k^* : fin de la preuve du Théorème 1.1

LEMME 3.8. *On a, uniformément pour $y\geqslant 2$, $N_y=\mathrm{e}^{\vartheta(y)}$, $1/\log y\ll\varepsilon\leqslant\frac12$, $x\geqslant\mathrm{e}^{(\log y)^2/\varepsilon}$, $b\geqslant 1$, $\mu(b)^2=1$, $P^-(b)>y$, $\omega(b)\leqslant(1-\varepsilon)\pi(y)$, et $1\leqslant z\ll\min(x,\varepsilon\pi(y))$,*

$$\sum_{\substack{d\mid N_yb\\ x<d\leqslant x+x/z}}1\ll\tau(N_yb,x)/z.$$

Démonstration. Soit y_0 une constante positive arbitraire. Nous pouvons supposer $y>y_0$ car le résultat est trivial lorsque y est borné. Soit S la somme à majorer. On a

$$S=\sum_{t\mid b}\Big\{\Psi_1\Big(\frac{x}{t}+\frac{x}{tz},y\Big)-\Psi_1\Big(\frac{x}{t},y\Big)\Big\}.$$

Lorsque $t\leqslant x/z$, nous pouvons employer le Corollaire 2.6 pour majorer la quantité entre accolades. Dans le cas contraire, elle n'excède manifestement pas la valeur 1. Il suit

$$S\ll\frac{1}{z}\sum_{t\mid b}\Psi_1\Big(\frac{x}{t},y\Big)+S_1=\frac{\tau(N_yb,x)}{z}+S_1 \tag{3·27}$$

avec $S_1:=\sum_{t\mid b,\,x/z<t\leqslant x}1$.

Désignons par $\{p_j(n)\}_{j=1}^{\omega(n)}$ la suite croissante des facteurs premiers d'un entier générique n. Les diviseurs t de b peuvent être représentés sous forme canonique

$$t = \prod_{1\leqslant j\leqslant \omega(b)} p_j(b)^{\alpha_j(t)},$$

où $\alpha_j(t)$ vaut 0 ou 1 pour chaque indice j. Nous posons alors

$$d_t = \prod_{1\leqslant j\leqslant \omega(b)} p_j(N_y)^{\alpha_j(t)},$$

de sorte que $t \mapsto d_t$ est une injection de l'ensemble des diviseurs de b dans celui des diviseurs de N_y. Nous observons que l'hypothèse $\omega(b) \leqslant (1-\varepsilon)\pi(y)$ implique pour y_0 assez grand

$$y_1 := p_{\omega(b)}(N_y) \leqslant (1-\varepsilon)y.$$

De plus, si $x/z < t \leqslant x$, ou bien $y^{\omega(t)} \leqslant x/zy$ et

$$t/d_t > x/zd_t \geqslant x/zy^{\omega(t)} \geqslant y,$$

ou bien $y^{\omega(t)} > x/zy > x/y^2 \geqslant y^{\{(\log y)/\varepsilon\}-2}$ et

$$t/d_t \geqslant \big(y/y_1\big)^{\omega(t)} > \mathrm{e}^{\varepsilon(1+\varepsilon/2)\omega(t)} > \mathrm{e}^{(1+\varepsilon/2)\log y-\varepsilon(2+\varepsilon)} > y.$$

On a donc dans tous les cas $yd_t < t \leqslant x$. Cela implique que tous les diviseurs de N_y de la forme d_tp avec $y_1 < p \leqslant y$ sont comptés dans $\tau(N_y,x)$. Il s'ensuit que

$$\tau(N_y,x) \gg \varepsilon\pi(y)\tau(b,x) \gg z\tau(b,x) \geqslant zS_1.$$

En reportant dans (3·27), on obtient bien le résultat annoncé. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la minoration contenue dans (1·13).

Soit k un nombre entier assez grand. Nous rappelons la notation h de (3·9) et introduisons des paramètres $w > y \geqslant 2$. Posons encore $N_y := \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$. En appliquant (1·8) avec $d = N_y$, nous pouvons écrire

$$\Lambda_k(N_y) \geqslant \frac{1}{N_y}\prod_{p\leqslant N_y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{m\in\mathcal{M}}\frac{1}{m}\sum_{r\in\mathcal{E}(m)}\frac{1}{r} \tag{3·28}$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble d'entiers $m \leqslant N_y$ dont tous les facteurs premiers sont dans $]y,w]$ et où, pour chaque m de $\mathcal{M}$, l'ensemble $\mathcal{E}(m)$ est tel que

$$P^+(r) \leqslant N_y, \quad P^-(r) > w, \quad \tau(N_ymr,N_y) = k \tag{3·29}$$

dès que $r \in \mathcal{E}(m)$.

Soit ε un paramètre satisfaisant à $1/\log_3 k \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{100}$. Nous choisissons y aussi grand que possible sous la contrainte

$$\tau(N_y) = 2^{\pi(y)} \leqslant k^{\frac12+\varepsilon}.$$

Il résulte du théorème des nombres premiers que

$$\frac{y}{\log y}+O\Big(\frac{y}{(\log y)^2}\Big)=\varrho\log k, \tag{3·30}$$

avec $\varrho:=(\frac12+\varepsilon)/\log 2$. D'où

$$\begin{aligned} y&=\varrho\log k\log_2 k+\varrho\log k\log_3 k+O\big(\log k\big)\\ &=(\tfrac12+\varepsilon)\log(KK_1)+O\big(\log k\big), \end{aligned} \tag{3·31}$$

et donc

$$N_y=\mathrm{e}^{\vartheta(y)}=(KK_1)^{\frac12+\varepsilon}k^{O(1)}. \tag{3·32}$$

Il existe un unique entier $\ell=\ell_y$ tel que $k/2\tau(N_y)<2^\ell\leqslant k/\tau(N_y)$, et nous choisissons dans (3·28)

$$\mathcal{M}:=\big\{m\geqslant 1:\mu(m)^2=1,\,\omega(m)=\ell,\,p\mid m\Rightarrow y<p\leqslant w\big\},$$

avec $w:=\ell^{1+\varepsilon}$. On déduit de (3·30) que

$$\ell=(\tfrac12-\varepsilon)\frac{\log k}{\log 2}+O\Big(\frac{\log k}{\log_2 k}\Big). \tag{3·33}$$

Nous avons encore, avec la notation du Théorème 1.4,

$$\sum_{m\in\mathcal{M}}\frac1m=\sum_{\substack{m\leqslant N_y\\ \omega(m)=\ell\\ p\mid m\Rightarrow y<p\leqslant w}}\frac{\mu(m)^2}{m}=s_\ell(y,w)$$

puisque

$$w^\ell=\ell^{(1+\varepsilon)\ell}=K^{(\frac12-\varepsilon)(1+\varepsilon)}k^{O(1)}<K^{(1-\varepsilon)/2}k^{O(1)}<N_y/\sqrt{K_1}, \tag{3·34}$$

où la dernière inégalité résulte de (3·32).

Il découle du Théorème 1.4 que

$$s_\ell(y,w)\gg\frac{\mathrm{e}^{h\log\varepsilon+O(h)}}{\ell!}.$$

En reportant dans (3·28) tout en tenant compte de (3·32), cette estimation fournit

$$\Lambda_k(N_y)>\frac{k^{(\log\varepsilon)/\log 2+O(1)}}{KK_1^{\frac12+\varepsilon}}\min_{m\in\mathcal{M}}\sum_{r\in\mathcal{E}(m)}\frac1r.$$

On voit donc que la minoration de (1·13) résulte de l'estimation

$$\sum_{r\in\mathcal{E}(m)}\frac1r\gg\frac{1}{k^{O(1)}}\qquad(m\in\mathcal{M}) \tag{3·35}$$

pour le choix $\varepsilon = 1/\log_3 k$, que nous opérons désormais.

Nous allons maintenant construire les ensembles $\mathcal{E}(m)$. Pour chaque m, nous définirons :

(a) un nombre $p_0 = p_0(m)$ égal à 1 ou au plus petit nombre premier $> w$, noté $p^{\#}(w)$;

(b) un entier $G_m \geqslant 1$;

(c) des vecteurs admissibles $(p_0, p_1, \dots, p_J)$, avec $J \leqslant G_m$, et où les p_j $(1 \leqslant j \leqslant J)$ sont des nombres premiers deux à deux distincts de $]w, N_y]$.

L'ensemble $\mathcal{E}(m)$ sera alors constitué de tous les entiers r de la forme $r = p_0 p_1 \cdots p_J$ avec $(p_0, p_1, \dots, p_J)$ admissible.

Observons en premier lieu que, comme $N_y > \sqrt{N_y m}$ pour tout m de $\mathcal{M}$, on a $\tau(N_y m, N_y) \geqslant \frac{1}{2}\tau(N_y m)$ et donc

$$\tfrac{1}{4}k \leqslant \tau(N_y m, N_y) \leqslant k \qquad (m \in \mathcal{M}).$$

Posons $k_0(m) := k - \tau(N_y m, N_y)$ de sorte que $0 \leqslant k_0(m) \leqslant \frac{3}{4}k$ $(m \in \mathcal{M})$.

Définissons maintenant $p_0(m)$.

Si $k_0(m) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{y}}$, nous posons $p_0(m) = 1$.

Si $\mathrm{e}^{\sqrt{y}} < k_0(m) \leqslant \frac{3}{4}k$, nous distinguons deux cas, selon que l'on a ou non

$$k_0(m) > \tau(N_y m, N_y/w). \tag{3·36}$$

Lorsque (3·36) n'est pas réalisée, nous posons encore $p_0(m) = 1$. Lorsque (3·36) est vérifiée, nous posons $p_0 = p_0(m) := p^{\#}(w)$ et nous observons que, puisque $N_y/w > \sqrt{2N_y m w} > \sqrt{N_y m p_0}$ par (3·34), on a

$$\tfrac{1}{2}k \leqslant \tau(N_y m p_0, N_y/w) = \tau(N_y m, N_y/w) + \tau(N_y m, N_y/w p_0)$$

et donc

$$k_0(m p_0) = k - \tau(N_y m p_0, N_y) \leqslant \tfrac{1}{2}k \leqslant \tau(N_y m p_0, N_y/w).$$

Les nombres entiers positifs J et les vecteurs $(p_0, p_1, \dots, p_J)$ admissibles sont définis par récurrence sur l'indice j, $1 \leqslant j \leqslant J$. Supposons $p_0, \dots, p_{j-1}$ déjà construits et posons

$$r_{j-1} := p_0 \cdots p_{j-1}, \qquad k_0(m r_{j-1}) := k - \tau(N_y m r_{j-1}, N_y).$$

Il découle de ce qui précède que $k_0(m r_{j-1}) \leqslant \tau(N_y m r_{j-1}, N_y/w)$ pour tout $j \geqslant 1$, autrement dit

$$\tau(N_y m r_{j-1}, x) = k_0(m r_{j-1}) \Rightarrow x \leqslant N_y/w.$$

Si

$$k_0(m r_{j-1}) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{y}}, \tag{3·37}$$

deux cas se présentent :

(i) $k_0(m r_{j-1}) = 0$. Nous posons alors $J := j - 1$. La validité de (3·29) est dans ce cas triviale.

(ii) $1 \leqslant k_0(m r_{j-1}) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{y}}$. Nous posons alors $J := j$, introduisons l'unique nombre entier x_j tel que

$$\tau(N_y m r_{j-1}, x_j) = k_0(m r_{j-1}) \tag{3·38}$$

et définissons l'ensemble $I(p_0, \dots, p_{j-1})$ des nombres premiers p_j admissibles par

$$I(p_0, \dots, p_{j-1}) := \{p : N_y/(1 + x_j) < p \leqslant N_y/x_j, p \neq p_0, \dots, p_{j-1}\}.$$

Comme $\tau(N_y, x_j) = \Psi_1(x_j, y) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{y}}$, le Théorème 2.1 implique $x_j \leqslant \mathrm{e}^{3\sqrt{y}}$,[10] donc, par (2·17), $\tau(N_y, x_j) \gg x_j^{1/3}$ et $x_j \ll k^3$. On a alors pour tout r de $\mathcal{E}(m)$

$$\begin{aligned}\tau(N_y mr, N_y) &= \tau(N_y mr_{j-1}, N_y) + \tau(N_y mr_{j-1}, N_y/p_j)\\ &= k - k_0(mr_{j-1}) + k_0(mr_{j-1}) = k,\end{aligned}$$

de sorte que (3·29) est satisfaite. De plus, par le théorème des nombres premiers,

$$\sum_{p \in I(p_0, \dots, p_{j-1})} \frac{1}{p} \gg \frac{1}{x_j \log N_y} - \frac{J x_j}{N_y} \gg \frac{1}{k^5}, \tag{3·39}$$

où la dernière estimation est conditionnelle à une majoration convenable de J, e.g. $J \leqslant G_m \ll \sqrt{N_y}$. Nous verrons ci-dessous qu'en fait (3·37) est réalisée pour au moins un indice $j \ll h/\log h$, ce qui est plus que suffisant.

Si (3·37) n'est pas satisfaite, nous définissons encore x_j par (3·38)[11] et nous choisissons l'ensemble $I(p_0, \dots, p_{j-1})$ des nombres premiers p_j admissibles sous la forme

$$I(p_0, \dots, p_{j-1}) := \{p : N_y/x_j \leqslant p < (1 + 1/\varepsilon h)N_y/x_j,\ p \neq p_0, \dots, p_{j-1}\}.$$

D'après (3·33) et (3·31),

$$\begin{aligned}\omega(m) - (1 - \varepsilon)\pi(y) &= \ell - (1 - \varepsilon)\big(\tfrac{1}{2} + \varepsilon\big)h + O(h/\log h)\\ &\leqslant -\varepsilon\big(\tfrac{1}{2} - \varepsilon\big)h + O(h/\log h) \leqslant -\tfrac{1}{3}\varepsilon h.\end{aligned}$$

Cela implique

$$\omega(mr_{j-1}) \leqslant \omega(m) + j \leqslant (1 - \varepsilon)\pi(y) \tag{3·40}$$

sous réserve que

$$j \leqslant \tfrac{1}{3}\varepsilon h. \tag{3·41}$$

Pour ces valeurs de j, nous pouvons appliquer le Lemme 3.8 à l'entier $b = mr_{j-1}$. Nous obtenons alors, pour tout $p_j \in I(p_0, \dots, p_{j-1})$,

$$\begin{aligned}\tau(N_y mr_{j-1}, N_y/p_j) &\geqslant \tau(N_y mr_{j-1}, x_j(1 - 1/\varepsilon h))\\ &= \tau(N_y mr_{j-1}, x_j) - \sum_{\substack{d \mid N_y mr_{j-1}\\ x_j(1-1/\varepsilon h) < d \leqslant x_j}} 1\\ &\geqslant k_0(mr_{j-1}) - Ak_0(mr_{j-1})/\varepsilon h,\end{aligned}$$

10. En effet, $\Psi_1(\mathrm{e}^{3\sqrt{y}}, y) = \mathrm{e}^{\{\frac{3}{2} + o(1)\}\sqrt{y}}$ par (2·5) et (2·17).

11. On a donc trivialement $x_j > \mathrm{e}^{\sqrt{y}}$.

où A est une constante absolue convenable. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} k_0(mr_j) &= k - \tau(N_y mr_j, N_y) = k - \tau(N_y mr_{j-1}, N_y) - \tau(N_y mr_{j-1}, N_y/p_j) \\ &= k_0(mr_{j-1}) - \tau(N_y mr_{j-1}, N_y/p_j) \leqslant Ak_0(mr_{j-1})/\varepsilon h. \end{aligned}$$

Cela montre que la condition (3·37) est certainement réalisée dès que

$$j > \frac{2\log k}{\log(h\varepsilon/A)} \asymp \frac{h}{\log h},$$

et, en particulier, que (3·41) est automatiquement satisfaite lorsqu'elle est nécessaire. On a donc en toute circonstance

$$G_m \ll h/\log h, \tag{3·42}$$

ce qui assure en outre la validité de de (3·40). De plus, dans les étapes de récurrence où (3·37) n'est pas satisfaite, on a par le théorème des nombres premiers

$$\sum_{p\in I(p_0,\ldots,p_{j-1})} \frac{1}{p} \gg \frac{1}{h\log N_y} \gg \frac{1}{h^3}. \tag{3·43}$$

Il découle de (3·39), (3·42) et (3·43) que

$$\sum_{r\in\mathcal{E}(m)} \frac{1}{r} > \frac{\mathrm{e}^{O(G_m)}}{p_0 G_m!\, h^{3G_m} k^5} \gg \frac{1}{k^{O(1)}},$$

où le terme $G_m!$ du dénominateur permet de prendre en compte l'éventualité que les $I(p_0,\ldots,p_{j-1})$ ne soient pas disjoints. Cela établit bien (3·35) et achève la démonstration de la minoration de (1·13). □

Nous terminons ce paragraphe par la remarque que l'évaluation en moyenne sur k de Λ_k^* est relativement facile. Montrons rapidement comment établir l'estimation

$$\sup_d \sum_{k/2<j\leqslant 2k} \Lambda_j(d) = \frac{K_1^{o(1)}}{K\sqrt{K_1}} \tag{3·44}$$

(On pourrait en fait montrer que

$$\sup_{k/2<j\leqslant 2k} \Lambda_j^* \geqslant \frac{K_2^{O(1)}}{K\sqrt{K_1}}, \tag{3·45}$$

en choisissant, dans la démonstration qui suit, $\varepsilon = \varepsilon_y = 1/\log_2 y$.)

Montrons (3·44). Il suffit d'établir la minoration contenue dans (3·44) car la majoration découle du Lemme 3.4.

Pour chaque d, on a par (1·8)

$$L_k(d) := \sum_{k/2<j\leqslant 2k} \Lambda_j(d) = \frac{1}{d}\prod_{p\leqslant d}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \sum_{\substack{P^+(m)\leqslant d\\ k/2<\tau(md,d)\leqslant 2k}} \frac{1}{m}. \tag{3·46}$$

Observons que tous les entiers m satisfaisant aux conditions

$$1 \leqslant m \leqslant d, \quad (m,d)=1, \quad k/\tau(d) < \tau(m) \leqslant 2k/\tau(d) \tag{3·47}$$

sont comptés dans la somme en m de (3·46). En effet, on a $d \geqslant \sqrt{md}$, donc

$$\tau(md,d) \geqslant \tfrac{1}{2}\tau(md) = \tfrac{1}{2}\tau(m)\tau(d) > \tfrac{1}{2}k.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{100}[$. Nous choisissons $d = N_y = \mathrm{e}^{\vartheta(y)}$ où y est aussi grand que possible sous la contrainte $\tau(d) = 2^{\pi(y)} \leqslant k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Les estimations (3·31) et (3·32) sont valables sans changement. Il existe un unique entier $\ell = \ell_d$ tel que $k/\tau(d) < 2^\ell \leqslant 2k/\tau(d)$, et nous restreignons la somme en m de (3·46) aux entiers m qui sont sans facteur carré et possèdent exactement ℓ facteurs premiers, tous dans l'intervalle $]y,w]$, où $w := \ell^{1+\varepsilon}$. La formule (3·33) est également encore valable — quoique le choix de ℓ ne soit pas exactement le même que dans la preuve du Théorème 1.1. Nous avons encore, comme précédemment,

$$\sigma_\ell(d) := \sum_{\substack{m\leqslant d\\ \omega(m)=\ell\\ p\mid m \Rightarrow y<p\leqslant w}} \frac{\mu(m)^2}{m} = s_\ell(y,z)$$

car $w^\ell < d$.

Par (1·20), on obtient donc

$$\sigma_\ell(d) = \frac{\log(1+\varepsilon)^\ell \mathrm{e}^{O(\ell/\log\ell)}}{\ell!}. \tag{3·48}$$

En reportant dans (3·46) tout en tenant compte de (3·32), cette estimation fournit

$$L_k(d) > k^{O(1)}/\{KK_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient bien (3·44).

3·5. Preuve du Théorème 1.2

La minoration de (1·14) correspond à la seconde assertion du Lemme 3.3 pour le choix $b_1 = c_1$.

La majoration de (1·14) résulte d'une comparaison entre la majoration de $\Lambda_k(d)$ en fonction de d obtenue au Lemme 3.4 et la minoration de Λ_k^* issue du Théorème 1.1. En effet, on déduit de (3·16) et (1·13) que, pour une constante C convenable,

$$\Lambda_k(d) \leqslant \frac{K_2k^C}{K(K_1K_2)^v} < \frac{k^{-C}}{K\sqrt{K_1}K_2} \leqslant \Lambda_k^*,$$

dès que $d > K^v$ avec $v = \frac{1}{2} + (\frac{3}{2}\log_4 k + b_2)/\log_3 k$ où b_2 est une constante assez grande.

Pour montrer (1·15), nous observons qu'il résulte de (1·8) et (3·8) que l'on a, dès que $2^\xi \leqslant d$,

$$\Lambda_k(d) \leqslant \frac{1}{d}\prod_{p\leqslant d}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{P^+(m)\leqslant d}\frac{\tau(m)^\xi\tau(d)^\xi}{m} \ll \frac{\tau(d)^\xi(1+\log d)^{2^\xi}}{d\log d}.$$

Soit d tel que $\Lambda_k(d) = \Lambda_k^*$. Choisissons ξ comme dans (3·15), ce qui, compte tenu de (1·14), est largement compatible avec la condition $2^\xi \leqslant d$. Si $\tau(d) \leqslant k^{\frac{1}{2}(1-\mu)}$ on en déduit, grâce à la minoration de (1·14),

$$\Lambda_k(d) \leqslant \frac{k^{O(1)}}{K^{1-\varepsilon_k+\mu/2} K_1^{(1-\mu)/2}}.$$

On vérifie sans peine que cette majoration est moindre que la borne inférieure de (1·13) dès que $k > k_0(\varepsilon)$ et $\mu \geqslant (3 + \frac{1}{2}\varepsilon)(\log_3 k)/\log_4 k \sim (3 + \frac{1}{2}\varepsilon)(\log_3 d)/\log_4 d$. □

Bibliographie

1. R. de la Bretèche, Nombre de valeurs polynomiales qui divisent un entier, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.

2. L. Comtet, *Analyse combinatoire*, tome 1, Coll. SUP, n° 4, Presses universitaires de France, 1970.

3. J.-M. De Koninck & G. Tenenbaum, Sur la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.

4. P. Erdős, On the distribution of additive functions, *Ann. Math.* **47** (1946), 1–20.

5. P. Erdős, On some unconventional problems in number theory, *Astérisque* **61** (1979), 73–82.

6. P. Erdős & G. Tenenbaum, Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. London Math. Soc.*(3) **59** (1989), 417-438.

7. R. R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge tracts in mathematics, no 90, Cambridge University Press (1988).

8. A. Hildebrand, Integers free of large prime factors in short intervals, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **36** (1985), 57–69.

9. A. Hildebrand, On the local behaviour of $\Psi(x, y)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), 729–751.

10. A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.

11. A. Ivić & G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. (Oxford),* (2) **37** (1986), 401–417.

12. M. Naïmi, Les entiers sans facteur carré et certaines généralisations, Thèse de troisième cycle, Université de Tunis, 1987.

13. M. Naïmi, Les entiers sans facteur carré $\leqslant x$ dont leurs facteurs premiers $\leqslant y$, Groupe de travail en théorie analytique et élémentaire des nombres, 1986–87, 69–76, *Publ. Math. Orsay* 88-01, Univ. Paris XI, Orsay, 1988.

14. V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

15. S. Ramanujan, Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc., Série* 2, **14**, 1915, 347–400 ; ou *Collected Papers*, Cambridge University Press, Cambridge 1927 ou Chelsea 1962, 78–128.

16. A. Rényi, *Probability theory*, Akadémia Kiadó, Budapest (1970).

17. K. Rogers, The Schnirelmann density of the squarefree integers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 515–516.

18. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.

19. G. Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 2, Société Mathématique de France (1996), xiv + 251 pp.

Régis de la Bretèche
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris Sud–Orsay
91405 Orsay Cedex
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France