Invent. Math. **159** (2005), 531–588.

Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications*

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum

Sommaire

---

* Nous incluons ici certaines corrections par rapport à la version publiée.

1. Introduction et description des résultats

1·1. Entiers friables

Depuis une quinzaine d'années, l'étude des propriétés arithmétiques des entiers friables, i.e. sans grand facteur premier, a pris une place considérable dans les travaux de recherche en théorie des nombres et en algorithmique. Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n > 1$. Convenons encore de poser $P(1) = 1$ et introduisons les notations

$$S(x, y) := \{n \leqslant x : P(n) \leqslant y\},$$

pour l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x, et

$$\Psi(x, y) := |S(x, y)|,$$

pour son cardinal. La série de Dirichlet associée à $\Psi(x, y)$ est le facteur initial du produit eulérien de $\zeta(s)$, soit

$$\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{1}{n^s} = \zeta(s, y) := \prod_{p\leqslant y} \frac{1}{1 - 1/p^s} \qquad (\sigma > 0)$$

où, ici et dans la suite, nous définissons implicitement, pour $s \in \mathbb{C}$, les nombres réels σ et τ par la relation $s = \sigma + i\tau$.

La majoration de Rankin

$$\Psi(x, y) \leqslant x^\sigma \zeta(\sigma, y) \qquad (x \geqslant 2,\ y \geqslant 2,\ \sigma > 0)$$

est optimale lorsque $\sigma = \alpha = \alpha(x, y)$ est défini comme l'unique solution positive de l'équation transcendante

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x. \tag{1·1}$$

Nous rappelons au Lemme 3.1 *infra* les principales estimations explicites disponibles pour α et notons immédiatement, pour fixer les idées, que

$$\alpha \approx \frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2).$$

La méthode du col a permis à Hildebrand et Tenenbaum [18] d'évaluer précisément le rapport de $\Psi(x, y)$ à la majoration de Rankin : on a

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2), \tag{1·2}$$

où l'on a posé

$$u := (\log x)/\log y, \quad \overline{u} := \min(u, y/\log y), \tag{1·3}$$

et

$$\sigma_2 := \left[\frac{\mathrm{d}^2 \log \zeta(s,y)}{\mathrm{d}s^2}\right]_{s=\alpha}.$$

Les formules asymptotiques (3·3) et (3·8) *infra* fournissent respectivement des approximations explicites de α et σ_2 en fonction de x et y.

Conformément à l'usage, nous désignons par ϱ la fonction de Dickman, définie comme l'unique solution continue sur $[0, \infty[$ et dérivable sur $]1, \infty[$ de l'équation différentielle aux différences

$$v\varrho'(v) + \varrho(v-1) = 0$$

avec la condition initiale

$$\varrho(v) = 1 \quad (0 \leqslant v \leqslant 1).$$

Nous posons $\varrho(v) = 0$ pour $v < 0$ et prolongeons toutes les dérivées de ϱ par continuité à droite sur $\mathbb{R}$.

L'intérêt de la formule (1·2) est double. D'une part elle permet de retrouver facilement la validité de la formule de Hildebrand [16]

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \tag{1·4}$$

dans le domaine

$$x \geqslant 3, \quad \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x, \tag{H_ε}$$

où ε est un paramètre positif arbitraire.(1) D'autre part elle permet d'étudier, uniformément en x, y, le comportement local de l'application $x \mapsto \Psi(x,y)$. Il est ainsi établi dans [18] que l'on a

$$\Psi(cx,y) = c^\alpha \Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\} \tag{1·5}$$

uniformément pour $(x,y) \in (H_\varepsilon)$ et $1 \leqslant c \leqslant y$. Les formules de ce type, désignées par Erdős comme « semi-asymptotiques », sont des sous-produits spécifiques de la méthode du col et de ses avatars.

1·2. L'inégalité de Turán–Kubilius

L'inégalité de Turán–Kubilius est un outil essentiel de la théorie probabiliste des nombres, où elle est le pendant du théorème classique de Probabilité relatif

1. Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

à la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Elle est souvent employée, via l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour déterminer l'ordre normal d'une fonction arithmétique additive. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les chapitres concernés de [10] et [30].

L'un des objets du présent travail consiste à donner de l'inégalité de Turán–Kubilius une version adaptée au cas où seuls les entiers de $S(x,y)$ sont retenus.

Une telle étude est à mettre en perspective avec le modèle probabiliste de Kubilius — voir notamment [21], [22], [10], [11], [31]. Le lemme fondamental de Kubilius fournit une mesure universelle de l'approximation de la loi de répartition d'une fonction additive réelle f dont le support est inclus dans $S(x,y)$ par celle d'une variable aléatoire abstraite

$$Z_{f,y} = \sum_{p\leqslant y} \xi_p \tag{1·6}$$

où les ξ_p sont des variables aléatoires indépendantes de lois définies par

$$\mathbb{P}(\xi_p = f(p^\nu)) = (1-1/p)p^{-\nu} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots). \tag{1·7}$$

Désignons par ν_x la mesure empirique uniforme sur l'ensemble des entiers n'excédant pas x. Kubilius [21], [22], a montré que la quantité

$$K(x,y) := \sup_f \sup_{A\subset\mathbb{R}} |\nu_x(f\in A) - \mathbb{P}(Z_f\in A)|\,,$$

où le premier supremum porte sur toutes les fonctions additives nulles hors de $S(x,y)$, tend vers 0 dès que le paramètre u défini par (1·3) tend vers l'infini, i.e. $y = x^{o(1)}$. Une définition plus intrinsèque, mais équivalente, de $K(x,y)$ est donnée dans [32]. Il est établi dans [31] que l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$K(x,y) \ll_\varepsilon u^{-u} + x^{-1+\varepsilon} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2).$$

Le même travail fournit également, dans un large domaine en $(x,\, y)$, une formule asymptotique pour $K(x,y)$.

Considérons les variables aléatoires de Bernoulli X_{p^ν} définies sur Ω_x par

$$X_{p^\nu} := \begin{cases} 1 & \text{si } p^\nu \| n,\\ 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Le modèle de Kubilius repose sur l'observation que X_{q^μ} et X_{p^ν} sont « presque » indépendantes lorsque, d'une part, $q\neq p$ et, d'autre part, q^μ et p^ν sont petits devant x. Comme l'espérance de X_{p^ν} vaut

$$w_x(p^\nu) := \frac{1}{[x]}\Big\{\Big[\frac{x}{p^\nu}\Big] - \Big[\frac{x}{p^{\nu+1}}\Big]\Big\} = \frac{1}{p^\nu}\Big(1-\frac1p\Big) + O\Big(\frac1x\Big), \tag{1·8}$$

les approximations naturelles de l'espérance et de la variance d'une fonction additive complexe f sur Ω_x sont, avec la notation (1·6),

$$A_f(x) := \mathbb{E}(Z_{f,x}) = \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big),$$
$$\mathbb{V}(Z_{f,x}) = B_f(x)^2 - \sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2\Big|\sum_{1\leqslant \nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big|^2$$

où l'on a posé

$$B_f(x)^2 := \sum_{p\leqslant x}\mathbb{E}(|\xi_p|^2) = \sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

et où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent respectivement l'espérance et la variance relatives à la loi de probabilités définie par (1·7). Il est à noter que l'inégalité de Cauchy–Schwarz implique immédiatement

$$\mathbb{V}(Z_{f,x}) \geqslant \tfrac{1}{2}B_f(x)^2.$$

Avec ces notations, l'inégalité classique de Turán–Kubilius (cf., par exemple, [10], chap. 4 ou [31], chap. III.3) s'écrit

$$V_f(x) := \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n) - A_f(x)|^2 \ll B_f(x)^2 \tag{1·9}$$

où f est une fonction additive complexe arbitraire et la constante implicite est absolue — donc en particulier indépendante de f.

Notons

$$\Psi_m(x,y) := \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ (n,m)=1}} 1 \tag{1·10}$$

le nombre des entiers y-friables n'excédant pas x et relativement premiers avec m. Lorsque l'on remplace la mesure ν_x par la mesure uniforme, disons $\nu_{x,y}$, sur $S(x,y)$, l'analogue du membre de gauche de (1·8) devient

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)}. \tag{1·11}$$

Cette quantité ne possède *a priori* pas d'approximation simple et l'on peut dire qu'en un certain sens toute la difficulté inhérente à l'introduction du paramètre y réside dans la compréhension des fluctuations de ce rapport relativement aux différentes variables.

Nous nous proposons ici d'exploiter les formules semi-asymptotiques du type (1·5), issues de la méthode du col, qui suggèrent que le rapport (1·11) est proche de

$$\frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big), \tag{1·12}$$

avec $\alpha = \alpha(x, y)$. Cette approximation possède le double avantage d'être une fonction simple de p lorsque x et y sont fixés et d'être pertinente sans restriction sur les tailles relatives de x et y. Cela conduit naturellement à introduire, pour chaque fonction arithmétique additive complexe f, les quantités

$$A_f(x,y) := \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big), \quad B_f(x,y)^2 := \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big).$$

Posons encore

$$V_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S(x,y)} |f(n)-A_f(x,y)|^2$$

et désignons par $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions additives complexes. Nous obtenons le résultat suivant, dont la preuve repose essentiellement sur les estimations établies dans [5] pour la fonction $\Psi_m(x, y)$ et son comportement local — cf., notamment, les Lemmes 3.4 et 3.5 *infra.*

Théorème 1.1. *Il existe une constante absolue C telle que l'inégalité*

$$V_f(x,y) \leqslant CB_f(x,y)^2 \tag{1·13}$$

soit valide pour toute fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ et tous nombres réels x, y tels que $x \geqslant y \geqslant 2$.

Nous formulons au paragraphe 4.4 quelques remarques sur cet énoncé.

Il est bien connu (cf., par exemple, [10], chap. 4, ou [30], chap. III.3) que l'inégalité de Turán–Kubilius peut-être interprétée comme une majoration de norme d'application linéaire dans $\ell^2(\mathbb{C})$. La forme duale de (1·13) s'écrit de la manière suivante. Ici et dans la suite, nous posons, pour $m \geqslant 1$ et $s \in \mathbb{C}$,

$$g_m(s) := \prod_{p|m}(1-p^{-s}). \tag{1·14}$$

Théorème 1.2. *Soit $x \geqslant y \geqslant 2$. Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes, on a*

$$\sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{p^{\nu\alpha}}{g_p(\alpha)} \Bigg| \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ p^\nu \| n}} a_n - \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \sum_{n \in S(x,y)} a_n \Bigg|^2 \leqslant C\Psi(x,y) \sum_{n \in S(x,y)} |a_n|^2, \tag{1·15}$$

où C est la constante apparaissant au Théorème 1.1.

Nous terminons ce paragraphe par une remarque concernant l'interprétation probabiliste de l'étude des fonctions arithmétiques sur les entiers friables.

Soit f une fonction additive réelle dont le support est inclus dans $S(x,y)$. La loi de f relative à l'espace probabilisé

$$\Omega_x := \{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x\}$$

muni de la mesure uniforme ν_x est donnée, lorsque $x \in \mathbb{N}^*$, par la fonction de répartition

$$z \mapsto \sum_{\substack{m \in S(x,y) \\ f(m) \leqslant z}} \frac{1}{x} \Phi\Big(\frac{x}{m}, y\Big)$$

où, selon l'usage, nous notons $\Phi(t,y)$ le nombre des entiers $n \leqslant t$ dont tous les facteurs premiers excèdent y. On peut donc voir le lemme fondamental de Kubilius comme un résultat d'approximation de la répartition d'une fonction additive sur $S(x,y)$ par celle de son modèle probabiliste pour la mesure μ_y définie sur $S(x,y)$ par

$$\mu_y(A) := \sum_{m \in A} \frac{1}{x} \Phi\Big(\frac{x}{m}, y\Big) \qquad (A \subset S(x,y)).$$

Cette mesure privilégie clairement les petites valeurs de m. La problématique abordée dans le présent travail consiste à remplacer μ_y par la mesure uniforme.

1·3. Sur la constante de l'inégalité Turán–Kubilius

Pour tous x, y, la quantité $B_f(x,y)^2$ est le majorant naturel de la variance du modèle probabiliste $Z_{f,x,y}$ de la fonction additive f obtenu comme somme de variables aléatoires géométriques dont les lois sont données par (1·12), soit

$$\mathbb{V}\big(Z_{f,x,y}\big) = \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha) \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} - \sum_{p \leqslant y} g_p(\alpha)^2 \Bigg| \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \Bigg|^2.$$

On a en fait $B_f(x,y)^2 = \mathbb{V}(Z_{f,x,y})$ lorsque les variables ξ_p sont centrées et, en toute généralité,

$$\big(1 - 2^{-\alpha}\big) B_f(x,y)^2 \leqslant B_f^-(x,y)^2 \leqslant \mathbb{V}(Z_{f,x,y}) \leqslant B_f(x,y)^2, \tag{1·16}$$

avec

$$B_f^-(x,y)^2 := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)^2 \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}. \tag{1·17}$$

Au vu du Théorème 1.1, le problème du comportement asymptotique des quantités

$$C(x,y) := \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,y)}{B_f(x,y)^2}, \quad C^*(x,y) := \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,y)}{\mathbb{V}\big(Z_{f,x,y}\big)} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

est naturellement posé.

Il est essentiel de noter d'emblée que, dans le cas $x = y$, cette question ne coïncide pas exactement avec celles qui ont été jusqu'ici traitées dans la littérature : cf. [15], [23], [24], [28]. Hildebrand [15], par exemple, compare $V_f(x,x)$ aux quantités

$$\begin{aligned} &B_f^+(x)^2 := \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}, \\ &\text{et} \\ &B_f^*(x)^2 := \sum_{p^\nu \leqslant x} |f(p^\nu)|^2 w_x(p^\nu) - \sum_{p\leqslant x} \Bigg| \sum_{1\leqslant \nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} f(p^\nu) w_x(p^\nu) \Bigg|^2, \end{aligned} \tag{1·18}$$

où $w_x(p^\nu)$ est défini en (1·8). Ainsi $B_f(x)^2 \leqslant B_f^+(x) \leqslant 2B_f(x)^2$ et $B_f^*(x)^2$ représente la somme des variances, relativement à la mesure ν_x, des fonctions additives f_p définies par

$$f_p(n) := \begin{cases} f(p^\nu) & \text{si } p^\nu \,\|\, n, \\ 0 & \text{si } p \nmid n. \end{cases}$$

Kubilius [23], [24] et Stein [28] considèrent des quantités similaires.

Les évaluations de Hildebrand, dont des analogues ont été établis indépendamment par les deux autres auteurs, peuvent être énoncées sous la forme

$$\sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,x)}{B_f^*(x)^2} = \tfrac{3}{2} + o(1), \qquad \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,x)}{B_f^+(x)^2} = \tfrac{3}{2} + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{1·19}$$

Ce résultat a pour pendant, dans notre cadre, les formules asymptotiques

$$\sup_{z\leqslant x} C(z,z) = 2 + o(1), \quad \sup_{z\leqslant x} C^*(z,z) = 2 + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{1·20}$$

Ces estimations peuvent être aisément établies à partir de celles de [15], et nous fournissons les détails au paragraphe 2.

Au Théorème 5.1, nous donnons une évaluation asymptotique de la variance qui implique notamment (Corollaire 5.2) le résultat suivant.

Théorème 1.3. *On a*

$$C(x,y) = 1 + o(1) \quad \text{et} \quad C^*(x,y) = 1 + o(1) \tag{1·21}$$

dès que

$$y/\log x \to \infty, \qquad u \to \infty. \tag{1·22}$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, les inégalités (1·13) *et* (1·15) *ont lieu avec $C = 1+\varepsilon$ dès que u et $y/\log x$ sont assez grands.*

Ce résultat atteste ainsi d'une remarquable distorsion de comportement entre le cas classique, matérialisé par (1·20), et le cas friable de l'inégalité de Turán–Kubilius. On peut, par ailleurs, établir par une étude directe que

$$C(x,2) = \mathrm{e} + o(1), \qquad C^*(x,2) \leqslant \mathrm{e}^2 + o(1). \tag{1·23}$$

L'argument du Théorème 5.1 nous permet également d'obtenir (Corollaire 5.3) une condition suffisante pour qu'une fonction additive f vérifie

$$V_f(x,y) = o\big(B_f(x,y)^2\big)$$

uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini dans un sous-domaine prescrit de la région asymptotique (1·22). Sous l'hypothèse supplémentaire $y > (\log x)^{1+\delta}$ où δ est une constante positive arbitraire, cette condition est également nécessaire.

Alladi [1] a, le premier, remarqué que l'on peut obtenir, dans le cas $f = \omega$ et pour le domaine $\exp\{(\log x)^{2/3}\} \leqslant y \leqslant x$, une estimation de la variance asymptotiquement meilleure que l'espérance de la loi de répartition correspondante. L'étude de Hildebrand — voir [17], remarque (ii) p. 83 — suggère,(2) dans le cas de la fonction $\Omega(n) := \sum_{p^\nu \| n} \nu$, que ce phénomène apparaît lorsque

$$y \geqslant \log x, \qquad u/\log_2 y \to \infty. \tag{1·24}$$

Le Corollaire 5.3, qui englobe à la fois les résultats de [1] et [17] cités ci-dessus, signifie qualitativement que le phénomène de petite variance se produit lorsque, pour un nombre complexe λ convenable, la fonction $|f - \lambda \log|$ est petite en moyenne sur les puissances de nombres premiers.

1·4. Théorème d'Erdős–Wintner

Notre première application du Théorème 1.1 consiste à en déduire un théorème de type Erdős–Wintner pour les entiers friables. Nous exprimons notre résultat à l'aide de la distance de Lévy, définie, sur l'ensemble des couples (F,G) de fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$, par la formule

$$L(F,G) := \inf\big\{w > 0 : F(z-w) - w \leqslant G(z) \leqslant F(z+w) + w \ (\forall z \in \mathbb{R})\big\}.$$

2. Voir la remarque (ii) après l'énoncé du Corollaire 5.3 pour un commentaire plus détaillé sur ce point.

On sait classiquement que la topologie associée à cette distance est celle de la convergence faible des fonctions de répartition.

Soit f une fonction additive. Posons

$$G_{x,y,f}(z) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ f(n) \leqslant z}} 1,$$

et, pour $T \geqslant 2$, $p \geqslant 2$, définissons une fonction multiplicative χ_T par

$$\chi_T(p^\nu) := \begin{cases} 1 & \text{si } p^\nu \leqslant T, \\ 0 & \text{si } p^\nu > T. \end{cases} \tag{1·25}$$

Écrivons encore $\nu_T(p) := [(\log T)/\log p]$ et, avec la notation (1·14),

$$h_T(m;\alpha) := \prod_{p \mid m} \frac{g_p(\alpha)}{g_p(\alpha) + 1/p^{\alpha\{\nu_T(p)+1\}}}.$$

On a, pour tout $\alpha > 0$,

$$H(\alpha, T) := \sum_{m \geqslant 1} \frac{\chi_T(m) h_T(m;\alpha)}{m^\alpha} = \prod_{p \leqslant T} \Big(1 - p^{-\alpha} + p^{-\alpha\{1+\nu_T(p)\}}\Big)^{-1}.$$

On définit donc une fonction de répartition $z \mapsto D_{\alpha,T,f}(z)$ par la formule

$$D_{\alpha,T,f}(z) := \frac{1}{H(\alpha,T)} \sum_{f(m) \leqslant z} \frac{\chi_T(m) h_T(m;\alpha)}{m^\alpha}. \tag{1·26}$$

Théorème 1.4. *Soit $R > 0$. Pour tout $T \geqslant 2$, il existe $y_0 = y_0(R,T)$ tel que l'on ait*

$$L\big(G_{x,y,f}, D_{\alpha,T,f}\big) \ll \eta^{1/3}$$

uniformément pour $x \geqslant y \geqslant y_0$ et toute fonction additive réelle f satisfaisant à

$$\begin{gathered} \Bigg| \sum_{\substack{T < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y \\ |f(p^\nu)| > R}} \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \Bigg| \leqslant \eta, \qquad \Bigg| \sum_{\substack{T < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y \\ |f(p^\nu)| \leqslant R}} \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) \Bigg| \leqslant \eta, \\ \Bigg| \sum_{\substack{T < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y \\ |f(p^\nu)| \leqslant R}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) \Bigg| \leqslant \eta. \end{gathered} \tag{1·27}$$

En particulier, si x et y tendent vers l'infini de telle sorte que $x \geqslant y$ et

$$\alpha(x,y) \to \alpha^* \in [0,1],$$

et si les trois valeurs absolues de (1·27) sont uniformément majorées par une fonction de T qui tend vers 0 lorsque $T \to \infty$, alors il existe une fonction de répartition $z \mapsto D^*(z)$ telle que l'on ait

$$\frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{\substack{n \in S(x,y)\\ f(n) \leqslant z}} 1 = D^*(z) + o(1)$$

pour tout point de continuité z de D^*.

Lorsque les conditions du Théorème 1.4 pour l'existence de la loi limite D^* sont satisfaites, la formule (1·26) permet aisément d'en expliciter la fonction caractéristique φ : nous avons

$$\varphi(\tau) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\tau z}\,\mathrm{d}D^*(z) = \lim_{x,y\to\infty} \prod_{p \leqslant y} \Bigg\{ 1 + g_p(\alpha) \sum_{\substack{\nu \geqslant 1\\ p^\nu \leqslant x}} \frac{\mathrm{e}^{i\tau f(p^\nu)} - 1}{p^{\nu\alpha}} \Bigg\}.$$

Cela permet de déterminer des conditions suffisantes simples sur f pour que la fonction de répartition limite D^* soit celle d'une loi de probabilités prescrite à l'avance. Nous voyons ainsi, par exemple, que loi limite est normale lorsque

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x,y\to\infty} \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) = 0, \\ \displaystyle\lim_{x,y\to\infty} \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) = 1, \\ \displaystyle\lim_{x,y\to\infty} \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{|f(p^\nu)|^3}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) = 0, \end{cases}$$

où les limites sont prises sous la condition supplémentaire $\alpha(x,y) \to \alpha^*$. Il en est ainsi, quand $y = \log x$ et donc $\alpha^* = 0$, pour la fonction additive f définie, pour une constante $K > 0$ convenable, par

$$f(p^\nu) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{(p-1)/2}}{K\sqrt{p}} & \text{si } p > 2,\ \nu = 1, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Contrairement au théorème classique d'Erdős–Wintner, qui correspond au cas $x = y$ du Théorème 1.4, les sommes de (1·27) font intervenir les valeurs $f(p^\nu)$ pour $\nu \geqslant 2$. La seconde partie de l'énoncé permet cependant de retrouver la forme usuelle du théorème d'Erdős–Wintner : comme $\lim_{x\to\infty} \alpha(x,x) = 1$ d'après (4·25), les contributions aux sommes de (1·27) des exposants $\nu \geqslant 2$ sont trivialement $o(1)$ lorsque $T \to \infty$. Plus généralement, on peut déduire de notre résultat que l'existence d'une fonction de répartition limite sur les entiers friables ne dépend que des $f(p^\nu)$ avec $1 \leqslant \nu \leqslant k$ si x et y tendent vers l'infini de sorte que $\alpha(x,y) \geqslant 1/(k+1-\delta)$ avec $\delta > 0$.

Nous n'avons pas cherché ici à établir ici un analogue de la condition nécessaire du théorème d'Erdős–Wintner. Quoiqu'un résultat de ce type soit certainement accessible, il devrait, compte tenu du nombre des paramètres du problème, prendre une forme relativement compliquée et serait, finalement, difficilement utilisable.

Notre démonstration, basée sur une idée de Rényi [25] (voir aussi [26]), fournit, dans le cas particulier $x = y$, une preuve très rapide de la condition suffisante du théorème d'Erdős–Wintner.

1·5. Théorème de Daboussi

Comme seconde application du Théorème 1.1, nous obtenons une généralisation du théorème de Daboussi [6] sur les sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs.

Soit

$$E_f(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} f(n)\mathrm{e}(\vartheta n)$$

avec la notation canonique $\mathrm{e}(t) := \exp(2\pi i t)$. D'après [3] (cf. Lemme 8.1, *infra*), il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout nombre irrationnel ϑ fixé, on ait

$$E_{\mathbf{1}}(x,y;\vartheta) = o(\Psi(x,y)) \tag{1·28}$$

uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini de telle sorte que

$$D(x;c) := \exp\{c(\log x \log_2 x)^{2/3}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{1·29}$$

Le résultat suivant étend la relation (1·28) à une large classe de fonctions multiplicatives.

Théorème 1.5. *Soient $Y : [2,\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $D(x;c) \leqslant Y(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 2$ et f une fonction arithmétique multiplicative satisfaisant, pour une constante convenable $K = K_f$,*

$$\sum_{n\in S(x,y)} |f(n)|^2 \leqslant K\Psi(x,y) \qquad (x \geqslant 2,\ Y(x) \leqslant y \leqslant x). \tag{1·30}$$

Alors, pour tout nombre irrationnel ϑ, on a

$$E_f(x,y;\vartheta) = o(\Psi(x,y)) \tag{1·31}$$

uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini dans le domaine $Y(x) \leqslant y \leqslant x$.

Ce théorème apporte un élément de réponse supplémentaire à la question posée par Dupain, Hall et Tenenbaum dans [9] concernant les conditions suffisantes pour qu'une fonction multiplicative f vérifie

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)e(\vartheta n) = o\Big(\sum_{n\leqslant x}|f(n)|\Big)$$

pour tout nombre irrationnel ϑ. D'autres progrès ont été accompli sur ce problème par Daboussi [7].

1·6. Les facteurs premiers d'un entier friable

Soit $\{p_j(n)\}_{j=1}^{\omega(n)}$ la suite croissante des facteurs premiers distincts d'un entier générique n. Notre troisième et dernière application du Théorème 1.1 concerne l'ordre normal des fonctions p_j lorsque n parcourt l'ensemble des entiers y-friables.

Considérons la fonction additive paramétrée

$$\omega_t(n) := \sum_{\substack{p\mid n\\ p\leqslant t}} 1.$$

On a $\omega_t(n) = j$ si, et seulement si, $p_j(n) \leqslant t < p_{j+1}(n)$, avec la convention que $p_{j+1}(n) = \infty$ lorsque $j = \omega(n)$. L'inégalité (1·13), qui fournit des renseignements uniformes en t sur $\omega_t(n)$ lorsque n est y-friable, est donc un outil bien adapté à une étude quantitative des fonctions $p_j(n)$ sur $S(x, y)$.

Posons, pour $\alpha = \alpha(x, y)$,

$$M(t) = M_{x,y}(t) := \sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p^\alpha} \qquad (t \geqslant 2).$$

Il résulte de (1·13) que, pour chaque t fixé dans $[2, y]$,

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ |\omega_t(n)-M(t)|>h\sqrt{M(t)}}} 1 \ll \frac{\Psi(x,y)}{h^2} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2,\ h > 0). \tag{1·32}$$

Un raisonnement standard, fondé sur l'introduction de points-tests et tirant parti de la monotonie de la fonction $t \mapsto \omega_t(n)$, permet de déduire de cette majoration un résultat d'approximation de $\omega_t(n)$ uniforme en t.

Théorème 1.6. *Soient $b > 1$ une constante et T_x une fonction positive tendant vers l'infini avec x. Il existe une fonction ε_x telle que $\lim_{x\to\infty}\varepsilon_x = 0$ ayant la propriété suivante : pour tous les entiers n de $S(x, y)$ sauf au plus $\varepsilon_x\Psi(x, y)$ d'entre eux et pour $T_x \leqslant t \leqslant y \leqslant x$, on a*

$$|\omega_t(n) - M(t)| \leqslant M(t)^{2/3}\{\log M(t)\}^{b/3}. \tag{1·33}$$

Remarques. (i) Des évaluations précises de $M(t)$ sont fournies au Lemme 9.1 *infra.*

(ii) Lorsque $x = y$, on a $M(t) = \log_2 2t + O(1)$ et, en vertu de la version arithmétique de la loi du logarithme itéré, l'encadrement (1·33) a lieu, pour tout $\varepsilon > 0$, avec le majorant $\sqrt{(2+\varepsilon)\log_2 t \log_4 t}$ — cf. [14], chap. 2. Ce résultat est optimal au sens où l'on ne peut y remplacer $2+\varepsilon$ par $2-\varepsilon$.

(iii) L'exposant $2/3$ apparaissant dans (1·33) est caractéristique de l'emploi de l'inégalité de Turán–Kubilius dans ce problème, ce qui correspond à une estimation de type Bienaymé–Tchébychev en théorie des probabilités. Une technique plus sophistiquée reposant sur des analogues arithmétiques des bornes exponentielles fournirait probablement la valeur attendue $1/2$.

Comme annoncé plus haut, nous pouvons déduire du Théorème 1.6 une évaluation uniforme de $p_j(n)$ valable pour presque tous les entiers n de $S(x,y)$. Étant donné un paramètre $b > 1$ fixé, nous posons

$$H_{x,y} := \log\Big(2 + \frac{\log y}{\log 2u}\Big), \qquad H^*_{x,y} := H_{x,y} + H_{x,y}^{2/3}\big\{\log(3 + H_{x,y})\big\}^{b/3}.$$

Corollaire 1.7. *Soient $b > c > 1$ deux constantes et J_x une fonction positive tendant vers l'infini avec x. Il existe une fonction ε_x telle que $\lim_{x\to\infty}\varepsilon_x = 0$ et vérifiant la propriété suivante : pour tous les entiers n de $S(x,y)$ sauf au plus $\varepsilon_x\Psi(x,y)$ d'entre eux et pour $J_x \leqslant j \leqslant \omega(n)$, $2 < y \leqslant x$, on a*

$$\begin{cases} |\log_2 p_j(n) - j| \leqslant j^{2/3}(\log j)^{b/3} & \text{si } j \leqslant H^*_{x,y}, \\ \log p_j(n) = \dfrac{\log j_{x,y} + \log_2 j_{x,y} + O(1)}{1-\alpha} & \text{si } j > H^*_{x,y}, \end{cases} \tag{1·34}$$

où l'on a posé $j_{x,y} := j - H_{x,y}$.

On a $H_{x,x} = \log_2 x + O(1)$. En vertu du théorème de Hardy et Ramanujan, seule la première des relations (1·34) est donc à considérer lorsque $x = y$. Comme indiqué plus haut, on déduit alors de la loi du logarithme itéré que, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$|\log_2 p_j(n) - j| \leqslant \sqrt{(2+\varepsilon) j \log_2 j} \qquad (J_x \leqslant j \leqslant \omega(n))$$

pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $o(x)$. Voir, par exemple, [14], chap. 2.

La formule (1·34) met en évidence le phénomène suivant : les « petits » facteurs premiers d'un entier friable se comportent statistiquement comme ceux d'un entier normal ordinaire, alors que les « grands » subissent un considérable effet de tassement. Lorsque, par exemple, $y \leqslant (\log x)^{1+o(1)}$, et donc $\alpha = o(1)$, nous avons, pour presque tout entier n de $S(x,y)$,

$$p_j(n) = p_j^{1+o(1)} \qquad (J_x \leqslant j \leqslant \omega(n)),$$

où p_j est le j-ème nombre premier.

1·7. Commentaires historiques et méthodologiques

L'inégalité (1·9) a été initialement établie par Turán, d'abord [33] pour la fonction

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1,$$

puis [34] pour les fonctions bornées sur l'ensemble des nombres premiers. Kubilius [21], [22], a par la suite généralisé le résultat à toutes les fonctions additives.

Ainsi qu'il a été souligné au paragraphe 1.2, l'obtention d'une inégalité de Turán–Kubilius friable est conditionnée par la qualité des estimations disponibles pour la quantité (1·11). Lorsque x/p^ν est assez grand devant y, on peut utiliser la formule (1·4). On obtient ainsi pour approximation de (1·11) la quantité

$$\varrho(u - u_{p^\nu})/\{p^\nu \varrho(u)\} \tag{1·35}$$

où l'on a posé

$$u_d := (\log d)/\log y.$$

C'est la voie suivie en 1982 par Alladi [1] — avec bien entendu la version de (1·4) disponible à cette époque. Il obtient ainsi, pour les fonctions complexes fortement additives, l'extension de (1·9)

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x,y)} |f(n) - \eta_f(x, y)|^2 \ll \vartheta_f(x, y), \tag{1·36}$$

dans le domaine

$$\exp(\log x)^{2/3} \leqslant y \leqslant x$$

avec

$$\eta_f(x, y) := \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)\varrho(u - u_p)}{p\varrho(u)}, \qquad \vartheta_f(x, y) := \sum_{p \leqslant y} \frac{|f(p)|^2 \varrho(u - u_p)}{p\varrho(u)}.$$

Il est à noter que l'insertion de (1·4) dans la preuve d'Alladi fournit immédiatement le domaine de validité

$$\exp\left\{\sqrt{\log x \log_2 x}\right\} \leqslant y \leqslant x.$$

La majoration (1·36) a été étendue par Xuan [35], [36] à toutes les fonctions additives pour le domaine restreint

$$\exp\{(\log x)^{1/2+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x^{1/\log_2 x} \qquad (\varepsilon > 0)$$

avec maintenant

$$\eta_f(x, y) := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)\varrho(u - u_{p^\nu})}{p^\nu \varrho(u)}, \quad \vartheta_f(x, y) := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{|f(p^\nu)|^2 \varrho(u - u_{p^\nu})}{p^\nu \varrho(u)}. \tag{1·37}$$

Au prix d'une rédhibitoire complication de ces définitions,(3) Xuan, dans les mêmes travaux, établit la validité de l'analogue de (1·36) dans la région

$$(\log x)^{c+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x^{1/\log_2 x}$$

où ε est un nombre positif arbitraire et où l'on a posé $c = 1$ lorsque f est fortement additive, $c = 2$ dans le cas général.

2. Le cas classique revisité : $C(x, x) = 2 + o(1)$

Nous établissons ici (1·20). À cette fin, nous utilisons, sans en rappeler explicitement la définition, les coefficients $\lambda_j(f; x)$ introduits par Hildebrand dans [15] comme des produits scalaires, pour une structure adéquate, de f avec les éléments d'une famille asymptotiquement orthonormale de fonctions additives. Avec ces notations et en posant

$$N_k := \sum_{1\leqslant j\leqslant k} |\lambda_j(f;x)|^2,$$

le résultat principal de [15] peut être énoncé sous la forme

$$V_f(x,x) = \{1+o(1)\}B_f^*(x)^2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{(-1)^j}{j}|\lambda_j(f;x)|^2 + o(N_k)$$

uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, lorsque $k = k(x)$ tend vers l'infini avec x suffisamment lentement.(4) De plus, il résulte des calculs menés dans [15] pp. 168-9 que l'on a, sous les mêmes hypothèses,

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k/2} \frac{|\lambda_{2j}(f;x)|^2}{2j} \leqslant \{\tfrac12 + o(1)\} \sum_{p\leqslant x} |f(p)|^2 \omega_x(p)\Big(1-\frac1p\Big) \leqslant \{\tfrac12 + o(1)\} B_f^*(x)^2.$$

Nous obtenons donc

$$V_f(x,x) \leqslant \{1+o(1)\}B_f^*(x)^2 + \sum_{p\leqslant x} \frac{|f(p)|^2}{2p}\Big(1-\frac1p\Big) - \sum_{0\leqslant j\leqslant (k-1)/2} \frac{|\lambda_{2j+1}(f;x)|^2}{2j+1} + o(N_k).$$

Comme

$$N_k \leqslant k \sum_{0\leqslant j\leqslant (k-1)/2} \frac{|\lambda_{2j+1}(f;x)|^2}{2j+1} + \{\tfrac12 + o(1)\}kB_f^*(x)^2,$$

---

3. Xuan remplace dans la définition (1·37) la fonction d'une variable ϱ par la fonction de deux variables

$$\varrho_y^*(u) := \frac{y^{u(\alpha-1)}\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}$$

avec $\alpha = \alpha(y^u, y)$. Cela correspond à une estimation de (1·11) par insertion brute de (1·2).

4. Rappelons que $B_f^*(x)$ est défini en (1·18).

il s'ensuit finalement que, pour k tendant assez lentement vers l'infini,

$$V_f(x,x) \leqslant \{1+o(1)\}B_f^*(x)^2 + \sum_{p\leqslant x} \frac{|f(p)|^2}{2p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big). \tag{2·1}$$

Compte tenu de l'estimation (4·25) *infra* pour $\alpha(x,x)$, il résulte de (2·1) que

$$V_f(x,x) \leqslant \{1+o(1)\}\mathbb{V}(Z_{f,x,x}) + R_1 + R_2,$$

avec

$$R_1 := \sum_{p\leqslant x}\Big\{w_x(p) - \frac{1}{2p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\}|f(p)|^2 + \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}}\Big\{w_x(p^\nu) - \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{1}{p^\nu}\Big\}|f(p^\nu)|^2$$

et, en posant $\nu_p := [(\log x)/\log p]$,

$$\begin{aligned}
R_2 &:= \sum_{p\leqslant x}\Big\{\Big|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big|^2 - \Big|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} w_x(p^\nu)f(p^\nu)\Big|^2\Big\}\\
&\leqslant \frac{2}{x}\sum_{p\leqslant x}\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}|f(p^\nu)|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu}\\
&\ll \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\Big(\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}p^\nu\Big)^{1/2}\Big(\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\Big) \ll \frac{B_f(x,x)^2}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Pour estimer R_1, nous observons d'abord que

$$\mathbb{V}(Z_{f,x,x}) \geqslant \{1+o(1)\}\mathbb{V}(Z_{f,x})$$

et, pour tout $\varepsilon\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big|^2\\
&\qquad\leqslant (1+\varepsilon)\Big|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p/2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big|^2 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\Big|\sum_{\nu_p/2<\nu\leqslant\nu_p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big|^2\\
&\qquad\leqslant (1+\varepsilon)\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p/2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu+1}} + \frac{2}{\varepsilon\sqrt{x}}\sum_{\nu_p/2<\nu\leqslant\nu_p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}.
\end{aligned}$$

En choisissant par exemple $\varepsilon = x^{-1/4}$, nous obtenons

$$\{1+o(1)\}\mathbb{V}(Z_{f,x}) \geqslant \sum_{p^\nu\leqslant\sqrt{x}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu} + \sum_{\sqrt{x}<p^\nu\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}. \tag{2·2}$$

Comme la majoration $w_x(p^\nu)\leqslant(1-1/p)p^{-\nu}+\min(1/p^{\nu+1},1/x)$ implique

$$\begin{cases} w_x(p)-\dfrac{1}{2p}\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)\leqslant\dfrac{1+o(1)}{p}\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)^2 & \text{si } p\leqslant\sqrt{x}\\ w_x(p)-\dfrac{1}{2p}\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)\leqslant\dfrac{1}{p}\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big) & \text{si } p>3,\\ w_x(p^\nu)-\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)\dfrac{1}{p^\nu}\leqslant\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)\dfrac{1}{p^\nu} & \text{si } \nu\geqslant 2,\end{cases}$$

il s'ensuit que

$$R_1\leqslant\{1+o(1)\}\mathbb{V}(Z_{f,x,x}).$$

Cela établit bien les deux majorations contenues dans (1·20). Pour établir que ces inégalités asymptotiques sont optimales, il suffit de considérer la fonction additive f définie par

$$f(p^\nu):=\begin{cases}1 & \text{si } p=2 \text{ et } 2^\nu\leqslant x<2^{\nu+1},\\ 0 & \text{dans tous les autres cas.}\end{cases}$$

On a en effet dans ce cas

$$\begin{aligned} A_f(x,x)&=B_f(x,x)^2=\frac{1-2^{-\alpha}}{2^{\nu\alpha}}\sim\frac{1}{2^{\nu+1}},\\ \mathbb{V}(Z_{f,x})&=B_f(x,x)^2-A_f(x,x)^2\sim\frac{1}{2^{\nu+1}}\\ V_f(x,x)&=\frac{1-2^{1-\nu\alpha}(1-2^{-\alpha})}{[x]}+\frac{(1-2^{-\alpha})^2}{2^{2\nu\alpha}}\sim\frac{1}{x},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'estimation (4·25) pour $\alpha(x,x)$.

3. Préliminaires

3·1. Point-selle

Nous rassemblons dans l'énoncé suivant les estimations explicites de $\alpha(x,y)$ dont nous aurons l'usage, et qui sont établies dans [18], formules (7·8) et théorème 2, ou [30], formules (III.5·73) et (III.5·12).

Pour $v>0$, nous définissons $\xi(v)$ comme l'unique solution réelle positive de l'équation

$$1+v\xi=\mathrm{e}^\xi \tag{3·1}$$

lorsque $v\neq 1$ et nous posons $\xi(1)=0$. On a[5]

$$\xi(v)=\log(v\log v)+O(\log_2 v/\log v)\qquad(v\geqslant 3). \tag{3·2}$$

Enfin, nous posons

$$L_\varepsilon(y):=\exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}\qquad(\varepsilon>0,\ y\geqslant 2).$$

5. Voir le lemme 1 de [18] ou le lemme III.5.8.1 de [30]

Lemme 3.1. *On a*

$$\alpha(x,y)=\frac{\log(1+y/\log x)}{\log y}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}\qquad(x\geqslant y\geqslant 2).\tag{3·3}$$

Plus précisément, pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{\xi(u)}{\log y}+O\Big(\dfrac{1}{L_\varepsilon(y)}+\dfrac{1}{u(\log y)^2}\Big) & ((\log x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x),\\ \dfrac{\log(1+y/\log x)}{\log y}\Big\{1+O\Big(\dfrac{1}{\log y}\Big)\Big\} & (2\leqslant y\leqslant(\log x)^2).\end{cases}\tag{3·4}$$

Nous notons que (3·3) implique

$$\frac{\overline{u}+\log y}{u\log y}\ll\alpha(x,y)\ll\frac{\overline{u}}{u},\tag{3·5}$$

où $\overline{u}$ est défini en (1·3). De l'estimation classique

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p-1}=\log x-\gamma+o(1)\qquad(x\to\infty),$$

où γ désigne la constante d'Euler, nous déduisons aussi que l'on a, pour une constante convenable x_0,

$$\alpha(x,y)<1\qquad(x>x_0,\ x\geqslant y\geqslant 2).\tag{3·6}$$

Posons

$$\begin{gathered}\varphi_0(s,y):=\log\zeta(s,y),\quad \varphi_k(s,y):=\varphi_0^{(k)}(s,y),\\ \sigma_k:=(-1)^k\varphi_k(\alpha,y)\quad(k\in\mathbb{N}).\end{gathered}\tag{3·7}$$

Il a été établi dans [18] que l'on a, uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$,

$$\sigma_2=\sum_{p\leqslant y}\frac{p^\alpha(\log p)^2}{(p^\alpha-1)^2}=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log(\overline{u}+1)}\Big)\Big\}\Big(1+\frac{\log x}{y}\Big)(\log x)\log y.\tag{3·8}$$

Nous ferons également usage des relations

$$\sigma_k\asymp(u\log y)^k/(\overline{u})^{k-1}\qquad(k\geqslant 1),\tag{3·9}$$

établies aux lemmes 2 et 4 de [18].

3·2. Moyennes pondérées des $f(p^\nu)$

Rappelons la définition (1·3) de $\overline{u}$.

Lemme 3.2. *On a*

$$\sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\ll\overline{u}+\log_2 y\quad(x\geqslant y\geqslant 2).\tag{3·10}$$

De plus, pour chaque entier $k\geqslant 1$ fixé,

$$\sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big(\frac{\log p^\nu}{\log y}\Big)^k\ll_k\overline{u}+\frac{\overline{u}}{(\alpha\log y)^k}\quad(x\geqslant y\geqslant 2).\tag{3·11}$$

Démonstration. Désignons par T_k l'expression figurant au membre de gauche de (3·11). On a pour $k\geqslant 0$

$$T_k\leqslant\sum_{p\leqslant y}\Big(\frac{\log p}{\log y}\Big)^k g_p(\alpha)\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\nu^k}{p^{\nu\alpha}}\ll_k\sum_{p\leqslant y}\Big(\frac{\log p}{\log y}\Big)^k\frac{1}{p^\alpha g_p(\alpha)^k}.$$

Lorsque $y\leqslant\log x$, nous obtenons

$$T_k\ll\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{(\log y)^k\alpha^k}\ll\frac{\pi(y)}{(\alpha\log y)^k}\ll\frac{\overline{u}}{(\alpha\log y)^k},$$

grâce à (3·3). Cela implique bien (3·10) et (3·11) dans ce cas.

Lorsque $y>\log x$, on a $\alpha\log y\gg 1$. Pour toute constante $\kappa>0$ fixée assez petite pour que $\mathrm{e}^{\kappa/\alpha}\leqslant y$, on peut donc écrire

$$T_0\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p^\nu\leqslant x}}\frac{1}{p^{\nu\alpha}}\ll\sum_{p\leqslant\exp\{\kappa/\alpha\}}\frac{1}{\alpha\log p}+\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha}.\tag{3·12}$$

La première somme est $\ll\alpha\mathrm{e}^{\kappa/\alpha}$. Pour κ assez petite, cette majoration est $\ll u$: on a $\alpha\gg 1$ si $y>(\log x)^3$ et $u\gg\sqrt{y}$ dans le cas contraire. De plus, d'après le lemme 3.5 de [4],

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha}=\log_2 y+\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\int_1^w t\xi'(t)\,\mathrm{d}t+O(1)\tag{3·13}$$

avec $w:=\{y^{1-\alpha}-1\}/(1-\alpha)\log y$. Le lemme 3 de [18] garantissant que l'on a $w\asymp\overline{u}$ uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$, nous obtenons ainsi que le membre de droite de (3·13), et donc aussi celui de (3·12), est bien $\ll u+\log_2 y$.

Maintenant, on a, pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\log p}{\log y}\Big)^k \dfrac{1}{g_p(\alpha)^k} \ll \Big(\dfrac{\log p}{\log y}\Big)^k \dfrac{1}{(\alpha \log p)^k} \ll \dfrac{1}{(\alpha \log y)^k} \ll 1 & (\alpha \log p \leqslant \kappa), \\ \Big(\dfrac{\log p}{\log y}\Big)^k \dfrac{1}{g_p(\alpha)^k} \ll \Big(\dfrac{\log p}{\log y}\Big)^k \dfrac{1}{g_p(\alpha)} \ll \dfrac{1}{\log y} \dfrac{\log p}{1 - p^{-\alpha}} & (\alpha \log p \geqslant \kappa). \end{cases}$$

Lorsque $k \geqslant 1$, $\log x < y \leqslant x$, nous pouvons donc écrire

$$T_k \ll \alpha\, \mathrm{e}^{\kappa/\alpha} + \frac{1}{\log y} \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} \ll u.$$

Cela complète la preuve de (3·11). □

Corollaire 3.3. *On a, uniformément pour toute fonction additive f et $x \geqslant y \geqslant 2$,*

$$A_f(x,y) = \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) \ll B_f(x,y) \sqrt{\overline{u} + \log_2 y}. \tag{3·14}$$

De plus, pour tout entier $k \geqslant 1$ fixé, on a, dans les mêmes circonstances,

$$\sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) \Big(\frac{\log p^\nu}{\log y}\Big)^k \ll_k B_f(x,y) \sqrt{\overline{u}} \Big\{1 + \frac{1}{(\alpha \log y)^k}\Big\}. \tag{3·15}$$

Démonstration. Les estimations annoncées résultent de (3·10) et (3·11) par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

3·3. Comportement local de $\Psi_m(x,y)$

Ainsi qu'il a été souligné dans l'introduction, notre preuve de l'inégalité de Turán–Kubilius (1·13) repose de manière essentielle sur des estimations concernant le comportement local de $\Psi_m(x,y)$, défini par (1·10).(6)

Des résultats de cette nature sont établis, par la méthode du col, dans [18] (voir aussi les théorèmes III.5.10 et III.5.11 de [30]) ainsi que dans [12], [13] et [37]. Ils fournissent tous, sous certaines conditions, des formes effectives de l'approximation $\Psi_m(x,y) \approx g_m(\alpha)\Psi(x,y)$, avec la notation (1·14).(7)

Nous avons entrepris une étude systématique de ce problème dans l'article [5], dont les théorèmes 2.3 et 2.4 suffisent à notre présente application. Nous en rappelons ci-dessous les énoncés précis.

6. Compte tenu de la formule $\Psi_m(x,y) = \sum_{\substack{d \mid m \\ P(d) \leqslant y}} \mu(d)\Psi(x/d,y)$, nous pouvons en fait regrouper sous une même rubrique les études de comportement local des deux fonctions $\Psi(x,y)$ et $\Psi_m(x,y)$.

7. Voir [29] pour une description des cas où l'approximation
$$\Psi_m(x,y) \approx g_m(1)\Psi(x,y) = \{\varphi(m)/m\}\Psi(x,y)$$
est pertinente.

Lemme 3.4. *Soient $\varepsilon > 0$, $K > 0$. Sous les conditions*

$$x \geqslant 2, \quad 1 \leqslant d \leqslant x, \quad (\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \leqslant K, \tag{3·16}$$

il existe une constante C ne dépendant que de K telle que l'on ait uniformément par rapport à x, y, d, m,

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = g_m(\alpha)\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\big\{1 + O\big(E(x, y; d)\big)\big\} \tag{3·17}$$

avec

$$E(x, y; d) := \frac{1}{\log y} \log\Big(\frac{u+2}{u+1-t}\Big) + \Big(\frac{d}{x}\Big)^C \tag{3·18}$$

où l'on a posé $t := (\log d)/\log y$.

Lemme 3.5. *Il existe des constantes absolues positives b_1, b_2, et une fonction $b = b(x, y; d, m)$ satisfaisant à $b_1 \leqslant b \leqslant b_2$ $(x \geqslant y \geqslant 2, d \geqslant 1,\ m \geqslant 1)$ telles que l'on ait, uniformément sous les conditions*

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad 1 \leqslant d \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll 1,$$

l'estimation

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \big\{1 + O(H)\big\}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2 + \overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}} \frac{g_m(\alpha)}{d^\alpha}\Psi(x, y) \tag{3·19}$$

où l'on a posé $t := (\log d)/\log y$ et

$$H := \frac{\log(u+1)}{\overline{u}\log(u+1) + \log y} + \frac{t}{u}. \tag{3·20}$$

Remarques. (i) On déduit en particulier de (3·19) que l'on a dans les conditions de l'énoncé

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \ll \frac{g_m(\alpha)}{d^\alpha}\Psi(x, y). \tag{3·21}$$

Une majoration de ce type est intrinsèquement nécessaire à toute preuve de (1·13). Considérons, en effet, une puissance de nombre premier $d = p^\nu$ comptée dans $S(x, y)$. L'inégalité de Turán–Kubilius (1·13) appliquée à la fonction additive f_d, définie par $f_d(n) := 1$ si $p^\nu \| n$ et $f_d(n) := 0$ dans le cas contraire, s'écrit

$$\Big(1 - \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big)^2 \Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big) + \frac{g_p(\alpha)^2}{p^{2\nu\alpha}}\Big\{\Psi(x, y) - \Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big)\Big\} \leqslant C\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Psi(x, y),$$

d'où l'on déduit aisément, en observant que $g_p(\alpha)p^{-\nu\alpha} \leqslant (1-p^{-\alpha})p^{-\alpha} \leqslant \frac{1}{4}$, que

$$\Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big) \leqslant \tfrac{16}{9} C \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \Psi(x, y).$$

(ii) Il découle immédiatement de (3·19) qu'il existe une constante absolue u_0 telle que

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \gg \frac{g_m(\alpha)}{d^\alpha} \Psi(x, y) \qquad \big(y \geqslant 2,\ x \geqslant y^{u_0},\ 1 \leqslant d \leqslant y^{\sqrt{u}}\big). \tag{3·22}$$

3·4. Dérivées logarithmiques de $g_m(\alpha)$

Nous aurons l'usage du résultat suivant, relatif aux dérivées logarithmiques de g_m et établi dans [5] (lemme 3.13). Nous posons

$$\gamma_m(s) := \log g_m(s) \quad (\sigma > 0), \quad z_m := p_{\omega(m)},$$

où p_j désigne le j-ème nombre premier.

Lemme 3.6. *On a uniformément pour* $0 < \sigma < 1$ *et* $\Re e\, s = \sigma$

$$\begin{aligned} |\gamma_m'(s)| &\leqslant \gamma_m'(\sigma) \ll \frac{z_m^{1-\sigma} - 1}{(1 - z_m^{-\sigma})(1-\sigma)}, \\ |\gamma_m''(s)| &\leqslant |\gamma_m''(\sigma)| \ll \frac{(z_m^{1-\sigma} - 1)\log z_m}{(1 - z_m^{-\sigma})^2(1-\sigma)}. \end{aligned} \tag{3·23}$$

3·5. La fonction $r(v)$

Considérons la dérivée logarithmique

$$r(v) := \frac{-\varrho'(v)}{\varrho(v)} = \frac{\varrho(v-1)}{v\varrho(v)} \qquad (v > 0). \tag{3·24}$$

Nous rassemblons dans l'énoncé suivant les estimations nécessaires concernant la fonction $r(v)$ et ses dérivées.

Lemme 3.7. *On a, uniformément pour* $v \geqslant 1$,

$$r(v) = \xi(v) + O(1/v), \tag{3·25}$$

$$r'(v) = \xi'(v) + O(1/v^2), \tag{3·26}$$

$$r''(v) \ll 1/v^2. \tag{3·27}$$

Démonstration. Il est établi dans [13], p. 504,[8] que l'on a

$$r(v) - \xi(v) = -\tfrac{1}{2}\xi(v)\Big\{\frac{\xi''(v)}{\xi'(v)} + \xi'(v)\Big\} + \frac{1}{v} + O\Big(\frac{\log 2v}{v^2}\Big) \qquad (v \geqslant 1).$$

8. Nous rectifions ici la formule énoncée dans ce travail, qui comporte une légère erreur, sans incidence sur la suite des calculs de [13].

Compte tenu des évaluations — cf. formule (6·5) de [13] —

$$\xi^{(j)}(v) = (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{v^j}\Big\{1 + O_j\Big(\frac{1}{\log 2v}\Big)\Big\} \qquad (j \geqslant 1,\ v \geqslant 1), \tag{3·28}$$

que l'on peut facilement établir par récurrence sur j en dérivant j fois l'équation fonctionnelle (3·1), on en déduit bien (3·25).

L'évaluation (3·26) est une conséquence simple de (3·25) et (3·27). Admettons, en effet, momentanément (3·27). Supposant, sans perte de généralité, $v \geqslant 2$ d'où $\xi(v) \geqslant \xi(2) > 1$, $r(v) \geqslant r(2) > 1$, nous avons alors $r(v) - r(v-1) = r'(v) + O(1/v^2)$, et donc, d'après la formule (6·9) de [13],

$$r'(v) = r(v)\big\{r(v) - r(v-1) - 1/v\big\} = r(v)\big\{r'(v) - 1/v + O(1/v^2)\big\}, \tag{3·29}$$

d'où

$$r'(v) = \frac{r(v)}{v\{r(v)-1\}} + O\Big(\frac{1}{v^2}\Big).$$

Par ailleurs, on a

$$\xi'(v) = \frac{\xi(v)}{1 + v\{\xi(v)-1\}} = \frac{\xi(v)}{v\{\xi(v)-1\}} + O\Big(\frac{1}{v^2\log(2v)}\Big).$$

Nous obtenons donc par différence

$$r'(v) - \xi'(v) = \frac{1}{v}\Big(\frac{r(v)}{r(v)-1} - \frac{\xi(v)}{\xi(v)-1}\Big) + O\Big(\frac{1}{v^2}\Big) \ll \frac{1}{v^2},$$

en vertu de (3·25).

Il reste à établir (3·27). Posons $s(v) := r'(v)/r(v) = r(v) - r(v-1) - 1/v$, de sorte que $s(v) \ll 1/v\log(2v)$ $(v \geqslant 1)$ d'après la formule (6·8) de [13]. En dérivant l'identité $r'(v) = r(v)s(v)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{r''(v)}{r(v)} &= s(v)^2 + r'(v) - r'(v-1) + \frac{1}{v^2}\\ &= s(v)^2 + r(v)s(v) - r(v-1)s(v-1) + \frac{1}{v^2}\\ &= s(v)^2 + r(v)\{s(v) - s(v-1)\} + s(v-1)\{s(v) + 1/v\} + 1/v^2\\ &= r(v)\Big(r(v) - 2r(v-1) + r(v-2) + \frac{1}{v^2}\Big) + \frac{1}{v^2} + O\Big(\frac{1}{v^2\log(2v)}\Big).\end{aligned} \tag{3·30}$$

À ce stade, nous procédons comme dans [13], p. 504, en utilisant un développement de $\varrho(v)$ à l'ordre 3. Le théorème 1 de [27] fournit l'estimation

$$\varrho(v) = \sqrt{\frac{\xi'(v)}{2\pi}}\exp\Big\{\gamma - \int_1^v \xi(w)\,\mathrm{d}w\Big\}\big(1 + h(v) + O(1/v^3)\big)$$

où γ est la constante d'Euler et h est une fonction vérifiant

$$h(v) \ll 1/v, \qquad h'(v) \ll 1/v^2, \qquad h''(v) \ll 1/v^3 \qquad (v \geqslant 1).$$

Il suit

$$r(t) = \xi(t)\{1 - h'(t)\} + f(t) + O\Big(\frac{\log(2t)}{t^3}\Big),$$

avec

$$\frac{f(t)}{\xi(t) + 1/t} = \frac{-\xi''(t)}{2\xi'(t)} - \tfrac{1}{2}\xi'(t) + \frac{1}{t\xi(t) + 1} + \frac{\xi'''(t)}{4\xi'(t)} - \frac{\xi''(t)^2}{8\xi'(t)^2} + \tfrac{1}{8}\xi'(t)^2 + \tfrac{5}{12}\xi''(t).$$

On peut alors montrer grâce à (3·28) que $f''(t) \ll (\log 2t)/t^3$. Cela implique

$$r(v) - 2r(v-1) + r(v-2) = \xi''(v) + O\big(\log(2v)/v^3\big),$$

d'où, en reportant dans (3·30),

$$\frac{r''(v)}{r(v)} = r(v)\Big(\xi''(v) + \frac{1}{v^2}\Big) + \frac{1}{v^2} + O\Big(\frac{1}{v^2\log(2v)}\Big). \tag{3·31}$$

Dans [19], Hildebrand et Tenenbaum explicitent une représentation de $\xi(v)$ sous forme d'une série double convergente du type(9)

$$\xi(v) = \log v + \log_2 v + \sum_{m\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1} \frac{c_{mk}}{(\log v)^m}\Big(\frac{1 + v\log_2 v}{v\log v}\Big)^k \qquad (v \geqslant v_0).$$

Par dérivation terme à terme, nous en déduisons que

$$\xi''(v) = -\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2\xi(v)} + O\Big(\frac{1}{v^2(\log 2v)^2}\Big) \qquad (v \geqslant 1).$$

En reportant dans (3·31), nous obtenons bien (3·27). □

3·6. Évaluation d'une covariance

Toute fonction additive peut s'écrire sous la forme

$$f(n) = \sum_{p^\nu \leqslant n} f(p^\nu)\chi_{p^\nu}(n)$$

où

$$\chi_k(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } k|n,\ (k, n/k) = 1,\\ 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

9. Nous rectifions ici une coquille de la formule correspondante de [19].

L'inégalité de Turán–Kubilius peut alors s'interpréter comme un résultat d'indépendance relatif aux χ_{p^ν}. Il est donc naturel que les covariances des couples $(\chi_{p^\nu}, \chi_{q^\mu})$ interviennent de manière essentielle dans la preuve d'un tel résultat. D'après le Lemme 3.5, l'espérance de $\chi_k(n)$ sur l'ensemble $S(x,y)$ (muni de la probabilité uniforme) est bien approchée par $g_k(\alpha)/k^\alpha$. Une approximation de $\mathrm{Cov}(\chi_k, \chi_\ell)$ est donc, sous la condition $(k,\ell)=1$,

$$\frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \Big(\chi_k(n) - \frac{g_k(\alpha)}{k^\alpha}\Big)\Big(\chi_\ell(n) - \frac{g_\ell(\alpha)}{\ell^\alpha}\Big) = \frac{\Delta_{k,\ell}(x,y)}{(k\ell)^\alpha \Psi(x,y)}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta_{k,\ell}(x,y) :=& k^\alpha \ell^\alpha \Psi_{k\ell}\Big(\frac{x}{k\ell}, y\Big) - \ell^\alpha g_k(\alpha)\Psi_\ell\Big(\frac{x}{\ell}, y\Big) \\ &- k^\alpha g_\ell(\alpha)\Psi_k\Big(\frac{x}{k}, y\Big) + g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y).\end{aligned} \tag{3·32}$$

Nous nous proposons ici de donner une évaluation de $\Delta_{k,\ell}(x,y)$ dans un large domaine des quatre variables. Nous posons, avec les notations du Lemme 3.6,

$$v_k(\alpha) := \log k - \gamma_k'(\alpha) \qquad (k \geqslant 1), \tag{3·33}$$

et rappelons que la quantité $\overline{u}$ a été définie en (1·3).

Théorème 3.8. *Soit $K > 0$. Il existe une constante C ne dépendant que de K telle que l'on ait, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $k\ell \leqslant x$, $(k,\ell)=1$, $\omega(k\ell) \leqslant K$, $P(k\ell) \leqslant y$,*

$$\Delta_{k,\ell}(x,y) = g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{ - \frac{v_k(\alpha)v_\ell(\alpha)}{\sigma_2} - \varepsilon_u(\kappa,\lambda) + O\big(R_{k,\ell}(x,y)\big)\Big\}, \tag{3·34}$$

avec

$$\varepsilon_u(\kappa,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{\kappa+\lambda-|u-1-\kappa|-|u-1-\lambda|}{2\varrho(u)\mathrm{e}^{(u-1)\xi(u)}} & \text{si } u \leqslant 2 \text{ et } \kappa+\lambda > u-1, \\ 0 & \text{si } u > 2 \text{ ou } \kappa+\lambda \leqslant u-1, \end{cases}$$

et

$$R_{k,\ell}(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(u+1)}{\log y} + \dfrac{\kappa\lambda(1+\kappa+\lambda)^2}{u^2} + \Big(\dfrac{k\ell}{x}\Big)^C & \text{si } u \leqslant \sqrt{\log y}, \\ \dfrac{1}{\overline{u}^{3/2}} + \dfrac{\overline{u}^{5/2}(\kappa+\lambda)^4}{u^4} & \text{si } u > \sqrt{\log y}, \end{cases}$$

où l'on a posé $\kappa := (\log k)/\log y$, $\lambda := (\log \ell)/\log y$.

De plus, la formule (3·34) reste valable lorsque $k \leqslant x$, $\ell \leqslant x$, $k\ell > x$, $u > \sqrt{\log y}$.

Démonstration. Commençons par considérer les grandes valeurs de y, soit

$$1 \leqslant u \leqslant \sqrt{\log y}. \tag{3·35}$$

On a alors, d'après (3·17) et (3·21),

$$\Delta_{k,\ell}(x,y) = \Delta^*_{k,\ell}(x,y) + O\bigg(g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y)\bigg\{\frac{\log(u+1)}{\log y} + \Big(\frac{k\ell}{x}\Big)^C\bigg\}\bigg) \tag{3·36}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\Delta^*_{k,\ell}(x,y) &:= \\ &g_{k\ell}(\alpha)\bigg\{k^\alpha \ell^\alpha \Psi\Big(\frac{x}{k\ell}, y\Big) - k^\alpha \Psi\Big(\frac{x}{k}, y\Big) - \ell^\alpha \Psi\Big(\frac{x}{\ell}, y\Big) + \Psi(x,y)\bigg\}.\end{aligned} \tag{3·37}$$

Pour estimer la quantité entre accolades dans (3·37), nous utilisons la formule asymptotique (1·4) de Hildebrand, que nous écrivons sous la forme

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{x}\Big)\Big\} \qquad (x \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{(\log_2 3x)^{5/3+\varepsilon}} \leqslant y), \tag{3·38}$$

où le terme en $1/x$ permet de prendre en compte le cas $1 \leqslant x < y$.

La contribution à $\Delta^*_{k,\ell}(x,y)$ du terme d'erreur de (3·38) est

$$\ll g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y)\bigg\{\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{k\ell}{x}\bigg\}.$$

Pour évaluer la contribution à $\Delta^*_{k,\ell}(x,y)$ du terme principal de (1·4), nous introduisons la quantité

$$h_u(t) := \frac{\varrho(u-t)}{\varrho(u)\mathrm{e}^{t\xi(u)}} = \exp\bigg(\int_0^t \{r(u-s) - \xi(u)\}\,\mathrm{d}s\bigg) \qquad (0 \leqslant t \leqslant u), \tag{3·39}$$

où la fonction $r(v)$ est définie en (3·24). Il découle par exemple du corollaire III.5.8.4 de [30] que

$$h_u(t) \ll 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant u). \tag{3·40}$$

On déduit de (3·4) que l'on a uniformément dans le domaine (3·35) et pour $1 \leqslant d \leqslant x$, $t := (\log d)/\log y$,

$$d^{\alpha-1}\varrho(u-t) = \varrho(u)h_u(t)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{3·41}$$

La contribution à $\Delta^*_{k,\ell}(x,y)$ du nouveau terme d'erreur ainsi introduit est clairement englobée par les précédentes. Posant

$$\delta_u(v,w) := h_u(v+w) - h_u(v) - h_u(w) + 1,$$

nous avons donc, toujours sous la condition (3·35),

$$\Delta_{k,\ell}(x,y) = g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y)\bigg\{\delta_u(\kappa,\lambda) + O\bigg(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \Big(\frac{k\ell}{x}\Big)^C\bigg)\bigg\}. \tag{3·42}$$

Il nous faut évaluer $\delta_u(v,w)$. Lorsque $v+w \leqslant u-1$, la fonction h_u est deux fois dérivable sur $[0,v+w]$ et l'on a

$$\delta_u(v,w) = \int_0^v \int_0^w h''_u(s+t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Une majoration de $|h''_u|$ sur $[0,u-1]$ est donc nécessaire. Nous la déduisons de la seconde expression de h_u dans (3·39), qui fournit aisément, par dérivation,

$$\begin{aligned} h'_u(t) &= \{r(u-t) - \xi(u)\}h_u(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant u),\\ h''_u(t) &= \big(\{r(u-t)-\xi(u)\}^2 - r'(u-t)\big)h_u(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant u-1). \end{aligned} \tag{3·43}$$

En utilisant le Lemme 3.7 et la majoration (3·40), nous obtenons alors successivement, pour $0 \leqslant t \leqslant \min\{u/2, u-1\}$,

$$h'_u(t) \ll (t+1)/u, \quad h_u(t) = 1 + O\big(t(t+1)/u\big), \tag{3·44}$$

et

$$h''_u(t) = -r'(u) + O\left((1+t^2)/u^2\right) = -\xi'(u) + O\left((1+t^2)/u^2\right).$$

Il s'ensuit que, sous les conditions $u \geqslant 1$, $v+w \leqslant \min\{u/2, u-1\}$, nous avons

$$\delta_u(v,w) = -\xi'(u)vw + O\bigg(\frac{vw(1+v+w)^2}{u^2}\bigg). \tag{3·45}$$

Nous allons voir que cette estimation persiste également lorsque $u/2 < v+w \leqslant u$ et $u \geqslant 2$. On a, en effet, sous cette hypothèse, $\max(v,w) > u/4$ et (3·45) équivaut à $\delta_u(v,w) \ll u\min(v,w)$. Or, on a, en supposant par exemple $v \leqslant w$,

$$\delta_u(v,w) = \int_0^v \{h'_u(w+t) - h'_u(t)\}\,\mathrm{d}t \ll v\log(u+2) \qquad (0 \leqslant v+w \leqslant u),$$

puisque h'_u est continue sur $[0,u]$ et (3·43), (3·25), (3·2) et (3·40) impliquent $h'_u(s) \ll \log(u+2)$ pour $0 \leqslant s \leqslant u$.

Il reste à examiner le cas $0 \leqslant u \leqslant 2$ et $u-1 < v+w \leqslant u$. Un calcul facile permet de vérifier l'égalité entre mesures sur $[0,u]$

$$\mathrm{d}h_u(s) = h_u''(s)\,\mathrm{d}s - h_u(u-1)\delta_{u-1}(s)$$

où $\delta_a(s)$ désigne la mesure de Dirac au point $s=a$. Il s'ensuit que, pour $0 \leqslant t \leqslant v$, $w \geqslant 0$, $0 \leqslant u-1 < v+w \leqslant u \leqslant 2$,

$$h_u'(w+t) - h_u'(t) = \begin{cases} -h_u(u-1) + O(w) & \text{si } u-1 \in]t, w+t], \\ O(w) & \text{si } u-1 \notin]t, w+t], \end{cases}$$

et donc

$$\delta_u(v,w) = -\varepsilon_u(v,w) + O(vw).$$

Compte tenu de (3·45), nous pouvons donc énoncer que

$$\delta_u(v,w) = -\xi'(u)vw - \varepsilon_u(v,w) + O\Big(\frac{vw(1+v+w)^2}{u^2}\Big) \quad (u \geqslant 1,\ v+w \leqslant u). \tag{3·46}$$

Reportons (3·46) dans (3·42) et utilisons l'évaluation

$$\sigma_2 = \{1 + O(1/\log y)\}(\log y)^2/\xi'(u)$$

établie dans [18], formule (7·19). En remarquant que le Lemme 3.6 implique $\gamma_k'(\alpha) \ll 1$ et $\gamma_\ell'(\alpha) \ll 1$, nous obtenons bien (3·34) pour le domaine (3·35).

Examinons à présent les petites valeurs de y, soit

$$u > \sqrt{\log y}. \tag{3·47}$$

Nous utilisons la méthode du col. La formule de Perron s'écrit, pour $x \in \mathbb{R}^{+*} \smallsetminus \mathbb{N}$,

$$\Delta_{k,\ell}(x,y) = \frac{g_{k\ell}(\alpha)}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} G_k(s) G_\ell(s) \zeta(s,y) \frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s, \tag{3·48}$$

avec

$$G_m(s) := \frac{g_m(s) m^\alpha}{g_m(\alpha) m^s} - 1 \qquad (m \geqslant 1).$$

La première étape de la démonstration consiste à montrer que

$$\Delta_{k,\ell}(x,y) = \frac{g_{k\ell}(\alpha)}{2\pi i} \int_{\alpha-iT_0}^{\alpha+iT_0} G_k(s) G_\ell(s) \zeta(s,y) \frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O\Big(\frac{g_{k\ell}(\alpha)\Psi(x,y)}{\overline{u}^{3/2}}\Big) \tag{3·49}$$

où l'on a posé $T_0 := \overline{u}^{2/3}/(u \log y)$.

Posons, pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$Y_\varepsilon := \exp\{(\log y)^{3/2-\varepsilon}\}, \tag{3·50}$$

et

$$R := \mathrm{e}^{-c_1 u/(\log 2u)^2} + 1/Y_\varepsilon, \qquad T := 1/R^2$$

où c_1 est une constante absolue qui sera précisée plus loin.

La formule (3·49) est établie en trois étapes que nous nous contentons de décrire sommairement, en renvoyant au paragraphe 4.2 de [5] pour les détails. Nous utilisons d'abord, pour tronquer l'intégrale de Perron (3·48) à la hauteur T, l'estimation (4·49) de [5], fournissant une majoration du nombre des entiers friables d'un petit intervalle qui sont premiers avec un entier donné m. Nous établissons ainsi que, pour un choix convenable de c_1, la contribution du domaine $|\tau| > T$ est

$$\ll x^\alpha \zeta(\alpha, y) R \ll \Psi(x, y) R \alpha \sqrt{\sigma_2} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\overline{u}^{3/2}}, \tag{3·51}$$

où la dernière estimation résulte de (3·5) et (3·9). Ensuite, nous faisons appel à l'estimation (4·42) de [5] pour le rapport $|\zeta_m(s, y)|/\zeta_m(\alpha, y)$ lorsque $|\tau| \leqslant T$ et $\omega(m) \ll 1$: nous obtenons ainsi que le membre de droite de (3·51) majore également la contribution du domaine $1/\log y < |\tau| \leqslant T$ à l'intégrale de (3·48). Enfin, nous déduisons de la formule (4·53) de [5] que la contribution du domaine $T_0 < |\tau| \leqslant 1/\log y$ est également dominée par le majorant de (3·48). Cela établit bien (3·49).

La suite de la démonstration consiste à insérer dans l'intégrale de (3·49) un développement de l'intégrande à l'ordre 3. Ici encore, les détails sont semblables à leurs analogues dans la preuve du théorème 2.1 de [5] (§ 4.2) et nous nous limitons à de brèves indications. Posons $\delta := u(\log y)/\overline{u}$, de sorte que $T_0\delta \ll 1/\overline{u}^{1/3} \ll 1$ et, d'après (3·5), $\delta \gg 1/\alpha$. Il résulte donc du Lemme 3.6 que, pour $P(m) \leqslant y$, $\omega(m) \ll 1$, $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| \leqslant T_0$, nous avons

$$G_m(s) = -i\tau v_m(\alpha) + O\big(\tau^2(\delta + \log m)^2\big).$$

Le développement (cf. [18], p. 280)

$$\zeta(s, y)\frac{x^s}{s} = \zeta(\alpha, y)\frac{x^\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{-\tau^2\sigma_2/2}\Big\{C(\tau) + O\Big(\tau^2\alpha^{-2} + \tau^6\sigma_3^2 + \tau^4\sigma_4\Big)\Big\},$$

où

$$C(\tau) := 1 - \frac{i\tau}{\alpha} + \frac{i\tau^3\sigma_3}{6},$$

implique, dans les mêmes conditions,

$$G_k(s)G_\ell(s)\zeta(s, y)\frac{x^s}{s} = -\frac{x^\alpha\zeta(\alpha, y)}{\alpha}\tau^2\mathrm{e}^{-\tau^2\sigma_2/2}\Big\{v_k(\alpha)v_\ell(\alpha)C(\tau) + O\Big(b^2D(\tau)\Big)\Big\}$$

avec $b := \delta + \log(k\ell) \ll (\log y)\big\{(u/\overline{u}) + \kappa + \lambda\big\}$ et

$$D(\tau) := \tau^2\delta^2 + \tau^6\sigma_3^2 + \tau^4\sigma_4 + b|\tau|(1 + b|\tau|).$$

En utilisant l'approximation

$$\int_{-T_0}^{T_0} \tau^2\mathrm{e}^{-\sigma_2\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_2^{3/2}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\},$$

les formules

$$\int_{-T_0}^{T_0} \tau^{1+2k} \mathrm{e}^{-\sigma_2\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad \int_{-T_0}^{T_0} |\tau|^k \mathrm{e}^{-\sigma_2\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau \ll_k \frac{1}{\sigma_2^{(k+1)/2}} \quad (k \in \mathbb{N}), \tag{3·52}$$

et (3·9), nous obtenons bien le résultat indiqué puisque

$$\frac{1}{\overline{u}^{3/2}} + \frac{\overline{u}^{3/2}(\kappa+\lambda)^3}{u^3} + \frac{\overline{u}^2(\kappa+\lambda)^4}{u^4} \ll \frac{1}{\overline{u}^{3/2}} + \frac{\overline{u}^{5/2}(\kappa+\lambda)^4}{u^4}.$$

□

4. Inégalité de Turán–Kubilius : preuve du Théorème 1.1

4·1. Réduction préliminaire

Nous pouvons écrire

$$V_f(x,y) = M_2 - 2\Re e\left\{\overline{A_f(x,y)}M_1\right\} + |A_f(x,y)|^2, \tag{4·1}$$

avec

$$M_1 := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} f(n), \quad M_2 := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} |f(n)|^2.$$

Une interversion de sommations fournit, grâce à l'additivité de f,

$$\Psi(x,y)M_2 = \sum_{p^\nu\in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big) + \sum_{\substack{p^\nu,\, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}\Psi_{pq}\Big(\frac{x}{p^\nu q^\mu}, y\Big).$$

Semblablement,

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)M_1\overline{A_f(x,y)} &= \sum_{p^\nu,\, p^\mu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)f(p^\nu)\overline{f(p^\mu)}}{p^{\mu\alpha}} \Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big)\\ &\quad + \sum_{\substack{p^\nu,\, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{g_q(\alpha)\overline{f(q^\mu)}}{q^{\mu\alpha}} f(p^\nu)\Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big),\end{aligned} \tag{4·2}$$

$$\begin{aligned}|A_f(x,y)|^2 &= \sum_{p^\nu,\, p^\mu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)^2 f(p^\nu)\overline{f(p^\mu)}}{p^{(\mu+\nu)\alpha}} + \sum_{\substack{p^\nu,\, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{g_{pq}(\alpha)f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\\ &= \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)^2 \Bigg|\sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Bigg|^2 + \sum_{\substack{p^\nu,\, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{g_{pq}(\alpha)f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}.\end{aligned} \tag{4·3}$$

En utilisant la notation (3·32) et en posant

$$V_f^*(x,y) := \sum_{\substack{p^\nu,\, q^\mu \in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}\Delta_{p^\nu,q^\mu}(x,y)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}\Psi(x,y)}, \tag{4·4}$$

nous obtenons donc la décomposition

$$V_f(x,y) = V_f^*(x,y) + W_f(x,y), \tag{4·5}$$

avec

$$\begin{aligned} W_f(x,y) := & \sum_{p^\nu \in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} \\ & - 2 \sum_{p^\nu,\, p^\mu \in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)\Re e\left\{f(p^\nu)\overline{f(p^\mu)}\right\}}{p^{\mu\alpha}} \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} \\ & + \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)^2 \bigg| \sum_{\nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \bigg|^2 \\ = & \sum_{p^\nu \in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} - Q_f(x,y) + \Xi_f(x,y), \end{aligned} \tag{4·6}$$

où l'on a posé

$$Q_f(x,y) := \sum_{p\leqslant y} \bigg| \sum_{\nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} f(p^\nu) \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} \bigg|^2 \tag{4·7}$$

et

$$\Xi_f(x,y) := \sum_{p\leqslant y} \bigg| \sum_{\nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} f(p^\nu) \bigg\{ \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} - \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \bigg\} \bigg|^2. \tag{4·8}$$

D'après (3·21), nous avons, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $p^\nu \leqslant x$,

$$\Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big) \ll g_p(\alpha) \frac{\Psi(x,y)}{p^{\nu\alpha}}. \tag{4·9}$$

Il s'ensuit que l'on a pour $x \geqslant y \geqslant 2$

$$\begin{aligned} Q_f(x,y)+\Xi_f(x,y) &\ll \sum_{p\leqslant y}\Bigg|\sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}}\Bigg|^2 \\ &\leqslant \sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} \sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \\ &\leqslant \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{(\nu+1)\alpha}} \ll B_f(x,y)^2, \end{aligned} \tag{4·10}$$

où nous avons fait appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En utilisant une nouvelle fois (4·9), nous obtenons donc immédiatement

$$W_f(x,y) \ll B_f(x,y)^2 \qquad (x\geqslant y\geqslant 2). \tag{4·11}$$

Ainsi (1·13) équivaut à

$$V_f^*(x,y) \ll B_f(x,y)^2. \tag{4·12}$$

Les deux paragraphes suivants, qui correspondent à des sous-domaines complémentaires de la région $x \geqslant y \geqslant 2$, sont consacrés à établir cette estimation. Nous notons ici, à fins de référence ultérieure, la majoration universelle

$$\Delta_{p^\nu,q^\mu}(x,y) \ll g_{pq}(\alpha)\Psi(x,y) \qquad (p\neq q,\ x\geqslant y\geqslant 2), \tag{4·13}$$

qui découle de (3·21).

4·2. Grandes valeurs de y

Nous considérons ici le domaine

$$x\geqslant 2, \qquad \mathrm{e}^{(\log x)^{2/3}} < y \leqslant x, \tag{4·14}$$

c'est-à-dire $u \leqslant \sqrt{\log y}$.

Commençons par estimer la contribution à $V_f^*(x,y)$ des couples (p^ν, q^μ) tels que $p^\nu q^\mu > x$. Dans ce domaine, nous pouvons nous contenter d'appliquer (4·13).

Lorsque, $u > 2$, on a nécessairement $\max(\nu,\mu) \geqslant 2$. Comme $\alpha = 1 + o(1) \geqslant \frac{3}{4}$ sous la condition (4·14), il s'ensuit que, pour tout $c > 0$ fixé,

$$\begin{aligned} \Bigg|\sum_{\substack{p^\nu,\,q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q,\,p^\nu>x^c}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\Bigg| &\leqslant B_f(x,y)^2\Bigg(\sum_{\substack{p^\nu,\,q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q,\,p^\nu>x^c}} \frac{g_{pq}(\alpha)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\Bigg)^{1/2} \\ &\ll B_f(x,y)^2\sqrt{u+\log_2 y}\sqrt{\sum_{\substack{x^c<p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}}\frac{1}{p^{3\nu/4}}} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\log y}, \end{aligned} \tag{4·15}$$

où l'avant-dernière estimation résulte de (3·10). En appliquant cette majoration avec $c = 1/2$, nous obtenons bien le résultat requis.

Lorsque $u \leqslant 2$, on a $\alpha = 1 + O(1/\log x)$ et l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$\Big| \sum_{\substack{p^\nu, q^\mu \in S(x,y)\\ p^\nu q^\mu > x\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha) \frac{f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha} q^{\mu\alpha}} \Big| \leqslant B_f(x,y)^2 \bigg(\sum_{\substack{p^\nu, q^\mu \in S(x,y)\\ p^\nu q^\mu > x\\ p\neq q}} \frac{1}{p^\nu q^\mu} \bigg)^{1/2} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{u}$$

puisque la seconde somme double est

$$\ll \sum_{p^\nu \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{p^\nu} \sum_{x/p^\nu < q^\mu \leqslant x} \frac{1}{q^\mu} + \Big(\sum_{\sqrt{x} \leqslant p^\nu \leqslant x} \frac{1}{p^\nu} \Big)^2 \ll 1 \ll 1/u^2.$$

Au prix d'une erreur

$$\ll B_f(x,y)^2 \Big\{ \frac{1}{u} + \frac{1}{\log y} \Big\},$$

nous pouvons donc nous limiter à évaluer la contribution à $V_f^*(x,y)$ des couples (p^ν, q^μ) tels que $p^\nu q^\mu \leqslant x$.

Dans cette direction, vérifions en premier lieu que l'incidence du terme résiduel de (3·34) est acceptable. Sous la condition (4·14), nous avons

$$R_{p^\nu, q^\mu}(x,y) \ll \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{\kappa\lambda(1+\kappa+\lambda)^2}{u^2} + \Big(\frac{p^\nu q^\mu}{x}\Big)^C \qquad (p^\nu q^\mu \leqslant x) \tag{4·16}$$

avec $\kappa := (\log p^\nu)/\log y$, $\lambda := (\log q^\mu)/\log y$. Comme $\log(u+1) \ll \log_2 y$ sous la condition (4·14) , nous déduisons de (3·14) que la contribution à $V_f^*(x,y)$ du premier terme de cette majoration est toujours

$$\ll B_f(x,y)^2 \frac{(u + \log_2 y)\log_2 y}{\log y} \ll B_f(x,y)^2 \frac{\log_2 y}{\sqrt{\log y}}.$$

Celle du second relève de (3·15) avec $k = 1$ et $k = 3$. Nous obtenons immédiatement qu'elle est

$$\ll B_f(x,y)^2/u.$$

Il reste à évaluer la contribution à $V_f^*(x,y)$ du troisième terme de (4·16).

Lorsque u est borné, une double application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit, compte tenu de l'approximation $\alpha = 1 + O(1/\log x)$,

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\substack{p^\nu q^\mu \in S(x,y)\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha) \frac{f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha} q^{\mu\alpha}} \Big(\frac{p^\nu q^\mu}{x}\Big)^C \Big| &\leqslant B_f(x,y)^2 \bigg(\sum_{\substack{p^\nu q^\mu \in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{1}{p^{\nu\alpha} q^{\mu\alpha}} \Big(\frac{p^\nu q^\mu}{x}\Big)^{2C} \bigg)^{1/2} \\ &\ll \frac{B_f(x,y)^2}{x^C} \bigg(\sum_{\substack{n \leqslant x\\ \omega(n)=2}} n^{2C-1} \bigg)^{1/2} \ll B_f(x,y)^2 \Big(\frac{\log_2 2x}{\log x} \Big)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4·17}$$

où la dernière estimation résulte, par sommation d'Abel, de la majoration classique

$$\sum_{\substack{n\leqslant z\\ \omega(n)=2}} 1 \ll \frac{z\log_2 2z}{\log z} \qquad (z\geqslant 2).$$

Lorsque, disons $u>4$, la contribution au membre de gauche de (4·17) des couples (p^ν, q^μ) tels que $p^\nu q^\mu \leqslant \sqrt{x}$ est clairement $\ll B_f(x,y)^2 x^{-C/2}$. La contribution complémentaire peut être estimée grâce à (4·15) avec $c=1/4$ puisque l'on nécessairement $\max(\nu,\mu)\geqslant 2$. Elle est donc

$$\ll B_f(x,y)^2/\log y.$$

Nous avons donc établi à ce stade que, sous l'hypothèse (4·14), nous avons

$$V_f^*(x,y) = S^* - E_f(x,y) + O\biggl(B_f(x,y)^2\biggl\{\frac{1}{u}+\frac{\log_2 y}{\sqrt{\log y}}\biggr\}\biggr),$$

avec

$$S^* := \frac{-1}{\sigma_2}\sum_{\substack{p^\nu, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{g_{pq}(\alpha)f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}v_{p^\nu}(\alpha)v_{q^\mu}(\alpha)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}, \tag{4·18}$$

$$E_f(x,y) := \sum_{\substack{p^\nu, q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} \frac{g_{pq}(\alpha)f(p^\nu)\overline{f(q^\mu)}}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\varepsilon_u\Bigl(\frac{\log p^\nu}{\log y},\frac{\log q^\mu}{\log y}\Bigr). \tag{4·19}$$

On a $E_f(x,y)=0$ si $u>2$. Lorsque $u\leqslant 2$, nous pouvons écrire, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$E_f(x,y) \ll B_f(x,y)^2\biggl(\sum_{p^\nu q^\mu\in S(x,y)} \frac{\varepsilon_u(\kappa,\lambda)^2}{p^\nu q^\mu}\biggr)^{1/2}, \tag{4·20}$$

où l'on a posé $\kappa := (\log p^\nu)/\log y$, $\lambda := (\log q^\mu)/\log y$. En considérant séparément les trois cas complémentaires

$$\max\{p^\nu,q^\mu\}\leqslant x/y,\quad \min\{p^\nu,q^\mu\}\leqslant x/y<\max\{p^\nu,q^\mu\}\leqslant x,\quad \min\{p^\nu,q^\mu\}>x/y$$

nous obtenons la majoration

$$E_f(x,y)\ll B_f(x,y)^2 \ll B_f(x,y)^2/u.$$

Bornons-nous, par exemple, à fournir les détails dans le troisième cas, les deux autres relevant de traitements similaires. Comme $\varepsilon_u(\kappa,\lambda) \ll u-1$ lorsque $\min(\kappa,\lambda) > u-1$, la contribution correspondante au dernier facteur de (4·20) est

$$\Bigg(\sum_{\substack{p^\nu q^\mu\in S(x,y)\\ p^\nu,q^\mu>x/y}}\frac{(u-1)^2}{p^\nu q^\mu}\Bigg)^{1/2} \ll (u-1)\sum_{x/y<p^\nu\leqslant x}\frac{1}{p^\nu}$$
$$\ll (u-1)\log\Big(\frac{\log 2x}{\log(2x/y)}\Big) \ll 1.$$

Nous pouvons donc finalement énoncer que, dans le domaine (4·14) et avec la notation (4·18),

$$V_f^*(x,y) = S^* + O\bigg(B_f(x,y)^2\Big\{\frac{\log_2 y}{\sqrt{\log y}} + \frac{1}{u}\Big\}\bigg). \tag{4·21}$$

Comme $v_m(\alpha) \ll \log m$ pour $m\in S(x,y)$ sous la condition (4·14), il résulte de (3·15) et (3·9) que nous avons dans cette circonstance

$$S^* \ll B_f(x,y)^2. \tag{4·22}$$

L'inégalité souhaitée (1·13) en résulte grâce à (4·5) et (4·11).

4·3. Petites valeurs de y

Nous établissons ici l'estimation (4·12) dans le sous-domaine

$$2\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^{(\log x)^{2/3}}. \tag{4·23}$$

Nous appliquons (3·34) en majorant la contribution du terme résiduel grâce à (3·14) et (3·15). Avec la notation (4·18), nous obtenons sous la condition (4·23)

$$V_f^*(x,y) = S^* + O\Big(\frac{B_f(x,y)^2}{\sqrt{u}}\Big). \tag{4·24}$$

Comme $v_m(\alpha) \ll (\log m) + 1/\alpha$ lorsque $m\in S(x,y)$ et $\omega(m)\ll 1$, il découle de (3·5), (3·14) et (3·15) que la relation (4·22) a encore lieu sous l'hypothèse (4·23). Cela achève la démonstration de (4·12), et donc de (1·13), dans le domaine (4·23).

4·4. Remarques

Le Théorème 1.1 contient la version classique (1·9) de l'inégalité de Turán–Kubilius, qui correspond au cas $x=y$. En effet, l'estimation

$$\alpha(x,x) = 1 + O(1/(\log x)^2) \tag{4·25}$$

établie dans [18] — formule (7·8) —, fournit immédiatement

$$\begin{aligned} A_f(x,x) &= A_f(x) + O\Big(\frac{1}{\log x}\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{|f(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu\log x}\Big), \\ &= A_f(x) + O\bigg(\frac{B_f(x)}{\log x}\Big\{\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{(\log p^\nu)^2}{p^\nu(\log x)^2}\Big\}^{1/2}\bigg) \\ &= A_f(x) + O\bigg(\frac{B_f(x)}{\log x}\bigg), \\ B_f(x,x)^2 &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}B_f(x)^2. \end{aligned}$$

En employant, avec $\varepsilon := 1/\log x$, l'inégalité $\big||a+b|^2-|a|^2\big| \leqslant \varepsilon|a|^2+(1+\varepsilon)|b|^2/\varepsilon$, valable pour $a,b\in\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$, nous obtenons donc que le membre de gauche de (1·9) vérifie

$$|V_f(x)-V_f(x,x)| \ll \varepsilon V_f(x,x) + \frac{B_f(x)^2}{\varepsilon(\log x)^2} \ll \frac{B_f(x)^2}{\log x} \ll B_f(x)^2. \tag{4·26}$$

La fonction indicatrice de l'ensemble des entiers y-friables est multiplicative. On peut donc voir (1·13) comme un cas particulier de majoration du type

$$\sum_{n\leqslant x} h(n)\,|f(n)-A|^2 \ll B^2\sum_{n\leqslant x}h(n)$$

pour une fonction multiplicative h positive ou nulle et des quantités convenables A et B, dépendant de f et h. De telles estimations ont été obtenues par Biró et Szamuely dans [2] lorsque la fonction de poids h vérifie certaines conditions, requérant notamment que $h(p)$ soit minoré, en moyenne sur des intervalles relativement courts, par une constante strictement positive. Ces conditions, qui sont satisfaites, par exemple, pour la fonction indicatrice des sommes de deux carrés, sont clairement inadaptées au cas qui nous intéresse ici.

5. Analyse asymptotique de la variance

Pour certaines fonctions f, et dans un large sous-domaine du secteur $x\geqslant y\geqslant 2$, il est possible d'obtenir une estimation asymptotique de la variance. Cela permet, en particulier, de décrire les cas où elle est significativement plus petite que la valeur issue du modèle probabiliste d'indépendance.

Posons

$$X := y^{\sqrt{u}}, \quad X_1 := y^{u^{3/4}} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2)$$

et

$$D_f(x,y;\varepsilon) := \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \sum_{p^\nu\in S(X^\varepsilon,y)} \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big|f(p^\nu)-\lambda\log p^\nu\Big|^2, \tag{5·1}$$

$$R_f(x,y;\varepsilon) := \sum_{\substack{X^\varepsilon<p^\nu\leqslant X_1\\ p\leqslant y}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}\mathrm{e}^{\beta(\log p^\nu)^2/u(\log y)^2}}, \tag{5·2}$$

où $\beta = \beta(x, y; p^\nu)$ satisfait à $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, lorsque β_1 et β_2 sont des constantes absolues positives convenables.

Théorème 5.1. *Soient $h_1(x)$, $h_2(x)$ deux fonctions tendant vers l'infini avec x. Pour tout $\varepsilon > 0$, et uniformément lorsque $f \in \mathbb{A}$ et x, y tendent vers l'infini dans le domaine*

$$h_1(x) \log x \leqslant y \leqslant x^{1/h_2(x)}, \tag{5·3}$$

on a

$$V_f(x, y) = D_f\big(x, y; \varepsilon\big) - Q_f(x, y) + R_f(x, y; \varepsilon) + o\Big(B_f^-(x, y)^2\Big) \tag{5·4}$$

où $Q_f(x, y)$ est définie en (4·7) *et $B_f^-(x, y)$ en* (1·17).

De plus, lorsque x et y tendent vers l'infini dans le domaine (5·3), *on a*

$$D_f(x, y; \varepsilon) = b_f(x, y; \varepsilon)^2 - \frac{|a_f(x, y; \varepsilon)|^2}{u(\log y)^2} + o\Big(B_f^-(x, y)^2\Big), \tag{5·5}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} a_f(x, y; \varepsilon) &:= \sum_{p^\nu \in S(X^\varepsilon, y)} \frac{g_p(\alpha) f(p^\nu) \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}, \\ b_f(x, y; \varepsilon)^2 &:= \sum_{p^\nu \in S(X^\varepsilon, y)} \frac{g_p(\alpha) |f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}. \end{aligned} \tag{5·6}$$

Comme la somme des trois termes principaux de (5·4) ne dépasse pas $B_f(x, y)^2$, nous obtenons immédiatement une majoration asymptotique de $V_f(x, y)$.

Corollaire 5.2. *On a uniformément pour $f \in \mathbb{A}$ et (x, y) satisfaisant* (5·3)

$$V_f(x, y) \leqslant \{1 + o(1)\} \mathbb{V}(Z_{f,x,y}) \leqslant \{1 + o(1)\} B_f(x, y)^2. \tag{5·7}$$

De plus, l'inégalité entre les deux termes extrêmes est asymptotiquement optimale.

Démonstration. Il résulte directement de (1·16), (5·4) et (5·5) que

$$\begin{aligned} V_f(x, y) &\leqslant B_f(x, y)^2 - Q_f(x, y) + o\big(B_f^-(x, y)^2\big) \\ &\leqslant \{1 + o(1)\} \mathbb{V}\big(Z_{f,x,y}\big) + R, \end{aligned}$$

avec, en posant toujours $\nu_p := [(\log x)/\log p]$,

$$\begin{aligned} R &:= \sum_{p \leqslant y} \Big| \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \nu_p} g_p(\alpha) \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big|^2 - Q_f(x, y) \\ &\ll \sum_{p \leqslant y} \Big| \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \nu_p} \Big\{ \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} - \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x, y)} \Big\} f(p^\nu) \Big| \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \nu_p} g_p(\alpha) \frac{|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}} \\ &\ll B_f(x, y) \Xi_f(x, y)^{1/2}. \end{aligned}$$

La conclusion découle donc de l'estimation $\Xi_f(x,y)=o\big(\alpha^2B_f(x,y)^2\big)$ établie, sous les hypothèses de l'énoncé, au Lemme 5.5 *infra*.

Montrons à présent que les deux inégalités de (5·7) sont des égalités pour le choix spécifique

$$f(p^\nu):=\frac{\log p^\nu}{p^{\nu(1-\alpha)/2}}\qquad(p\geqslant 2,\ \nu\geqslant 1),\tag{5·8}$$

ce qui établira l'optimalité annoncée.

Soit $\varepsilon>0$. Nous avons d'une part, dans le domaine (5·3),

$$\begin{aligned}b_f(x,y;\varepsilon)^2&=\sum_{p^\nu\in S(X^\varepsilon,y)}\frac{g_p(\alpha)\nu^2(\log p)^2}{p^\nu}=\{\tfrac12+o(1)\}(\log y)^2,\\ a_f(x,y;\varepsilon)&=\sum_{p^\nu\in S(X^\varepsilon,y)}\frac{g_p(\alpha)\nu^2(\log p)^2}{p^{\nu(1+\alpha)/2}}\ll\frac{y^{(1-\alpha)/2}-1}{1-\alpha}\log y\\ &\ll\sqrt{\frac{u}{\log u}}(\log y)^2,\end{aligned}$$

de sorte que, grâce à (5·5),

$$D_f(x,y;\varepsilon)=\{\tfrac12+o(1)\}(\log y)^2+o\big(B_f(x,y)^2\big)$$

lorsque x et y tendent vers l'infini sous la contrainte (5·3).

D'autre part, nous avons dans le même domaine

$$\begin{aligned}Q_f(x,y)&\ll\sum_{p\leqslant y}\bigg|\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\log p^\nu}{p^{\nu(1+\alpha)/2}}\bigg|^2\ll\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{p^{1+\alpha}}\ll\frac{\log y}{\alpha}=o\big((\log y)^2\big),\\ R_f(x,y;\varepsilon)&\ll\sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu>\varepsilon\sqrt u}\frac{\nu^2(\log p)^2}{p^\nu}\ll 1.\end{aligned}$$

Comme un calcul standard permet de montrer que $B_f(x,y)^2\sim\frac12(\log y)^2$, nous obtenons bien que la relation

$$V_f(x,y)\sim B_f(x,y)^2$$

a lieu dans le domaine (5·3) pour la fonction f définie par (5·8). □

Corollaire 5.3. *Une condition suffisante pour qu'une fonction additive complexe f satisfasse la relation*

$$V_f(x,y)=o\big(B_f(x,y)^2\big)\tag{5·9}$$

lorsque x et y tendent vers l'infini dans un sous-domaine $\mathcal{D}$ du domaine (5·3) *est que les deux relations suivantes soient vérifiées*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\substack{x,y\to\infty\\(x,y)\in\mathcal{D}}}\frac{1}{B_f(x,y)^2}\sum_{\substack{X^\varepsilon<p^\nu\leqslant X^{1/\varepsilon}\\p\leqslant y}}\frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}=0,\tag{5·10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\substack{x,y\to\infty\\(x,y)\in\mathcal{D}}}\frac{D_f(x,y;\varepsilon)}{B_f(x,y)^2}=0.\tag{5·11}$$

Lorsque l'on suppose en outre $y>(\log x)^{1+\delta}$ pour une constante arbitraire $\delta>0$, cette condition est également nécessaire.

Remarques. (i) Le théorème 2.7 et le corollaire 2.8 de [5] permettent aisément d'estimer $V_{\log}(x,y)$. On a

$$V_{\log}(x,y)=\frac{2\log x}{\alpha}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}\qquad(y\geqslant\log x),$$

alors que, dans le même domaine,

$$B_{\log}(x,y)^2\asymp(\log y)\log x.$$

On voit donc, dans le cas de la fonction logarithme, que la condition $y/\log x\to\infty$ est certainement nécessaire pour que (5·9) ait lieu.

(ii) Hildebrand [17] fournit, pour la répartition de $\Omega(n)$ sur $S(x,y)$, une approximation uniforme de la loi globale et des évaluations des lois locales dans un certain voisinage de la moyenne. La « variance », disons $v_\Omega(x,y)$, apparaissant dans ces résultats vérifie $v_\Omega(x,y)=o\big(B_\Omega(x,y)^2\big)$ mais l'information contenue est apparemment insuffisante pour fournir $V_\Omega(x,y)\ll v_\Omega(x,y)$, ni même $V_\Omega(x,y)=o\big(B_\Omega(x,y)^2\big)$.

(iii) Dans le cas de la fonction Ω, le Corollaire 5.3 permet de retrouver et de préciser le phénomène observé par Alladi [1] et Hildebrand [17]. D'une part, on vérifie sans peine que la relation (5·10) est satisfaite pour $f=\Omega$ dans le domaine (5·3). D'autre part, les lemmes 3.5 et 3.6 de [5] permettent de montrer que l'on a, dans les mêmes circonstances,

$$a_\Omega(x,y;\varepsilon)\sim\log x,\qquad b_\Omega(x,y;\varepsilon)^2\sim B_\Omega^2(x,y)\sim u+\log_2 y.$$

Compte tenu de l'estimation (3·8) pour σ_2, nous obtenons ainsi que (5·5) a lieu si, et seulement si, $u/\log_2 y\to\infty$. Nous pouvons récapituler ces observations en énonçant que : *la formule asymptotique* (5·9) *a lieu pour $f=\Omega$ lorsque x et y tendent vers l'infini sous la contrainte*

$$y/\log x\to\infty,\qquad u/\log_2 y\to\infty.$$

Lemme 5.4. *Soit $f \in \mathbb{A}$. Une condition nécessaire pour que la relation* (5·9) *ait lieu lorsque x et y tendent vers l'infini dans un sous-domaine $\mathcal{D}$ du domaine* (5·3) *est que l'on ait, uniformément dans $\mathcal{D}$,*

$$\sup_{p^\nu \leqslant X} \Big\{ g_p(\alpha) \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} \Big\} = o(B_f(x,y)^2). \tag{5·12}$$

Lorsque la relation (5·12) *est satisfaite dans un sous-domaine $\mathcal{D}$ du domaine* (5·3) *tel que* $\liminf_{\substack{x,y\to\infty \\ (x,y)\in\mathcal{D}}} (\log y)/\log_2 x > 1$, *on a*

$$Q_f(x,y) + \Xi_f(x,y) = o\big(B_f(x,y)^2\big) \tag{5·13}$$

où les quantités $Q_f(x,y)$ et $\Xi_f(x,y)$ sont respectivement définies par (4·7) *et* (4·8).

Démonstration. Observons que pour tout $p^\nu \in S(x,y)$ on a

$$\begin{aligned} V_f(x,y) &\geqslant \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{\substack{n\in S(x/p^\nu,y) \\ (n,p)=1}} \big\{ |f(n) - A(x,y)|^2 + |f(np^\nu) - A(x,y)|^2 \big\} \\ &\geqslant \tfrac12 |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p(x/p^\nu,y)}{\Psi(x,y)}, \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité $|w|^2 + |w+z|^2 \geqslant |z|^2/2$ (w, $z \in \mathbb{C}$). L'estimation (3·22) fournit donc la nécessité de la condition (5·12).

Lorsque (5·12) est réalisée et sous la condition supplémentaire indiquée, il existe une fonction $z = z(x,y)$ telle que, lorsque x et y tendent vers l'infini en restant dans $\mathcal{D}$, on ait simultanément $z \to \infty$ et

$$\sum_{p^\nu \in S(z,y)} g_p(\alpha) \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} = o\big(B_f(x,y)^2\big). \tag{5·14}$$

D'après (4·10), nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} Q_f(x,y) + \Xi_f(x,y) &\ll o\big(B_f(x,y)^2\big) + \sum_{p\leqslant y} \Bigg| \sum_{\frac{\log z}{\log p} < \nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}} \Bigg|^2 \\ &\leqslant o\big(B_f(x,y)^2\big) + \sum_{p\leqslant y} \sum_{\nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} \sum_{\frac{\log z}{\log p} < \nu \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \\ &\leqslant o\big(B_f(x,y)^2\big) + \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{z^\alpha p^{\nu\alpha}} = o(B_f(x,y)^2). \end{aligned} \tag{5·15}$$

□

Lemme 5.5. *La relation*

$$\Xi_f(x,y)=o\big(\alpha^2B_f(x,y)^2\big) \tag{5·16}$$

a lieu uniformément pour $f\in\mathbb{A}$ *lorsque* x *et* y *tendent vers l'infini dans le domaine* (5·3).

Démonstration. Soit $v:=u^{1/4}$. D'après (3·19), la contribution à $\Xi_f(x,y)$ des puissances p^ν n'excédant pas y^v est

$$\ll\frac{1}{u}\sum_{p\leqslant y}\bigg(\sum_{\nu\leqslant\frac{\log x}{\log p}}\frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}}\bigg)^2\ll\frac{B_f(x,y)^2}{u}=o\big(\alpha^2B_f(x,y)^2\big),$$

où la seconde estimation a été obtenue en employant l'inégalité de Cauchy–Schwarz comme dans (5·15). La même manipulation permet, grâce à (4·9), d'estimer la contribution complémentaire. Nous obtenons la majoration

$$\ll\sum_{p\leqslant y}\bigg(\sum_{\frac{v\log y}{\log p}<\nu\leqslant\frac{\log x}{\log p}}\frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}}\bigg)^2\ll\frac{B_f(x,y)^2}{y^{\alpha v}}=o\big(\alpha^2B_f(x,y)^2\big).$$

□

Lemme 5.6. *On a, uniformément lorsque* x *et* y *tendent vers l'infini dans le domaine* (5·3) *et* $f\in\mathbb{A}$,

$$S^*+\frac{1}{\sigma_2}\bigg|\sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{g_p(\alpha)f(p^\nu)\log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\bigg|^2=o\Big(B_f^-(x,y)^2\Big). \tag{5·17}$$

Démonstration. Commençons par établir la formule asymptotique

$$S^*+\frac{1}{\sigma_2}\bigg|\sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{g_p(\alpha)f(p^\nu)v_{p^\nu}(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\bigg|^2=o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big). \tag{5·18}$$

Le membre de gauche de (5·18) vaut

$$\frac{1}{\sigma_2}\sum_{p\leqslant y}g_p(\alpha)^2\bigg|\sum_{\nu\leqslant\frac{\log x}{\log p}}\frac{f(p^\nu)v_{p^\nu}(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\bigg|^2. \tag{5·19}$$

Le carré du module de la somme en ν n'excède pas

$$\sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} \sum_{\mu\geqslant 1} \frac{v_{p^\mu}(\alpha)^2}{p^{\mu\alpha}} \ll \sum_{\nu\leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{|f(p^\nu)|^2(\log p)^2}{g_p(\alpha)^2 p^{\nu\alpha}(p^\alpha-1)},$$

en vertu de l'identité

$$(5{\cdot}20)\quad \sum_{\mu\geqslant 1} \frac{v_{p^\mu}(\alpha)^2}{p^{\mu\alpha}} = (\log p)^2 \sum_{\mu\geqslant 1}\Big(\mu - \frac{1}{p^\alpha-1}\Big)^2 \frac{1}{p^{\mu\alpha}} = \frac{(\log p)^2(1-p^{-\alpha}+p^{-2\alpha})}{g_p(\alpha)^2(p^\alpha-1)}.$$

En employant l'estimation (3·8) pour σ_2, nous obtenons donc que l'expression (5·19) est

$$(5{\cdot}21)\qquad \ll \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2 p^\alpha(\log p)^2}{p^{\nu\alpha}(p^\alpha-1)^2 u(\log y)^2} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{u\alpha\log y} = o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big)$$

où nous avons fait appel à l'inégalité $p^\alpha(\log p)^2/(p^\alpha-1)^2 \leqslant (\log p)/\alpha + 1/\alpha^2$ et employé l'estimation $\alpha^2 u\log y \to \infty$ lorsque x et y tendent vers l'infini sous la condition (5·3).

Cela achève la preuve de (5·18).

Pour établir (5·17) à partir de (5·18), nous majorons la différence des membres de gauche de ces deux expressions par

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{1}{\sigma_2} \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|\log p}{p^{\nu\alpha}(p^\alpha-1)} \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}}\Big(\log p^\nu + \frac{\log p}{p^\alpha-1}\Big)\\
&\ll \frac{B_f^-(x,y)^2}{u(\log y)^2}\Big\{\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{(p^\alpha-1)^3}\sum_{p\leqslant y}\frac{p^{2\alpha}(\log p)^2}{(p^\alpha-1)^3}\Big\}^{1/2} = o\big(B_f^-(x,y)^2\big),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que l'avant-dernière somme en p est $\ll u + u^3(\log y)^4/y^2$ dans le domaine (5·3), alors que la dernière est $\ll \sigma_2$. □

Démonstration du Théorème 5.1. Il découle de (4·5), (4·6) et (5·16) que l'on a, uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini dans le domaine (5·3),

$$(5{\cdot}22)\qquad \begin{aligned} V_f(x,y) = V_f^*(x,y) &+ \sum_{p^\nu\in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)}\\ &- Q_f(x,y) + o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big).\end{aligned}$$

Comme, de plus, il résulte de (4·21) et (4·24) que l'on a, dans les mêmes conditions,

$$(5{\cdot}23)\qquad V_f^*(x,y) = S^* + o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big)$$

nous obtenons

$$(5{\cdot}24)\quad V_f(x,y) = S^* - Q_f(x,y) + \sum_{p^\nu \in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} + o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big).$$

Substituons à S^* son approximation donnée par (5·17) et observons que, d'après (3·15), d'une part

$$\sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha) f(p^\nu) \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}} \ll B_f(x,y)\sqrt{u}\log y$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{\substack{X^\varepsilon < p^\nu \leqslant x\\ p\leqslant y}} \frac{g_p(\alpha) f(p^\nu) \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\Bigg| &\leqslant \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}\varepsilon \log X}\\ &\ll_\varepsilon B_f(x,y)\log y.\end{aligned}$$

Nous obtenons, avec la notation a_f de (5·6),

$$(5{\cdot}25)\quad \begin{aligned}\frac{1}{\sigma_2}\Bigg|\sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{g_p(\alpha) f(p^\nu) \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\Bigg|^2 - \frac{|a_f(x,y;\varepsilon)|^2}{\sigma_2} &\ll \frac{B_f(x,y)^2}{\sqrt{u}}\\ &= o\Big(\alpha B_f(x,y)^2\Big).\end{aligned}$$

De plus, il découle de (3·21) et (3·19) que l'on a pour une constante positive convenable c_2,

$$(5{\cdot}26)\quad \begin{aligned}&\sum_{p^\nu \in S(x,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu,y\big)}{\Psi(x,y)}\\ &\qquad = \sum_{p^\nu \in S(X^\varepsilon,y)} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu,y\big)}{\Psi(x,y)} + \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u^{1/4}}\Big)\Big\} R_f(x,y;\varepsilon)\\ &\qquad\quad + O\Big(\frac{B_f(x,y)^2}{e^{c_2\sqrt{u}}}\Big)\\ &\qquad = \sum_{p^\nu \in S(X^\varepsilon,y)} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}} + R_f(x,y;\varepsilon) + O\Big(\frac{B_f(x,y)^2}{u^{1/4}}\Big).\end{aligned}$$

En rassemblant les estimations (5·24), (5·18), (5·25) et (5·26) nous obtenons, avec les notations (5·6),

$$(5{\cdot}27)\quad \begin{aligned}V_f(x,y) =& b_f(x,y;\varepsilon)^2 - \frac{|a_f(x,y;\varepsilon)|^2}{\sigma_2}\\ &+ R_f(x,y;\varepsilon) - Q_f(x,y) + o\Big(B_f^-(x,y)^2\Big).\end{aligned}$$

Il reste, d'une part, à établir que l'on peut, sans modifier l'ordre de grandeur du terme d'erreur, remplacer par $D_f(x,y;\varepsilon)$ la somme des deux premiers termes du membre de droite et, d'autre part, à évaluer cette dernière quantité. Posons

$$c_f(x,y;\varepsilon) := \sum_{p^\nu \in S(X^\varepsilon, y)} \frac{g_p(\alpha)(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}.$$

Le minimum (5·1) est atteint pour

$$\lambda = \lambda_f(x,y;\varepsilon) := a_f(x,y;\varepsilon)/c_f(x,y;\varepsilon)$$

et vaut

$$D_f(x,y;\varepsilon) = b_f(x,y;\varepsilon)^2 - \frac{|a_f(x,y;\varepsilon)|^2}{c_f(x,y;\varepsilon)}. \tag{5·28}$$

La déduction de (5·4) et (5·5) à partir de (5·27) se réduit donc, compte tenu de (3·8), à la formule

$$c_f(x,y;\varepsilon) = \sigma_2\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\alpha\log y} + \mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{u}/2}\Big)\Big\} \tag{5·29}$$

dont nous allons montrer qu'elle a lieu, pour chaque $\varepsilon \in]0,1[$ fixé, uniformément dans le domaine (5·3). Pour établir (5·29), nous observons d'une part que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 1}} \frac{g_p(\alpha)(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} &= \sum_{p\leqslant y} \frac{(p^\alpha+1)(\log p)^2}{(p^\alpha-1)^2} = \sigma_2 + \sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{(p^\alpha-1)^2}\\ &= \sigma_2 + O\Big(\frac{u\log y}{\alpha}\Big) = \sigma_2\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\alpha\log y}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

et d'autre part que l'on a, en posant $\nu_p := [\varepsilon(\log X)/\log p]$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p^\nu > X^\varepsilon}} \frac{g_p(\alpha)(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} &= \sum_{p\leqslant y}\frac{g_p(\alpha)(\log p)^2}{p^{\nu_p\alpha}}\sum_{j\geqslant 1}\frac{(j+\nu_p)^2}{p^{j\alpha}}\\ &\ll \frac{1}{X^{\varepsilon\alpha}}\sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)(\log p)^2 \sum_{j\geqslant 1}\frac{j^2+\nu_p^2}{p^{j\alpha}}\\ &\ll \frac{\sigma_2}{X^{\varepsilon\alpha}} + \frac{(\varepsilon\log X)^2}{X^{\varepsilon\alpha}}\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha} \ll \frac{\sigma_2(u+\log_2 y)}{X^{\varepsilon\alpha}} \ll \sigma_2\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{u}/2},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3·8) sous la forme $(\log X)^2 \ll \sigma_2$, (3·13) et (3·3). □

Démonstration du Corollaire 5.3. Il est immédiat que les conditions (5·10) et (5·11) sont suffisantes. Pour établir qu'elles sont nécessaires, il suffit, compte tenu de (5·13), d'observer que (3·19) implique, pour toute valeur du paramètre $\varepsilon_1 \in]0,1[$ et avec une constante positive convenable c_3,

$$\sum_{\substack{X^\varepsilon < p^\nu \leqslant X^{1/\varepsilon_1} \\ p\leqslant y}} |f(p^\nu)|^2 \frac{\Psi_p\big(x/p^\nu, y\big)}{\Psi(x,y)} \gg \mathrm{e}^{-c_3/\varepsilon_1^2} \sum_{\substack{X^\varepsilon < p^\nu \leqslant X^{1/\varepsilon_1} \\ p\leqslant y}} \frac{g_p(\alpha)|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}.$$

On conclut en faisant appel à la positivité de $D_f(x,y;\varepsilon)$ et, en faisant tendre x et y vers l'infini puis ε, et finalement ε_1, vers 0. □

6. Forme duale : preuve du Théorème 1.2

Soit f une fonction arithmétique additive. On peut écrire lorsque $n \in S(x,y)$

$$f(n) - A_f(x,y) = \sum_{r\leqslant x} c_{n,r} y_r$$

avec

$$y_r := \begin{cases} f(p^\nu)\sqrt{g_p(\alpha)/p^{\nu\alpha}} & \text{si } r = p^\nu,\ p \leqslant y, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c_{n,r} := \sqrt{p^{\nu\alpha}/g_p(\alpha)} - \sqrt{g_p(\alpha)/p^{\nu\alpha}} & \text{si } r = p^\nu \parallel n, \\ c_{n,r} := -\sqrt{g_p(\alpha)/p^{\nu\alpha}} & \text{si } r = p^\nu \nparallel n,\ p\leqslant y, \\ c_{n,r} := 0 & \text{si } r \neq p^\nu \text{ ou } r = p^\nu,\ p > y. \end{cases}$$

La majoration (1·13) équivaut donc à la validité de

$$\sum_{n\in S(x,y)} \Big| \sum_{r\leqslant x} c_{n,r} y_r \Big|^2 \leqslant C\Psi(x,y) \sum_{r\leqslant x} |y_r|^2$$

pour tout choix des nombres complexes y_r. Le principe de dualité exprimant l'égalité des normes d'un opérateur d'espaces de Hilbert et de son adjoint (cf., par exemple, le lemme I.4.5.1 de [30]) montre alors que cette majoration est équivalente à la validité de l'inégalité

$$\sum_{r\leqslant x} \Big| \sum_{n\in S(x,y)} c_{n,r} a_n \Big|^2 \leqslant C\Psi(x,y) \sum_{n\in S(x,y)} |a_n|^2$$

pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres complexes. □

7. Théorème d'Erdős–Wintner : preuve du Théorème 1.4

Posons
$$n_T := \prod_{\substack{p^\nu \| n\\ p^\nu \leqslant T}} p^\nu.$$
Ainsi, pour chaque entier $n \geqslant 1$, n_T est le plus grand diviseur m de n tel que $\chi_T(m) = 1$.

Nous aurons besoin d'un résultat auxiliaire concernant l'application $n \mapsto n_T$. Nous l'établissons sous la forme la plus simple qui permet de prouver le Théorème 1.4. Une version plus précise pourrait, au besoin, être déduite d'une étude spécifique adéquate.

Lemme 7.1. *Pour tout $T \geqslant 2$ il existe un nombre réel $y_1(T)$ tel que l'on ait*
$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ n_T=m}} 1 = \frac{\chi_T(m)h_T(m;\alpha)\Psi(x,y)}{H(\alpha,T)m^\alpha}\Big\{1+O_T\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}$$
uniformément pour $x \geqslant y \geqslant y_1(T)$, $m \geqslant 1$.

Démonstration. Soit σ_T la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que
$$p^\nu \| n \Rightarrow p^\nu > T.$$
Nous posons $\vartheta_T := \mu * \sigma_T$, de sorte que ϑ_T est la fonction multiplicative déterminée sur les puissances de nombres premiers par la formule
$$\vartheta_T(p^\nu) = \begin{cases} -1 & \text{si } p \leqslant T,\ \nu = 1,\\ 1 & \text{si } p \leqslant T,\ \nu = \nu_T(p)+1,\\ 0 & \text{si } \nu \neq 1 \text{ ou } \nu \neq \nu_T(p)+1 \text{ ou } p > T.\end{cases}$$
Rappelons la notation χ_T de (1·25). On a $n_T = m$ si, et seulement si, $\chi_T(m) = 1$ et $n = rm$ avec $(r,m) = 1$ et $\sigma_T(r) = 1$. On peut donc écrire
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ n_T=m}} 1 &= \chi_T(m) \sum_{\substack{r\in S(x/m,y)\\ (r,m)=1}} \sum_{d|r} \vartheta_T(d)\\ &= \chi_T(m) \sum_{\substack{d\in S(x/m,y)\\ (d,m)=1}} \vartheta_T(d)\Psi_m\Big(\frac{x}{md}, y\Big).\end{aligned} \tag{7·1}$$

Il nous faut donc une estimation de $\Psi_m(x/md, y)$. Nous allons montrer que l'on a, sous les hypothèses de l'énoncé et uniformément en d tel que $\vartheta_T(d) \neq 0$,
$$\Psi_m\Big(\frac{x}{md}, y\Big) = \frac{\Psi(x,y)g_m(\alpha)}{(md)^\alpha}\Big\{1+O_T\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{7·2}$$

À cette fin, nous observons d'abord que, lorsque $\chi_T(m)\vartheta_T(d) \neq 0$ et $(m,d)=1$, on a

$$md \leqslant \prod_{p\leqslant T} p^{\nu_T(p)+1} \leqslant 3^T T^{\pi(T)} \leqslant \mathrm{e}^{7T/2},$$

en vertu des inégalités bien connues $\prod_{p\leqslant T} p \leqslant 3^T$ et $\pi(T)\leqslant 2T/\log T$ $(T\geqslant 2)$.

On a $t := \log(md)/\log y \leqslant \frac{7}{8}$ pour $y > \exp\exp T$ car $\mathrm{e}^T \geqslant 4T$ pour $T\geqslant 2$. Lorsque $u > \log y$, la formule (3·19) fournit donc immédiatement (7·2).

Si $u \leqslant \log y$ et donc $\alpha \gg 1$, nous déduisons de (3·17) que

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{md},y\Big) = g_m(\alpha_t)\Psi\Big(\frac{x}{md},y\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{T}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Nous avons donc dans ce domaine

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{md},y\Big) = g_m(\alpha)\Psi\Big(\frac{x}{md},y\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{T}{\log y}\Big)\Big\}.$$

En appliquant alors la formule

$$\Psi\Big(\frac{x}{z},y\Big) = \frac{\Psi(x,y)}{z^\alpha}\Big\{1+O\Big(\frac{\log z+\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\} \qquad (x\geqslant y\geqslant (\log x)^2,\ 1\leqslant z\leqslant y)$$

qui découle immédiatement du lemme 2 de [20], nous obtenons encore (7·2), en fait sous la forme renforcée

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{md},y\Big) = \frac{g_m(\alpha)\Psi(x,y)}{(md)^\alpha}\Big\{1+O\Big(\frac{T+\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Il nous reste à reporter (7·2) dans (7·1). On a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\in S(x/m,y)\\(d,m)=1}} \frac{\vartheta_T(d)}{d^\alpha} &= \sum_{(d,m)=1} \frac{\vartheta_T(d)}{d^\alpha}\\ &= \prod_{\substack{p\leqslant T\\ p\nmid m}} \Big(1-p^{-\alpha}+p^{-\alpha\{1+\nu_T(p)\}}\Big) = \frac{h_T(m;\alpha)}{g_m(\alpha)H(\alpha;T)}.\end{aligned}$$

Cela fournit bien l'estimation requise. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver le Théorème 1.4.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons pour $x \geqslant y \geqslant 2$ et tous $T \geqslant 2$, $N \geqslant 1$, $w > 0$, $z \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ f(n) \leqslant z}} 1 \leqslant U_1 + U_2$$

avec

$$U_1 := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ f(n_T) \leqslant z+w}} 1, \qquad U_2 := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ |f(n) - f(n_T)| > w}} 1.$$

D'après le Lemme 7.1, il s'ensuit que, pour $y > y_1(T)$,

$$U_1 \leqslant \Psi(x,y) D_{\alpha,T,f}(z+w) \Big\{ 1 + O_T\Big(\frac{\log_2 y}{\log y} \Big) \Big\}. \tag{7·3}$$

Posons

$$f_T(n) := \sum_{\substack{p^\nu \| n,\, p^\nu > T \\ |f(p^\nu)| \leqslant R}} f(p^\nu) \qquad (n \geqslant 1).$$

Pour estimer U_2, nous observons que tout entier n satisfaisant à $|f(n) - f(n_T)| > w$ vérifie nécessairement l'une au moins des deux conditions suivantes

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad \exists p^\nu \| n \ : \ |f(p^\nu)| > R,\ p^\nu > T, \\ &\text{(ii)} \qquad |f_T(n)| > w. \end{aligned} \tag{7·4}$$

Le nombre des entiers $n \in S(x,y)$ satisfaisant (i) peut être estimé grâce à (3·21) : il est

$$\ll \sum_{\substack{T < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y \\ |f(p^\nu)| > R}} \Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y \Big) \ll \Psi(x,y) \sum_{\substack{T < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y \\ |f(p^\nu)| > R}} \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} \ll \eta \Psi(x,y),$$

d'après (1·27).

L'estimation du nombre des entiers $n \in S(x,y)$ satisfaisant (ii) relève du Théorème 1.1 : elle n'excède pas

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \sum_{n \in S(x,y)} |f_T(n)|^2 &\leqslant \frac{2}{w^2} \Psi(x,y) A_{f_T}(x,y)^2 + \frac{2}{w^2} \sum_{n \in S(x,y)} |f_T(n) - A_{f_T}(x,y)|^2 \\ &\ll \frac{\eta \Psi(x,y)}{w^2} \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte des deux dernières conditions (1·27). Nous avons donc finalement, pour $w \in]0,1[$,

$$U_2 \ll \eta \Psi(x,y)/w^2. \tag{7·5}$$

Pour conclure, il suffit donc de choisir $w = \eta^{1/3}$. □

8. Théorème de Daboussi : preuve du Théorème 1.5

Nous commençons par établir (1·28) à partir des résultats de [3].

Lemme 8.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ fixé, on ait*

$$E_{\mathbf{1}}(x, y; \vartheta) = o(\Psi(x, y)) \tag{8·1}$$

uniformément lorsque x, y tendent vers l'infini en restant dans le domaine

$$D(x; c) = \exp\{c(\log x \log_2 x)^{2/3}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{8·2}$$

Démonstration. Les sommes d'exponentielles $E_{\mathbf{1}}(x, y; \vartheta)$ sont usuellement estimées en fonction des bonnes approximations rationnelles de ϑ. Le théorème de Dirichlet garantit, pour chaque entier $Q \geqslant 2$, l'existence d'au moins un couple d'entiers (a, q) tel que

$$1 \leqslant q \leqslant Q, \quad (a, q) = 1, \quad |\vartheta - a/q| \leqslant 1/qQ. \tag{8·3}$$

Nous désignons par $q(\vartheta; Q)$ le plus petit des dénominateurs q satisfaisant cette condition.[10] Pour tout nombre irrationnel ϑ, nous avons

$$\lim_{Q\to\infty} q(\vartheta; Q) = \infty.$$

D'après le corollaire 5 de [3] on a, pour des constantes positives convenables c_4, c_5, c_6,

$$|E_{\mathbf{1}}(x, y; \vartheta)| \ll \Psi(x, y)\frac{2^{\omega(q)}(\log q)\{\log(u+1)\}^2}{\varphi(q)\log y} + x\mathrm{e}^{-c_4\sqrt{\log y}}$$

avec $q := q\Big(\vartheta; \Big[x\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log y}}\Big]\Big)$, uniformément dans le domaine

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\{c_6(\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x.$$

Compte tenu de (1·4), nous obtenons bien (8·1) sous la condition (8·2) dès que $c > c_4^{-2/3}$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le Théorème 1.5. Nous employons la méthode de Daboussi telle qu'elle est exposée dans [8]. L'hypothèse (1·30) appliquée

10. On peut vérifier facilement qu'il y a au plus deux fractions rationnelles réduites satisfaisant (8·3).

avec $y = x$ permet d'appliquer le lemme 1 de [8] à $|f|^2$. Nous en déduisons qu'il existe une constante $z_0 = z_0(f) \geqslant 3$ telle que

$$\sum_{\substack{p \leqslant z \\ |f(p)| \leqslant 2}} \frac{1}{p} \gg \log_2 z \qquad (z \geqslant z_0). \tag{8·4}$$

Posons $\mathcal{P}_z := \{p \leqslant z : |f(p)| \leqslant 2\}$ et appliquons la forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius (1·15) en choisissant $a_n := f(n)\mathrm{e}(n\vartheta)$ et en restreignant la sommation du membre de gauche aux nombres premiers de $\mathcal{P}_z$. Nous obtenons, pour $2 \leqslant z \leqslant y$, $Y(x) \leqslant y \leqslant x$,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_z} p^\alpha \bigg| \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha} E_f(x, y; \vartheta) - \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ p \| n}} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) \bigg|^2 \ll \Psi(x, y)^2 \tag{8·5}$$

où le membre de droite a été évalué grâce à l'hypothèse (1·30).

Posant

$$L(z) := \sum_{\substack{p \leqslant z \\ |f(p)| \leqslant 2}} \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha},$$

nous déduisons de (8·5), grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_z} \bigg| \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha} E_f(x, y; \vartheta) - \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ p \| n}} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) \bigg| \ll \Psi(x, y)\sqrt{L(z)},$$

d'où, pour $z \in [z_0, y]$,

$$E_f(x, y; \vartheta) = \frac{1}{L(z)} \sum_{p \in \mathcal{P}_z} \sum_{\substack{m \in S(x/p,y) \\ p \nmid m}} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{\sqrt{L(z)}}\Big). \tag{8·6}$$

Désignons la somme double par T. Comme

$$\sum_{\substack{m \in S(x/p,y) \\ p \mid m}} |f(m)| \leqslant \Big\{ K\Psi(x/p, y)\Psi(x/p^2, y) \Big\}^{1/2} \ll \Psi(x, y)/p^{3\alpha/2}$$

d'après (1·30) et (3·21), et comme $\alpha \geqslant \frac{3}{4}$ pour x, y assez grands sous la condition (8·2), nous avons

$$T = T_1 + O\big(\Psi(x, y)\big), \tag{8·7}$$

avec

$$T_1 := \sum_{p\in\mathcal{P}_z}\sum_{m\in S(x/p,y)} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta).$$

Maintenant une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$\begin{aligned}
|T_1|^2 &\leqslant \Big\{\sum_{m\in S(x,y)}|f(m)|\Big|\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_z\\ p\leqslant x/m}} f(p)\mathrm{e}(mp\vartheta)\Big|\Big\}^2\\
&\leqslant 4K\Psi(x,y)\sum_{p,\,q\in\mathcal{P}_z}\Big|\sum_{m\in S(x/\max(p,q),y)}\mathrm{e}(m(p-q)\vartheta)\Big|\\
&\ll \Psi(x,y)\Big\{\sum_{p\in\mathcal{P}_z}\Psi(x/p,y)+\sum_{\substack{p,\,q\in\mathcal{P}_z\\ q<p}}|E_{\mathbf{1}}(x/p,y;(p-q)\vartheta)|\Big\}\\
&\ll \Psi(x,y)^2\big\{L(z)+o_z(1)\big\}
\end{aligned}$$

où, d'après (8·1) la quantité $o_z(1)$ tend vers 0, pour chaque z fixé, lorsque x et y tendent vers l'infini sous la contrainte $Y(x)\leqslant y\leqslant x$.

Reportons dans (8·7) puis (8·6), divisons par $\Psi(x,y)$ et faisons tendre x et y, puis z vers l'infini en faisant appel à (8·4) : nous obtenons bien la formule asymptotique requise (1·31). □

9. Ordre normal de ω_t et applications

9·1. Valeur moyenne de ω_t

Nous établissons ici une estimation précise de $A_{\omega_t}(x,y)$.

Nous posons, pour $\alpha=\alpha(x,y)$,

(9·1) $$v_t := \frac{t^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log t},\quad M(t)=M_{x,y}(t):=\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p^\alpha}\qquad(t\geqslant 2),$$

Lemme 9.1. *On a, uniformément pour $2\leqslant t\leqslant y\leqslant x$,*

(9·2) $$\begin{aligned}A_{\omega_t}(x,y)&=M(t)+O(1)\\&=\log_2 2t+v_t+O\Big(\frac{v_t}{\log 2v_t}\Big).\end{aligned}$$

En particulier, on a uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$

(9·3) $$A_\omega(x,y)=\log_2 2y+\frac{uy}{y+\log x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}+\frac{1}{\log 2u}\Big)\Big\}.$$

Démonstration. Montrons la première égalité de (9·2). Nous avons

$$A_{\omega_t}(x,y) = \sum_{p\leqslant t}\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} = M(t) - \sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p^{\alpha(1+[\log x/\log p])}}.$$

Si $\alpha = \alpha(x,y) \geqslant \frac{2}{3}$, la dernière somme est clairement bornée. Dans le cas contraire, (3·3) implique l'existence d'une constante $b>0$ telle que $y\leqslant(\log x)^b$. De plus, la dernière somme en p est trivialement majorée par $\pi(y)/x^\alpha$. Or, toujours d'après (3·3), on a

$$\alpha \gg \min\Big\{\frac{1}{\log y},\frac{y}{(\log y)(\log x)}\Big\} \gg \min\Big\{\frac{1}{b\log_2 x},\frac{y}{(\log y)(\log x)}\Big\}.$$

On en déduit que $\pi(y)/x^\alpha \ll 1$, ce qui fournit bien l'estimation souhaitée.

Pour établir la seconde formule de (9·2), nous faisons appel au lemme 3.6 de [5], dont nous déduisons que

$$M(t) = \log_2 2t + \Big\{1+O\Big(\frac{1-\alpha}{\mathcal{L}(t)^c}\Big)\Big\}\int_1^{v_t} z\xi'(z)\,\mathrm{d}z + O(1) \qquad (t\geqslant 2) \tag{9·4}$$

où c est une constante absolue positive et où l'on a posé

$$\mathcal{L}(t) := \exp\big\{(\log t)^{3/5}/(\log_2 2t)^{1/5}\big\}.$$

Le résultat annoncé découle donc de (3·28).

L'évaluation (9·3) résulte immédiatement de la formule (3·6) de [5] sous la forme

$$v_y = \frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{uy}{y+\log x} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2). \tag{9·5}$$

□

9·2. Ordre normal de ω_t : preuve du Théorème 1.6

Il résulte de la première relation (9·2), de l'identité $A_{\omega_t}(x,y) = B_{\omega_t}(x,y)^2$ et du Théorème 1.1 que

$$\sum_{n\in S(x,y)} |\omega_t(n)-M(t)|^2 \ll \Psi(x,y)M(t) \qquad (x\geqslant y\geqslant t\geqslant 2). \tag{9·6}$$

D'où

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ |\omega_t(n)-M(t)|>h\sqrt{M(t)}}} 1 \ll \frac{\Psi(x,y)}{h^2} \qquad (x\geqslant y\geqslant t\geqslant 2,\ h>0). \tag{9·7}$$

Soit $c \in]1, b[$. La fonction $t \mapsto M(t)$ est croissante au sens large et ses sauts n'excédent pas 1. Pour chaque entier k tel que $M(2) \leqslant k \leqslant M(y)$, il existe donc un nombre réel $t_k \in [2, y]$ tel que

$$k^3(\log k)^c - \tfrac{1}{2} < M(t_k) \leqslant k^3(\log k)^c + \tfrac{1}{2}.$$

En spécialisant $t = t_k$ et $h = \frac{1}{2}k^{1/2}(\log k)^{c/2}$ dans (9·7), nous obtenons que l'encadrement

$$|\omega_{t_k}(n) - M(t_k)| \leqslant M(t_k)^{2/3}\{\log M(t_k)\}^{c/3} \tag{9·8}$$

a lieu pour tous les entiers n de $S(x, y)$ sauf peut-être pour au plus

$$\ll \Psi(x, y)/\{k(\log k)^c\}$$

d'entre eux. Par sommation sur k, il s'ensuit que (9·8) a lieu simultanément pour tous les entiers k de $[2, y]$ tels que $t_k > \frac{1}{2}T_x$ sauf peut-être pour au plus $\Psi(x, y)/(\log T_x)^{c-1}$ entiers n de $S(x, y)$. Le résultat annoncé en découle en remarquant que $\omega_t(n)$ est une fonction croissante de t et que

$$M(t_{k+1}) - M(t_k) \ll k^2(\log t_k)^c \ll M(t_k)^{2/3}\{\log M(t_k)\}^{c/3}.$$

9·3. Ordre normal de $p_j(n)$: preuve du Corollaire 1.7

La démonstration repose sur l'évaluation

$$\big|M\big(p_j(n)\big) - j\big| \leqslant j^{2/3}(\log j)^{c/3}, \tag{9·9}$$

obtenue en choisissant $t = p_j(n)$ dans l'énoncé du Théorème 1.6. Par ailleurs, nous observons d'emblée que l'estimation (9·5) fournit

$$\begin{aligned} H_{x,y} &= -\log\Big\{\frac{1}{\log y}\xi\Big(\frac{uy}{y + \log x}\Big)\Big\} + O(1) \\ &= \log\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big) + O(1). \end{aligned} \tag{9·10}$$

Montrons d'abord la première relation (1·34). Soit j un indice satisfaisant à $J_x < j \leqslant H^*_{x,y}$. D'après la seconde estimation (9·2), cela implique

$$\log_2 p_j(n) \leqslant j + j^{2/3}(\log j)^{c/3}.$$

De plus, si, l'on avait $\log_2 p_j(n) \leqslant j - 3j^{2/3}(\log j)^{c/3}$, il suivrait $\log_2 p_j(n) \leqslant H_{x,y}$, et donc, d'après (9·10),

$$(1 - \alpha)\log p_j(n) \ll 1.$$

Par (9·2), nous obtiendrions alors $\log_2 p_j(n) > j - 2j^{2/3}(\log j)^{c/3}$, ce qui induit une contradiction. Cela établit bien (1·34) lorsque $j \leqslant H^*_{x,y}$.

Considérons maintenant le cas $j > H^*_{x,y}$. Nous posons

$$\Lambda(\vartheta) := \log\vartheta + \frac{\mathrm{e}^{\vartheta} - 1}{\vartheta} \qquad (\vartheta > 0),$$

et désignons par V l'application réciproque de Λ. Notant $w_j := (1-\alpha)\log p_j(n)$, nous déduisons de (9·2) et (9·9) que

$$\begin{aligned}\Lambda\big(w_j\big) + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{w_j} - 1}{w_j^2}\Big) &= j_{x,y} + O\big(j^{2/3}(\log j)^{c/3}\big) \\ &\gg j_{x,y} \gg H^{2/3}_{x,y}.\end{aligned} \tag{9·11}$$

Cela implique $w_j \gg \log j_{x,y}$ et donc

$$\Lambda\big(w_j\big) = j_{x,y}\big\{1 + O(1/\log j_{x,y})\big\}.$$

Nous concluons en remarquant que

$$V(z) = \log z + \log_2 z + O(1), \quad V'(z) \asymp 1/z \qquad (z \geqslant 2).$$

Bibliographie

[1] K. Alladi, The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors, *J. reine angew. Math.* **335** (1982), 180–196.

[2] A. Biró & T. Szamuely, A Turán–Kubilius inequality with multiplicative weights, *Acta Math. Hung.* **70** (1996), n° 1-2, 39–56.

[3] R. de la Bretèche, Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier, *Proc. London Math. Soc.* (3) **77**, (1998), 39-78.

[4] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Sur les lois locales de la répartition du k-ième diviseur d'un entier, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **84** (2002), 289–323.

[5] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.

[6] H. Daboussi, Fonctions multiplicatives presque périodiques B, *Astérisque* **24-25**, (1975), 321-324.

[7] H. Daboussi, On some exponential sums, in : B.C. Berndt, H.G. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand (éds.) *Analytic number theory* (Allerton Park, IL, 1989), *Progr. Math.* 85, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 111–118.

[8] H. Daboussi & H. Delange, On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one, *J. London Math. Soc.* (2) **26** (1982), n° 2, 245–264.

[9] Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum, Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs, *J. London Math. Soc.*, (2) **26** (1982), 397-411.

[10] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : mean value theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 239, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1979.

[11] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : central limit theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 240, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1980.

[12] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[13] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 481-514.
[14] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics 90, Cambridge University Press, 1988.
[15] A. Hildebrand, An asymptotic formula for the variance of an additive function, *Math. Z.* **183** (1983), 145–170.
[16] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 265–290.
[17] A. Hildebrand, On the number of prime factors of integers without large prime divisors, *J. Number Theory* **25** (1987), 81–106.
[18] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
[19] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of differential–difference equations arising in number theory, *Journal d'analyse mathématique*, Vol. 61 (1993), 145–179.
[20] A. Ivić & G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. (Oxford),* (2) **37** (1986), 401–417.
[21] J. Kubilius, Probabilistic methods in the theory of numbers (en russe), *Uspehi Mat. Nauk.* **11** no. 2, (1956), 31–66, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 19 (1962), 47–85.
[22] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the theory of numbers*, Translations of Mathematical Monographs, 11, Providence, American Mathematical Society, XVIII, (1964), 182 pp.
[23] J. Kubilius, Estimation of the central moment for strongly additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien.), *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (no. 1) (1983), 122–133.
[24] J. Kubilius, Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien), *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (no. 2) (1983), 110–117.
[25] A. Rényi, A new proof of a theorem of Delange, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 323–329.
[26] H.N. Shapiro, On the Erdős–Wintner Theorem of Probabilistic Number Theory, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), n° 5, 665–678.
[27] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, n° 2 (1991), 123–143.
[28] C.M. Stein, *On the Turán–Kubilius inequality*, Technical Report no. 220, Stanford University, 1984.
[29] G. Tenenbaum, Cribler les entiers sans grand facteur premier, in : R.C. Vaughan (éd.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. London* A **345** (1993), 377–384.
[30] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.
[31] G. Tenenbaum, Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in : K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (éds.), *Number Theory in Progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.
[32] G. Tenenbaum, Trois conférences sur la théorie analytique des nombres, *Journées états de la recherche*, Bordeaux, 7–9 décembre 2000, http ://www.iecn.u-nancy.fr/~tenenb/PUBLIC/Prepublications_et_publications/JER.pdf
[33] P. Turán, On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **9**, 274-276 (1934).
[34] P. Turán, Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **11**, 125-133 (1936).
[35] T.Z. Xuan, The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors, *J. Number Theory* **43** (1993), 82–87.
[36] T.Z. Xuan, The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors (II), *Acta Arith.* **65** (1993), 329–352.
[37] T.Z. Xuan, Integers free with no large prime factors, *Acta Arith.* **69**, n° 4 (1995), 303–327.

Régis de la Bretèche
École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France