

Ensembles de multiples de suites finies

P. Erdős & G. Tenenbaum

Abstract. A Behrend sequence is a (necessarily infinite) integer sequence \mathcal{A} with elements exceeding 1 and whose set of multiples $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ has logarithmic density $\mu(\mathcal{A}) = 1$. By a famous theorem of Davenport and Erdős, this implies that $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ also has natural density equal to 1. An ε -pseudo-Behrend sequence is a finite sequence of integers exceeding 1 with $\mu(\mathcal{A}) > 1 - \varepsilon$. We show that for any given $\varepsilon \in]0, 1[$ and any function $\xi_N \rightarrow \infty$, the maximal number of disjoint ε -pseudo-Behrend sequences included in $[1, N]$ is $(\log N)^{\log 2} e^{O(\xi_N \sqrt{\log_2 N})}$.

We also prove that, for any given positive real number α , there is a positive constant $c = c(\alpha)$ such that $c < \mu(\mathcal{A}_N) < 1 - c$ where $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N(\alpha)$ is the set of all products ab with $N < a \leq N^{1+\alpha}$, $a < b \leq a(1 + \varepsilon_N)$, $(a, b) = 1$ and $\varepsilon_N := (\log N)^{1 - \log 3} e^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$. This provides, in a strong quantitative form, a finite analogue of the Maier-Tenenbaum theorem confirming Erdős' conjecture on the propinquity of divisors. A similar result holds for the natural density of the set of all integers n such that $F(n)$ has a divisor in the interval $]N, N^{1+\alpha}]$, where F is any polynomial with integer coefficients, and we establish in full generality that this quantity tends to a limit as N approaches infinity.

Finally, we show that, for large N and $q = (\log N)^{\log 2} 2^{-z_N \sqrt{\log_2 N}}$ with $z_N \rightarrow z \in \mathbb{R}$, the divisors d of an integer n with $d \leq N$ avoid no invertible residue class mod q with probability approximately $\Phi(z)$, where Φ denotes the distribution function of the Gaussian Law.

Keywords : distribution of divisors, Erdős conjecture, distribution of prime factors, distribution of arithmetic functions, sieve, multiplicative properties of polynomial values.

1991 Mathematics Subject Classification : 11N25, 11N37, 11N56, 11N64

1. Introduction et énoncé des résultats

Soit \mathcal{A} une suite d'entiers excédant 1. On désigne par

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \{ma : m \geq 1, a \in \mathcal{A}\}$$

l'ensemble des multiples de \mathcal{A} , c'est-à-dire la suite de tous les entiers ayant au moins un diviseur dans \mathcal{A} . Davenport et Erdős ont montré en 1937 ([2], voir aussi [3]) que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ possède nécessairement une densité logarithmique $\delta\mathcal{M}(\mathcal{A})$, égale à sa densité asymptotique inférieure $\underline{d}\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nous posons

$$\mu(\mathcal{A}) := \delta\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \underline{d}\mathcal{M}(\mathcal{A}).^{(1)}$$

1. Ici et dans la suite, nous notons $\mathbf{d}\mathcal{S}$ (resp. $\underline{d}\mathcal{S}$) la densité naturelle (resp. la densité naturelle inférieure) d'une suite d'entiers \mathcal{S} . Il est clair que, lorsque \mathcal{A} est une suite finie, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ possède une densité naturelle en tant que réunion finie de classes de congruences. On a donc dans ce cas $\mu\mathcal{A} = \mathbf{d}\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Il résulte également du théorème de Davenport–Erdős que

$$(1) \quad \mu(\mathcal{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{d}\mathcal{M}(\mathcal{A} \cap [1, N]),$$

autrement dit la densité logarithmique d'un ensemble de multiples peut être approchée d'arbitrairement près par celle des multiples d'une partie finie. Ainsi, l'étude de l'application $\mathcal{A} \mapsto \mu(\mathcal{A})$ peut être réduite, non trivialement, au cas de suites \mathcal{A} finies.

L'un des premiers résultats importants de la théorie des ensembles de multiples, dû à Besicovitch [1], stipule que $\liminf_{N \rightarrow \infty} \mu\{n : N < n \leq 2N\} = 0$. Cette estimation a permis à Besicovitch de construire un exemple de suite \mathcal{A} pour laquelle $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ne possède pas de densité naturelle. Améliorant un résultat d'Erdős [5], Tenenbaum a montré dans [25] que l'on a

$$(2) \quad \delta_N := \mu\{n : N < n \leq 2N\} = 1/(\log N)^{\delta+o(1)}$$

avec $\delta := 1 - (1 + \log \log 2)/\log 2 \approx 0,08607$. Ce résultat et diverses généralisations et conséquences sont établis en détail au chapitre 2 de [16].

On dit qu'une suite \mathcal{A} est une suite de Behrend si $\mu(\mathcal{A}) = 1$. Ce concept est l'un des plus profonds de la théorie des ensembles de multiples, et aussi l'un des plus mystérieux. En dépit de nombreuses tentatives, on cherche encore un critère simple et maniable permettant de décider si une suite donnée est de Behrend. Des avancées partielles ont été obtenues dans [13], [17], [22], [29], [30].

L'inégalité fondamentale de Behrend

$$1 - \mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \geq (1 - \mu(\mathcal{A}))(1 - \mu(\mathcal{B})),$$

valable pour toutes suites \mathcal{A} et \mathcal{B} , montre qu'une suite finie ne peut être de Behrend, et, plus précisément, que la condition

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} 1/a = +\infty$$

est nécessaire pour que $\mu(\mathcal{A}) = 1$. Cependant, au vu de (1), il est naturel de considérer, pour chaque ε de $]0, 1[$, les suites finies \mathcal{A} telles que $\mu(\mathcal{A}) > 1 - \varepsilon$. Nous dirons qu'une telle suite est ε -pseudo-Behrend, ce que nous écrirons sous forme abrégée ε -pB.

L'intérêt de la notion réside en ce qu'elle permet d'appréhender quantitativement la mesure relative de l'ensemble des suites de Behrend dans celui de toutes les suites d'entiers. À cet effet, nous introduisons la fonction $\beta(N; \varepsilon)$, égale au nombre maximal de suites ε -pB disjointes contenues dans $]1, N]$. Ici et dans la suite, nous notons \log_k la k -ème itérée de la fonction logarithme.

Théorème 1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour toute fonction $\xi_N \rightarrow \infty$, on a

$$(3) \quad \beta(N; \varepsilon) = (\log N)^{\log 2} e^{O(\xi_N \sqrt{\log_2 N})} \quad (N \rightarrow \infty).$$

Nous établissons ce résultat au paragraphe 2. La majoration est une conséquence presque immédiate d'une variante du théorème de Hardy–Ramanujan sur l'ordre normal du nombre total $\tau(n)$ des diviseurs d'un entier n .⁽²⁾ La minoration peut être établie de deux manières différentes. Une première voie, techniquement très aisée, est de nature probabiliste : nous munissons l'ensemble des parties de $]1, N]$ d'une probabilité \mathbb{P} telle que l'événement

$$(E_k) \quad \exists \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \subset]1, N] : \min_{1 \leq j \leq k} \mu(\mathcal{A}_j) > 1 - \varepsilon,$$

soit, pour au moins un entier $k > (\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$, de mesure positive — en fait proche de 1. Une seconde méthode consiste à construire explicitement des suites \mathcal{A}_j répondant à la question. Nous traitons le cas des classes de congruence au paragraphe 3. De nombreux autres choix naturels sont susceptibles de convenir : nous verrons que cela induit d'intéressants problèmes nouveaux.

Une autre classe de problèmes relatifs aux ensembles de multiples de suites finies est liée à la conjecture d'Erdős sur la concentration des diviseurs, datant de la fin des années trente et résolue en 1983 par Maier et Tenenbaum [18]. La conjecture initiale était

$$(4) \quad \mu(\mathcal{D}) = 1 \quad \text{pour} \quad \mathcal{D} := \{ab : 1 \leq a < b \leq 2a\},$$

où l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer qu'en outre $(a, b) = 1$ dans la définition de la suite \mathcal{D} . Une forme équivalente est

$$E(n) := \min_{ab|n, a < b} b/a \leq 2 \quad \text{pp.}^{(3)}$$

et il résulte des estimations établies dans [9] et [18] que

$$E(n) = 1 + (\log n)^{1 - \log 3 + o(1)} \quad \text{pp.}^{(4)}$$

Erdős a également formulé une variante de (4), dans laquelle les diviseurs d'un entier normal ne sont plus comparés entre eux mais à ceux d'un autre entier normal. Cette conjecture a été prouvée sous une forme forte par Raouj [19], [20] : notant $\mathcal{B}_\lambda(n) := \cup_{d|n}]d, d + d/(\log n)^\lambda]$, on a

$$(5) \quad \mu(\mathcal{B}_\lambda(n)) = \begin{cases} 1 + o(1) & \text{si } \lambda < \log 4 - 1, \\ o(1) & \text{si } \lambda > \log 4 - 1, \end{cases} \quad \text{pp.}$$

Il est probable que l'on ait encore $\mu(\mathcal{B}_\lambda(n)) = 1 + o(1)$ pp lorsque $\lambda = \log 4 - 1$. Ce cas limite est certainement délicat, mais peut-être la technique de Hall et Tenenbaum dans [17] (Théorème 2) permet-elle de trancher la question. On trouvera dans le récent travail de Raouj et Stef [21] des précisions et des compléments relatifs aux estimations (5).

2. La variante utilisée ici, bien connue, consiste en une évaluation du nombre des facteurs premiers de n n'excédant pas une limite donnée. Voir le paragraphe 2 pour les détails.

3. Ici et dans suite, la mention pp (presque partout) indique qu'une relation est satisfaite sur un ensemble d'entiers de densité naturelle unité.

4. Voir aussi [16], chapitre 5.

Le meilleur encadrement du terme d'erreur pour la densité dans $[1, x]$ de l'ensemble des multiples de \mathcal{D} est dû à Stef [23]. Il montre que, si l'on pose $R(x) := x - |\mathcal{M}(\mathcal{D}) \cap [1, x]|$, alors

$$x/(\log x)^{\beta+o(1)} \ll R(x) \ll xe^{-c\sqrt{\log_2 x}},$$

où $\beta := 1 - (1 + \log \log 3) / \log 3 \approx 0,00415$ et c est une constante positive convenable.

D'autres versions effectives de (4) peuvent être obtenues en restreignant les entiers de \mathcal{D} de diverses manières. Bien entendu, le théorème de Davenport–Erdős implique immédiatement que

$$\mu\{ab : a < b \leq 2a \leq 2N\} = 1 + o(1) \quad (N \rightarrow \infty).$$

Soit $P^+(a)$ (resp. $P^-(a)$) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier générique a avec la convention $P^+(1) = 1$ (resp. $P^-(1) = \infty$). Il résulte du théorème 51 de [16] que

$$(6) \quad \mu\{ab : P^-(ab) > M, P^+(ab) \leq N, a < b \leq 2a\} \rightarrow 1 \quad (N \rightarrow \infty)$$

dès que $\log N > (\log M)^\vartheta$ avec $\vartheta > \vartheta_0 := (\log 3) / (\log 3 - 1)$. De plus, le théorème 50 de [16] montre que la valeur ϑ_0 est optimale : le membre de gauche de (6) tend vers 0 si $\log N < (\log M)^\vartheta$ avec $\vartheta < \vartheta_0$. Cela permet de donner, en un certain sens, une mesure quantitative de la tendance à la concentration des diviseurs des entiers. Il suffit pour cela de comparer (6) au résultat facile

$$\mu\{a : P^-(a) > M, P^+(a) \leq N\} \rightarrow 1 \quad (N \rightarrow \infty, \log N > (\log M)^\vartheta),$$

qui est valable pour tout $\vartheta > 1$.⁽⁵⁾

Notre second théorème peut, dans le même esprit, être comparé à l'encadrement

$$(7) \quad c_1 \leq \Delta_N(\alpha) := \mu\{a : N < a \leq N^{1+\alpha}\} \leq 1 - c_2,$$

valable, pour chaque $\alpha > 0$ fixé et N assez grand, avec des constantes positives convenables $c_1 = c_1(\alpha)$, $c_2 = c_2(\alpha)$. Le résultat est assez surprenant, en ce sens qu'il révèle, pour cette mesure, une tendance à la concentration des diviseurs aussi forte que possible.

Théorème 2. *Soient $\alpha > 0$, $\xi_N \rightarrow \infty$, et $\varepsilon_N := (\log N)^{1-\log 3} e^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$. Posons, pour $N > 1$, $\Delta_N^*(\alpha) := \mu\{ab : N < a \leq N^{1+\alpha}, (a, b) = 1, a < b \leq (1 + \varepsilon_N)a\}$. Il existe un entier $N_0 > 1$ et des constantes positives c_3 et c_4 , ne dépendant que de α , telles que l'on ait pour $N > N_0$*

$$(8) \quad c_3 \leq \Delta_N^*(\alpha) \leq 1 - c_4.$$

5. Cela découle par exemple du crible de Brun, qui implique déjà cette formule sous la restriction que a est un nombre premier.

Il est facile de vérifier que (7) a lieu dès que $c_1 < \alpha/(1+\alpha)$, $c_2 < e^{-\gamma}/(1+\alpha)$, où γ est la constante d'Euler. La minoration est obtenue par le crible en considérant les entiers qui ont au moins un facteur premier dans $]N, N^{1+\alpha}]$; la majoration découle du fait que la densité des entiers n qui s'écrivent $n = ab$ avec $a \leq N$ et $P^-(b) > N^{1+\alpha}$ tend vers $e^{-\gamma}/(1+\alpha)$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Nous omettons les détails. En fait, il a été établi dans [24] que $\Delta_N(\alpha)$ tend vers une limite lorsque $N \rightarrow \infty$. Il est très vraisemblable que la suite $\Delta_N^*(\alpha)$ est également convergente, mais nous ne savons pas le démontrer. L'étude numérique de $\lim_N \Delta_N^*(\alpha)/\Delta_N(\alpha)$ fournirait dans ce cas une mesure concrète significative de la tendance des diviseurs à la concentration.

Étant donnée une suite à valeurs entières $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, on peut généraliser la notion d'ensemble de multiples en considérant l'ensemble des valeurs de n telles que $u_n \in \mathcal{M}(A)$. Le cas des polynômes à coefficients entiers est particulièrement intéressant. Pour $F \in \mathbb{Z}[X]$ et $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, nous posons

$$\mathcal{M}_F(\mathcal{A}) := \{n : F(n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}, \quad \boldsymbol{\mu}_F(\mathcal{A}) = \underline{\mathbf{d}}\mathcal{M}_F(\mathcal{A}).$$

Nous pouvons établir le théorème suivant, qui généralise le résultat cité plus haut de [24].

Théorème 3. *Pour $N > 1$ et $F \in \mathbb{Z}[X]$, posons*

$$\Delta_N(F, \alpha) := \boldsymbol{\mu}_F\{a : N < a \leq N^{1+\alpha}\}.$$

Alors, pour tout polynôme F de $\mathbb{Z}[X]$ et tout $\alpha > 0$, la quantité $\Delta_N(F, \alpha)$ tend vers une limite $\Delta(F, \alpha) \in]0, 1[$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Posons $\delta_N(F) := \boldsymbol{\mu}_F\{a : N < a \leq 2N\}$. Il est établi dans [27] que $\delta_N(F) \rightarrow 0$ si, et seulement si, F est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ⁽⁶⁾ et que, si F est réductible, on a

$$c < \delta_N(F) < 1 - c \quad (N > N_0(F))$$

avec une constante positive $c = c(F)$ convenable. Nous conjecturons l'existence de la limite, nécessairement dans $]0, 1[$,

$$\delta(F) := \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(F)$$

pour tout polynôme réductible. Nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune méthode d'attaque pour établir un tel résultat.

Nous terminons cette introduction par un autre problème ouvert, souvent posé par le premier auteur et abordé par le second dans [26]. Rappelons la définition δ_N de (2) et introduisons la densité δ'_N des entiers n ayant exactement un diviseur dans $]N, 2N]$: est-il vrai que l'on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta'_N/\delta_N = 0 \quad ?$$

6. Plus précisément, le résultat de [27] implique que la formule asymptotique (2) est encore valable pour $\delta_N(F)$ lorsque F est irréductible.

Les résultats de [26] impliquent

$$\delta'_N/\delta_N > e^{-c\sqrt{\log_2 N \log_3 N}}$$

et nous pensons à présent que la réponse à la question initiale est négative.

Le second auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Régis de la Bretèche pour son aide lors de la préparation de cet article.

2. Preuve du Théorème 1

Commençons par établir la majoration contenue dans (3). Nous posons

$$\omega(n, N) := \sum_{\substack{p^v \parallel n \\ p \leq N}} 1, \quad \Omega(n, N) := \sum_{\substack{p^v \parallel n \\ p \leq N}} \nu \quad (n \geq 1, N \geq 1),$$

de sorte que, classiquement, $\omega(n) := \omega(n, n)$, $\Omega(n) := \Omega(n, n)$. Il existe une fonction $\eta(N) \rightarrow 0$ possédant la propriété suivante : pour tout $x \geq N$, l'inégalité

$$(9) \quad |\omega(n, N) - \log_2 N| + |\Omega(n, N) - \log_2 N| \leq \xi_N \sqrt{\log_2 N}$$

a lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\eta(N)x$ exceptions. Des majorations élémentaires effectives de fonctions multiplicatives, comme celle de Halberstam et Richert [11],⁽⁷⁾ fournissent en fait l'évaluation $\eta(N) \ll \exp(-\xi_N^2/2)$ dès que $\xi_N \ll (\log_2 N)^{1/6}$.

Désignons génériquement par $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ la fonction indicatrice d'une suite \mathcal{A} , soit

$$(10) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n) := \begin{cases} 1, & \text{si } n \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{si } n \notin \mathcal{A}, \end{cases}$$

et introduisons la fonction arithmétique $\tau(n, \mathcal{A}) := \sum_{d|n} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(d)$, égale donc au nombre total de diviseurs de n qui sont dans \mathcal{A} .

Soient $N \geq 1$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_N$ la suite des entiers $n \geq 1$ qui satisfont (9). Posons $\overline{\mathcal{B}} := \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{B}$. Pour toutes sous-suites disjointes de $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ de $[1, N]$, on a

$$(11) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)}(n) \leq \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n)\tau(n, \mathcal{A}_j) + \mathbf{1}_{\overline{\mathcal{B}}}(n) \quad (n \geq 1).$$

En observant que

$$\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n) \sum_{1 \leq j \leq k} \tau(n, \mathcal{A}_j) \leq \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n) 2^{\Omega(n, N)} \leq (\log N)^{\log 2} 2^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}},$$

7. Cf. par exemple [28], théorème III.3.7, pour les détails de l'application

et en sommant (11) sur $j \in [1, k]$, il suit

$$(12) \quad \sum_{1 \leq j \leq k} \mathbf{1}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)}(n) \leq (\log N)^{\log 2} 2^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}} + k \mathbf{1}_{\overline{\mathcal{B}}}(n) \quad (n \geq 1).$$

En sommant maintenant (12) pour $n \leq x$ et en faisant tendre x vers l'infini, on obtient

$$\sum_{1 \leq j \leq k} \mu(\mathcal{A}_j) \leq (\log N)^{\log 2} 2^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}} + \eta(N)k.$$

Si $\min_{1 \leq j \leq k} \mu(\mathcal{A}_j) > 1 - \varepsilon$, il s'ensuit, pour N assez grand,

$$(1 - \varepsilon)k \leq (\log N)^{\log 2} 2^{\xi_N \sqrt{\log_2 N}} + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)k,$$

d'où la majoration de (3).

Remarque. Une variante de (11) permet d'établir une inégalité générale d'intérêt intrinsèque qui fournit une autre preuve de la majoration contenue dans (3) dans le cas où $\xi_N \gg \sqrt{\log_4 N}$. Posons $L(N) := \sqrt{2 \log_2 N \log_4 N}$. Alors on a

$$(13) \quad \mu(\mathcal{A}) < y^{-(1+\eta)L(N)} \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{y^{\Omega(a)} (\log a)^{y-1-\log y}}{a} + o(1) \quad (N \rightarrow \infty),$$

pour toute suite $\mathcal{A} \subset]1, N]$, et tous $y \in]0, 1[$, $\eta \in]0, 1[$.

Lorsque $\xi_N \gg \sqrt{\log_4 N}$, la majoration contenue dans (3) est une conséquence immédiate de (13) avec $y = 1/2$. En effet, si $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ sont des parties disjointes de $]1, N]$ telles que $\mu(\mathcal{A}_j) > 1 - \varepsilon$ pour $1 \leq j \leq k$, on déduit de (13) que, pour N assez grand,

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)k \leq 2^{(1+\eta)L(N)} \sum_{n \leq N} \frac{(\log n)^{\log 2 - 1/2}}{2^{\Omega(n)} n} < e^{O(\xi_N \sqrt{\log_2 N})} (\log N)^{\log 2}.$$

La preuve de (13) repose sur une idée exploitée dans Hall [13] et Hall–Tenenbaum [17] et utilisant la majoration de la loi du logarithme itéré d'Erdős [6] sous la forme⁽⁸⁾ $\lim_{z_0 \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{d}}\mathcal{C}(z_0, \eta) = 1$ pour tout $\eta > 0$, où $\mathcal{C}(z_0, \eta)$ est la suite des entiers n satisfaisant à

$$(14) \quad \sup_{z_0 \leq z \leq n} \{\Omega(n, z) - \log_2 2z\} / L(z) < 1 + \eta.$$

Nous déduisons immédiatement de (14) que, si l'on désigne par $\mathcal{C} = \mathcal{C}_N$ la classe des entiers n satisfaisant à

$$\sup_{z \leq N} \{\Omega(n, z) - \log_2 z\} \leq (1 + \eta)L(N),$$

alors $\underline{\mathbf{d}}\mathcal{C}_N \rightarrow 1$ quand $N \rightarrow \infty$.

8. Voir par exemple [16], chapitre 1, pour une démonstration directe.

Maintenant, on a certainement pour chaque y de $]0, 1]$

$$\mathbf{1}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(n) \leq \sum_{a|n, a \in \mathcal{A}} y^{\Omega(n,a) - \log_2 a - (1+\eta)L(N)} + \mathbf{1}_{\overline{\mathcal{C}}_N}(n) \quad (n \geq 1).$$

En sommant sur $n \leq x$ et en estimant la contribution des termes $y^{\Omega(n,a)}$ à l'aide, par exemple, du théorème III.3.6 de [28], on obtient bien (13).

Il nous reste à établir la minoration contenue dans (3).

Soient $\xi_N \rightarrow \infty$, $k := 2[(\log N)^{\log 2} e^{-3\xi_N \sqrt{\log_2 N}}]$. On suppose dans la suite que N est assez grand et que ξ_N tend assez lentement vers l'infini. Nous définissons une double suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes X_{jd} , $1 \leq j \leq k$, $1 < d \leq N$, de même loi

$$\mathbb{P}(X_{jd} = 1) = q_N := e^{2\xi_N \sqrt{\log_2 N}} / (\log N)^{\log 2}.$$

Nous posons

$$Y_{\ell d} := X_{\ell d} \prod_{1 \leq j < \ell} (1 - X_{jd}) \quad (1 \leq \ell \leq k, 1 < d \leq N)$$

et observons que $Y_{\ell d}$ et $Y_{\ell' d'}$ sont indépendantes si, et seulement si, $d \neq d'$. Nous considérons alors les suites aléatoires

$$\mathcal{A}_\ell := \{d : 1 < d \leq N, Y_{\ell d} = 1\} \quad (1 \leq \ell \leq k).$$

Les suites \mathcal{A}_ℓ sont disjointes par construction puisque $Y_{\ell d} = 1$ implique $Y_{\ell' d} = 0$ pour $1 \leq \ell < \ell' \leq k$ et tout $d \in]1, N]$. Nous allons montrer que la relation

$$(15) \quad \min_{1 \leq \ell \leq k} \mu(\mathcal{A}_\ell) > 1 - \varepsilon$$

a lieu avec une probabilité positive, ce qui fournira bien le résultat requis.

Désignant par \mathbb{E} l'espérance mathématique, on a, pour chaque d de $]1, N]$,

$$\mathbb{P}(d \in \mathcal{A}_\ell) = \mathbb{E}(Y_{\ell d}) = p_\ell := q_N (1 - q_N)^{\ell-1} \quad (1 \leq \ell \leq k).$$

Le choix de k garantit que

$$(16) \quad p_\ell \sim q_N \quad (1 \leq \ell \leq k, N \rightarrow \infty).$$

Posons $\tau(n, N) := \sum_{d|n, d \leq N} 1$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe une fonction $\eta_1(N) \rightarrow 0$ telle que, pour $x \geq N$, on ait

$$(17) \quad \tau(n, N) > (\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\eta_1(N)x$ exceptions. À cette fin, nous observons que l'on a pour tout $N_1 \leq N$

$$\tau(n, N) \geq 2^{\omega(n, N_1)} - d_N(n, N_1), \quad \text{avec} \quad d_N(n, N_1) := \sum_{\substack{d|n, d > N \\ P^+(d) \leq N_1}} 1.$$

Nous choisissons $N_1 := \exp\{(\log N)e^{-\sqrt{\log_2 N}}\}$. L'encadrement (9) implique alors que la minoration

$$2^{\omega(n, N_1)} > 2(\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$$

a lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\eta(N_1)x$ exceptions. De plus, désignant par $\Psi(x, y)$ le nombre des entiers n'excédant pas x et tels que $P^+(n) \leq y$, nous pouvons écrire

$$\sum_{n \leq x} d_N(n, N_1) \leq x \sum_{d > N, P^+(d) \leq N_1} \frac{1}{d} \leq x \int_N^\infty \Psi(z, N_1) \frac{dz}{z^2} \ll x,$$

d'après l'estimation $\Psi(x, y) \ll x^{1-1/(2 \log y)}$, valable uniformément dans le domaine $x \geq y \geq 2$.⁽⁹⁾ Cela implique bien (17) pour une fonction $\eta_1(N)$ convenable.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la minoration annoncée pour $\beta(N; \varepsilon)$. Pour $x > N$, nous répartissons les entiers n de $[1, x]$ en deux classes, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . La classe \mathcal{E}_1 contient tous les entiers n satisfaisant (17), et \mathcal{E}_2 contient tous les autres entiers, de sorte que, d'après ce qui précède, $|\mathcal{E}_2| \leq \eta_1(N)x$. Posons

$$\mathcal{F} := [1, x] \setminus \bigcap_{1 \leq \ell \leq k} \mathcal{M}(\mathcal{A}_\ell).$$

On a clairement

$$(18) \quad |\mathcal{F}| \leq \sum_{n \in \mathcal{E}_1} \sum_{1 \leq \ell \leq k} \{1 - \mathbf{1}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_\ell)}(n)\} + \eta_1(N)x,$$

avec la notation (10). De plus, pour tout ℓ de $[1, k]$ et tout n de \mathcal{E}_1 , on a, dès que N est assez grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 - \mathbf{1}_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_\ell)}(n)) &= \mathbb{E}\left(\prod_{d|n} (1 - \mathbf{1}_{\mathcal{A}_\ell}(d))\right) \\ &= (1 - p_\ell)^{\tau(n, N)} < \exp\{-e\sqrt{\log k}\} < 1/k^2, \end{aligned}$$

d'après (16) et (17). En reportant dans (18), il suit

$$\mathbb{E}(|\mathcal{F}|) \leq x/k + \eta_1(N)x \leq \eta_1^*(N)x,$$

où $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1^*(N) = 0$. Cela implique que l'événement (15) est réalisé avec une probabilité tendant vers 1, et achève ainsi la preuve de la minoration de $\beta(N; \varepsilon)$.

9. Voir par exemple [28], théorème III.5.1.

La preuve probabiliste présentée ci-dessus induit immédiatement la question d'une éventuelle preuve constructive. En s'appuyant sur un résultat de théorie probabiliste des groupes dû à Erdős et Rényi [10], Erdős a montré en 1965 [7] que, si $q \leq (\log x)^{\log 2 - \delta}$ où δ est un paramètre positif arbitraire, alors tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $o(x)$ exceptions ont au moins un diviseur d dans chacune des classes de congruence $d \equiv a \pmod{q}$ avec $(a, q) = 1$. Dans le même article, il a conjecturé que le résultat persistait sous l'hypothèse plus faible⁽¹⁰⁾

$$q \leq (\log x)^{\log 2} e^{-\xi(x)\sqrt{\log_2 x}},$$

où $\xi(x)$ est une fonction arbitraire qui tend vers l'infini.⁽¹¹⁾ Cette conjecture a été établie en 1976 par Erdős et Hall [8],⁽¹²⁾ à l'aide d'une variante du théorème d'Erdős et Rényi. Ainsi que l'a montré Hall [14] (*Theorem 2*), la démonstration, qui nécessite également un recours à une forme forte du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, peut être étendue sans difficulté au cas qui nous intéresse ici. Hall obtient ainsi que

$$\min_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \mu\{n \leq N : n \equiv a \pmod{q}\} \rightarrow 1 \quad (N \rightarrow \infty)$$

sous la seule hypothèse

$$(19) \quad q \leq (\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$$

avec $\xi_N \rightarrow \infty$. Comme $k = \varphi(q) \gg q/\log_2 q$, cela fournit une version constructive de la minoration du Théorème 1. Nous donnons au paragraphe suivant une démonstration indépendante de ce résultat, notablement plus simple que celle qui découle de la méthode de Erdős–Hall, et qui élucide également le cas où

$$q = (\log N)^{\log 2} e^{-z_N \sqrt{\log_2 N}}$$

avec $z_N \rightarrow z \in \mathbb{R}$.

L'existence de cette preuve constructive induit *ipso facto* toute une classe de nouveaux problèmes. Étant donnée une fonction $d \mapsto f(d)$ que l'on suppose être en un certain sens équirépartie sur les diviseurs d'un entier normal, peut-on construire une partition de $f([1, N])$ en $k = (\log N)^{\log 2 + o(1)}$ sous-ensembles dont les images réciproques \mathcal{A}_j ($1 \leq j \leq k$) satisfont (15) ?

Lorsque f est un homomorphisme du semi-groupe multiplicatif \mathbb{N}^* dans un groupe abélien, la méthode d'Erdős dans [7] ou celle du paragraphe suivant s'étendent sans

10. Et en fait optimale, en vertu du théorème de Hardy et Ramanujan.

11. Erdős a en fait émis la conjecture plus précise que, si $q = (\log x)^{\log 2} 2^{-\{c+o(1)\}\sqrt{\log_2 x}}$ avec c fixé, alors la propriété souhaitée est réalisée sur une ensemble d'entiers $n \leq x$ de cardinal $\{\Phi(c) + o(1)\}x$, avec $\Phi(c) := \int_{-\infty}^c e^{-t^2/2} dt/\sqrt{2\pi}$.

12. Erdős et Hall ont établi cette conjecture sous la forme plus précise mentionnée dans la note précédente.

difficulté majeure. On peut ainsi montrer que, notant $\langle u \rangle$ la partie fractionnaire d'un nombre réel u et posant

$$(20) \quad \mathcal{A}_j(F) := \{n \leq N : (j-1)/k < \langle F(d) \rangle \leq j/k\} \quad (1 \leq j \leq k),$$

on a (15) avec $F(d) := \log d$ lorsque k n'excède pas la borne supérieure de (19).

Lorsque f n'est pas un homomorphisme de groupes, la situation est notablement plus compliquée. Le cas de $F_\alpha(d) := (\log d)^\alpha$ avec $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, constitue à cet égard un problème exemplaire. Alors qu'il est possible, par une adaptation facile de la technique de [29] pour construire des suites de Behrend par blocs, de montrer que, si $\alpha > 1 - \log 2$,⁽¹³⁾ $\alpha \neq 1$,

$$(21) \quad \min_{d|n, d \leq N} \langle (\log d)^\alpha \rangle = (\log N)^{-\log 2 + o(1)}$$

pour tous les entiers n sauf ceux d'une suite de densité supérieure tendant vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, nous ne disposons actuellement d'aucune méthode d'attaque de (15), pour les mêmes valeurs de α , lorsque $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_j(F_\alpha)$ ($1 \leq j \leq k$).

Nous mentionnons pour mémoire le cas des fonctions $g_\vartheta(d) = \vartheta d$ avec ϑ irrationnel algébrique et $h_\alpha(d) = d^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}^*$: les meilleurs résultats connus dans la direction de (21) n'atteignent pas l'exposant $\log 2$,⁽¹⁴⁾ et l'on ne sait établir (15) que sous des conditions du type $k \leq (\log N)^c$ pour certains exposants $c > 0$ que les méthodes employées confinent certainement à ne pas excéder $\frac{1}{2} \log 2$.

3. Répartition des diviseurs dans les classes de congruences

Soit $\tau(n, N; a, q) := \sum_{\substack{d|n, d \leq N \\ d \equiv a \pmod{q}}} 1$. Nous allons établir le résultat suivant où Φ désigne la fonction de répartition de la loi de Gauss.

Théorème 4. *Soient $z \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_N \rightarrow 0$ et $q := (\log N)^{\log 2} 2^{-\{z+\varepsilon_N\}\sqrt{\log_2 N}}$. Il existe une fonction $\eta_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) telle que, pour $x \geq N \geq 3$, on ait*

$$(22) \quad \min_{(a,q)=1} \tau(n, N; a, q) \geq 1$$

pour $\{\Phi(z) + O(\eta_N)\}x$ entiers $n \leq x$.

De plus, si $q \leq (\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N \sqrt{\log_2 N}}$ avec $\xi_N \rightarrow \infty$, alors la relation (22) a lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll \eta_N x$ d'entre eux.

13. Cette condition est optimale : voir [15], théorème 6.12, [30] p.169, ou encore [31].

14. Le corollaire 9 de [30] et la remarque qui le suit fournissent, pour presque tout n (pp),

$$\tau(n)^{-1+o(1)} \leq \min_{d|n} \langle \vartheta d \rangle \leq (\log n)^{-a_1+o(1)},$$

avec $a_1 := 1 - (\log 3)/\log 4$, alors que le théorème 11 du même article implique

$$\min_{d|n} \langle d^\alpha \rangle \leq (\log n)^{-a_2+o(1)} \quad \text{pp,}$$

avec $a_2 := \log(\frac{12}{11})/\log 4$. Les mêmes techniques peuvent être adaptées pour établir les versions « finies », i.e. relatives aux diviseurs $d \leq N$, de ces résultats.

La méthode d'Erdős et Hall [8], reposant sur un théorème de théorie probabiliste des groupes, pourrait vraisemblablement être adaptée pour fournir une preuve de cet énoncé. En tout état de cause, le Théorème 4 fournit un renforcement du *theorem 2* de Hall [14], établi par cette méthode.⁽¹⁵⁾

Notre démonstration repose sur un lemme très simple, énoncé ici pour le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, mais qui peut être facilement étendu, *mutatis mutandis*, à tout groupe abélien fini.

Lemme 3.1. *Soient $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et E un ensemble de résidus premiers à q de cardinal $|E| > (1 - \varepsilon)\varphi(q)$. Pour chaque h -uplet (r_1, \dots, r_h) d'éléments de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, on désigne par $N(r_1, \dots, r_h)$ le nombre des résidus s de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ qui n'ont aucune représentation sous la forme $s = e \prod_{1 \leq j \leq h} r_j^{\alpha_j}$ avec $e \in E$ et $\alpha_j = 0$ ou 1 . On pose encore $\varrho(h) := 2^{h-1} + \frac{1}{2}$. Alors on a*

$$N(r_1, \dots, r_h) \leq \varepsilon^{\varrho(h)} \varphi(q)$$

sauf peut-être si (r_1, \dots, r_h) appartient modulo q à un ensemble $\mathcal{R}(E)$ de h -uplets de résidus de cardinal $|\mathcal{R}(E)| < h\sqrt{\varepsilon}\varphi(q)^h$.

Démonstration. On a

$$(23) \quad \sum_{(r_1, q)=1} N(r_1) = \sum_{(r_1, q)=1} \sum_{(s, q)=1} \mathbf{1}_{\overline{E}}(s) \mathbf{1}_{\overline{E}}(s/r_1) \\ = \{\varphi(q) - |E|\}^2 \leq \varepsilon^2 \varphi(q)^2.$$

Soit $E(r_1) = E \cup r_1 E$. On a donc $N(r_1) = \varphi(q) - |E(r_1)| \leq \varepsilon^{3/2} \varphi(q)$ sauf peut-être si r_1 appartient à un ensemble exceptionnel $\mathcal{R}_1(E)$ tel que $|\mathcal{R}_1(E)| \leq \sqrt{\varepsilon} \varphi(q)$. Lorsque $r_1 \notin \mathcal{R}_1(E)$, la relation (23) appliquée à $E(r_1)$ fournit

$$(24) \quad N(r_1, r_2) \leq \varepsilon^{5/2} \varphi(q)$$

sauf peut-être si r_2 appartient à un ensemble exceptionnel $\mathcal{R}_2(E, r_1)$ tel que $|\mathcal{R}_2(E, r_1)| \leq \sqrt{\varepsilon} \varphi(q)$. On a donc (24) sauf si (r_1, r_2) appartient à un ensemble exceptionnel $\mathcal{R}_2(E)$ de cardinal

$$|\mathcal{R}_2(E)| \leq |\mathcal{R}_1(E)| \varphi(q) + \varphi(q) \sup_{r_1 \in \overline{\mathcal{R}_1(E)}} |\mathcal{R}_2(E, r_1)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} \varphi(q)^2.$$

Une itération immédiate fournit le résultat attendu.

Nous énonçons maintenant une version du théorème d'Erdős–Kac avec paramètre de troncature, qui nous sera également utile. La démonstration peut être soit calquée sur celle du cas classique (voir par exemple [4], *theorem 12.3*, ou [28], *théorème III.4.8*), soit déduite de celui-ci via le crible. Nous omettons les détails.

15. Hall introduit en fait un paramètre supplémentaire que, par souci de simplicité, nous n'avons pas retenu ici. Il considère $\tau(n, M, N; a, q) := \tau(n, N; a, q) - \tau(n, M; a, q)$ et montre que l'on a $\min_{(a, q)=1} \tau(n, M, N; a, q) \geq 1$ pour $x(1 - \eta_N)$ entiers $n \leq x$ dès que $\log_2 M \ll \sqrt{\log_2 N}$, $x > x_0(N)$ et $q \leq (\log N)^{\log 2} e^{-\xi_N} \sqrt{\log_2 N}$ avec $\xi_N \rightarrow \infty$. Notre méthode s'adapte sans difficulté à cette généralisation : il suffit de ne considérer que les diviseurs dont tous les facteurs premiers excèdent M et d'exclure le diviseur $d = 1$. Le Théorème 4 est valable sans changement pour $\tau(n, M, N; a, q)$ si $\log_2 M \ll (\log_2 N)^{1/2-c}$ avec $c > 0$ pour la première partie de l'énoncé et $c = 0$ pour la seconde.

Lemme 3.2. Désignons par g_N l'une ou l'autre des fonctions $n \mapsto \omega(n, N)$ ou $n \mapsto \Omega(n, N)$. On a, uniformément pour $x \geq N \geq 3$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$(25) \quad \frac{1}{x} |\{n \leq x : g_N(n) \leq \log_2 N + z \sqrt{\log_2 N}\}| = \Phi(z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 N}}\right).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le Théorème 4.

Nous commençons par observer que tout entier n satisfaisant à (22) vérifie nécessairement

$$\varphi(q) \leq \tau(n, N) \leq 2^{\Omega(n, N)}.$$

D'après le Lemme 3.2, cela implique la majoration contenue dans l'énoncé.

Nous nous contentons d'établir la minoration lorsque z est fixé. Le cas correspondant à la seconde partie de l'énoncé est similaire, et en fait sensiblement plus simple.

Soient $\tau_q(n)$ le nombre des diviseurs d de n premiers à q et $Z_q(n)$ le nombre des classes $a \pmod{q}$ avec $(a, q) = 1$ telles que $\tau(n; a, q) \neq 0$. On a

$$\tau(n; a, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \overline{\chi(a)} \tau(n; \chi),$$

où χ décrit les caractères de Dirichlet de module q et où l'on a posé $\tau(n; \chi) := \sum_{d|n} \chi(d)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{(a, q)=1} \tau(n; a, q)^2 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} |\tau(n; \chi)|^2,$$

et donc

$$\tau_q(n)^2 = \left\{ \sum_{(a, q)=1} \tau(n; a, q) \right\}^2 \leq \frac{Z_q(n)}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} |\tau(n; \chi)|^2.$$

Soit $N_1 := \exp \exp \{ \log_2 N - 2(\log_2 N)^{1/3} \}$ et $m = m(n)$ le produit des facteurs premiers de n qui n'excèdent pas N_1 . Si χ n'est pas principal, on a, pour $x \geq N \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{|\tau(m; \chi)|^2}{\tau_q(m)} &\ll x \prod_{p \leq N_1} (1 + \chi(p)/p) \\ &\ll xL(1, \chi) \end{aligned}$$

où la dernière estimation découle du théorème de Siegel–Walfisz puisque $q \leq \log N_1$. En faisant appel à la majoration bien connue $L(1, \chi) \ll \log q$, nous obtenons que, pour tout $\psi_N \rightarrow \infty$,

$$(26) \quad Z_q(m) \geq \varphi(q) \left\{ 1 - \psi_N \frac{\varphi(q) \log q}{\tau_q(m)} \right\}$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $O(x/\psi_N)$ exceptions.⁽¹⁶⁾

16. On peut même supprimer le facteur $\log q$ dans (26) en utilisant la majoration

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1, \chi)|^2 \ll \varphi(q),$$

établie par exemple dans [12].

Posons $z_N := z + \varepsilon_N$, et considérons l'ensemble $\mathcal{G}_N(x)$ des entiers $n \leq x$ tels que

$$\frac{\log \tau_q(m)}{\log 2} \geq \log_2 N - z_N \sqrt{\log_2 N} + 2(\log_2 N)^{2/5}.$$

Dans toute la suite de cette démonstration, nous désignons par η_N une fonction générique de N qui tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, et qui est donc susceptible de modification à chacune de ses apparitions. On remarque d'abord que

$$|\mathcal{G}_N(x)| = \{\Phi(z) + O(\eta_N)\}x.$$

Cela résulte du Lemme 3.2 et du fait élémentaire que la moyenne de $\Omega((n, q))$ est $\ll \sum_{p|q} 1/p \ll \log_3 N$. En reportant dans (26), on voit donc que l'inégalité

$$Z_q(m) > (1 - \varepsilon)\varphi(q)$$

a lieu sauf peut-être pour au plus $\eta_N x$ entiers n de $\mathcal{G}_N(x)$, avec $\varepsilon = e^{-(\log_2 N)^{2/5}}$.

Soit $N_2 := \exp \exp \{\log_2 N - (\log_2 N)^{1/3}\}$. Pour chaque entier $n \leq x$, nous considérons les facteurs premiers de n qui appartiennent à l'intervalle $]N_1, N_2]$, disons p_1, \dots, p_h , et nous posons $n_h = mp_1 \cdots p_h$. Posons encore

$$(27) \quad d_y(n) := \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq y}} p^\nu.$$

D'après l'exercice III.5.6 de [32], on a

$$(28) \quad |\{n \leq x : d_y(n) > D\}| \ll x e^{-(\log D)/2 \log y} \quad (x \geq 1, D \geq 1, y \geq 2),$$

donc $n_h \leq \sqrt{N}$ sauf pour au plus $O(x/\log N)$ entiers $n \leq x$. Nous allons montrer que $Z_q(n_h) = \varphi(q)$ sauf pour $\eta_N x$ entiers de $\mathcal{G}_N(x)$, ce qui établira bien le résultat annoncé.

Désignons par E_m l'ensemble des classes s de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ occupées par au moins un diviseur de m , de sorte que $|E_m| = Z_q(m)$. Il résulte de l'inégalité de Turán-Kubilius que, pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x/(\log_2 N)^{1/3}$, on a

$$\frac{1}{2}(\log_2 N)^{1/3} \leq h \leq 2(\log_2 N)^{1/3}.$$

Avec les valeurs de q considérées, on a donc en particulier, pour les entiers non exceptionnels de $\mathcal{G}_N(x)$,

$$\varepsilon^{e(h)}\varphi(q) < \exp \left\{ -2^{h-1}(\log_2 N)^{2/5} \right\} \log N < 1,$$

donc $Z_q(n_h) = \varphi(q)$ sauf si (p_1, \dots, p_h) appartient modulo q à un ensemble, disons $\mathcal{R}_h(m)$, de h -uplets de résidus de cardinal $< h\sqrt{\varepsilon}\varphi(q)^h < \varepsilon^{1/3}\varphi(q)^h$. Le crible de

Brun nous permet alors, puisque $n_h \leq \sqrt{N}$, de déduire de ce qui précède que le nombre $Y(x)$ des entiers $n \in \mathcal{G}_N(x)$ tels que $Z_q(n_h) \neq \varphi(q)$ vérifie

$$Y(x) \ll \frac{x}{\log N_2} \sum_{P^+(m) \leq N_1} \frac{1}{m} \sum_{h \geq 0} \frac{1}{h!} \sum_{(r_1, \dots, r_h) \in \mathcal{R}_h(m)} \prod_{j=1}^h \sum_{\substack{p \equiv r_j \pmod{q} \\ N_1 < p \leq N_2}} \frac{1}{p} + \eta_N x.$$

D'après le théorème de Brun–Titchmarsh, il existe une constante absolue K telle que la somme intérieure soit majorée par $K(\log_2 N)^{1/3}/\varphi(q)$. Il suit

$$\begin{aligned} Y(x) &\ll \frac{x}{\log N_2} \sum_{P^+(m) \leq N_1} \frac{1}{m} \sum_{h \geq 0} \frac{|\mathcal{R}_h(m)|}{h!} \left\{ \frac{K(\log_2 N)^{1/3}}{\varphi(q)} \right\}^h + \eta_N x \\ &\ll \varepsilon^{1/3} x \frac{\log N_1}{\log N_2} \exp \{K(\log_2 N)^{1/3}\} + \eta_N x = \eta_N x. \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du Théorème 4.

4. Preuve du Théorème 2

La majoration est une conséquence triviale de (7), aussi nous pouvons nous borner à établir la minoration de (8). Nous pouvons alors supposer $\alpha \leq 1$.

Étant donné un nombre réel $w \geq 1$, nous notons $n_w := d_y(n)$ pour $y := \exp \exp w$. Nous posons encore

$$H = H_w(\xi) := (e/3)^w e^{\frac{1}{2}\xi\sqrt{w}} \quad (\xi \geq 0)$$

et

$$\mathfrak{L}_w(m) := \bigcup_{dd'|m} \left(\log(d'/d) + [-H, H] \right) \quad (m \geq 1).$$

Nous notons $\lambda_w(m)$ la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{L}_w(m)$. Il a été établi dans [16]⁽¹⁷⁾, qu'il existe deux constantes absolues positives ξ_0 et c_0 telle que, si $\xi > \xi_0$, $x \geq x_0(w)$, on ait

$$(29) \quad \lambda_w(n_w) \geq c_0 e^w$$

pour au moins $\frac{2}{3}x$ des entiers $n \leq x$. De plus, pour chaque $R > 0$, on a certainement

$$(30) \quad \frac{1}{2}w \leq \omega(n_w) \leq 2w, \quad \log n_w \leq Re^w$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x(1/w + e^{-R/2})$. Cela découle immédiatement du théorème de Turán–Kubilius et de (28). Nous choisissons w_0 et R assez grands pour que l'on ait (29) et (30) pour chaque $w > w_0$ et au moins $x/2$ entiers $n \leq x$ dès que $x > x_0(w)$, $\xi > \xi_0$.

17. Formule (5.49), p. 109. La restriction $w \in \mathbb{N}$ effectuée dans [16] est purement contingente et peut être levée sans modifier ni l'argument, ni les calculs.

Soit \mathcal{M}_w l'ensemble des valeurs prises par la fonction $n \mapsto n_w$ sur l'ensemble des entiers $n \leq x$ satisfaisant (29) et (30). On a par le crible

$$(31) \quad \frac{1}{2}x \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_w} \sum_{\substack{b \leq x/m \\ P^-(b) > \exp \exp w}} 1 \ll x e^{-w} \sum_{m \in \mathcal{M}_w} 1/m.$$

Une application routinière du théorème des nombres premiers nous permet alors de minorer par

$$\gg_{\alpha} x e^{-w} \sum_{m \in \mathcal{M}_w} 1/m \gg x$$

le nombre des entiers $n \leq x$ qui s'écrivent sous la forme $n = mpqb$ avec

$$(32) \quad \begin{cases} m \in \mathcal{M}_w, & (2/\alpha)Re^w < \log p \leq (1 + 2/\alpha)Re^w, \\ \log(q/p) \in \mathfrak{L}_w(m), & P^-(b) > \exp \exp w. \end{cases}$$

Nous omettons les détails, qui sont très voisins de ceux qui sont exposés dans [16], pp. 110–111. Les conditions (32) impliquent l'existence de deux diviseurs d, d' de m tels que $(d, d') = 1$ et $|\log(q/p) - \log(d'/d)| \leq H_w(\xi)$. De plus, on a alors

$$\frac{2}{\alpha}Re^w < \log(pd') \leq \frac{2}{\alpha}(1 + \alpha)Re^w.$$

Il reste à choisir $w = w_N$ tel que $2Re^w = \alpha \log N$ et $\xi = \xi_N$. On obtient ainsi que, pour N assez grand, la propriété qu'un entier n possède deux diviseurs $a = pd'$ et $b = qd$ avec $a < b < e^{H_w(\xi_N)}a$ est satisfaite pour une densité positive des entiers. Comme le choix de w garantit que

$$H_w(\xi_N) < \log(1 + \varepsilon_N),$$

cela achève la preuve du Théorème 2.

5. Preuve du Théorème 3

La démonstration nécessite quelques rappels concernant l'arithmétique des suites polynomiales. Nous nous donnons une décomposition de $F(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ sous la forme

$$(33) \quad F(X) = \prod_{j=1}^k F_j(X)^{\alpha_j},$$

et nous posons $\widehat{\omega}(F) := k$, $\widehat{\Omega}(F) := \sum_{1 \leq j \leq k} \alpha_j$.

Soit $\varrho_F(m)$ le nombre de racines de F dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Il est bien connu que ϱ_F est une fonction multiplicative de m . Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 2

de [27] pour un récapitulatif des principales propriétés de la fonction ϱ_F . Nous utilisons ici le fait que $\varrho_F(p)$ est une fonction bornée de p , et nous posons

$$D_F := \prod_{\varrho_F(p)=p} p.$$

Nous définissons alors une fonction multiplicative g_F par la formule

$$g_F(p^\nu) := \begin{cases} \frac{\varrho_F(p^\nu) - \varrho_F(p^{\nu+1})/p}{1 - \varrho_F(p)/p} & \text{si } p \nmid D_F, \\ \varrho_F(p^\nu) - \varrho_F(p^{\nu+1})/p & \text{si } p \mid D_F. \end{cases}$$

Posons $\varrho_j := \varrho_{F_j}$ ($1 \leq j \leq k$) et désignons par $\lceil v \rceil$ le plus petit entier au moins égal à $v \in \mathbb{R}$. On a⁽¹⁸⁾

$$(34) \quad \varrho_F(p^\nu) = \sum_{1 \leq j \leq k} \varrho_j(p) p^{\nu - \lceil \nu / \alpha_j \rceil} \quad (\nu \geq 1),$$

pour tous les nombres premiers p sauf au plus ceux d'un ensemble fini, et aussi⁽¹⁹⁾

$$(35) \quad \varrho_F(p^\nu) \ll \sum_{1 \leq j \leq k} \varrho_j(p) p^{\nu - \lceil \nu / \alpha_j \rceil} \quad (p \geq 2, \nu \geq 1).$$

En particulier, on a pour tout p assez grand

$$(36) \quad \sum_{\nu \geq 1} \frac{g_F(p^\nu)}{p^{\nu s}} = \frac{1 - 1/p}{1 - \varrho_F(p)/p} \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{\varrho_j(p)}{p^{1 + \alpha_j(s-1)} - 1} \quad (\Re s > 0).$$

Cela implique qu'il existe une constante $\sigma_0 \in]0, 1[$ telle que l'on ait pour $\Re s > \sigma_0$ et tout p

$$(37) \quad \sum_{\nu \geq 0} \frac{g_F(p^\nu)}{p^{\nu s}} = \prod_{j=1}^k (1 - p^{-1 - \alpha_j(s-1)})^{\varrho_j(p)} e^{V_p(s)}$$

où $V_p(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re s > \sigma_0$, qui satisfait en outre, dans le même domaine, la majoration

$$V_p(s) \ll p^{-3/2}.$$

On note encore que

$$(38) \quad \sum_{\nu \geq 1} \frac{g_F(p^\nu)}{p^\nu} = \begin{cases} \varrho_F(p)/(p - \varrho_F(p)) & \text{si } p \nmid D_F \\ 1 & \text{si } p \mid D_F. \end{cases}$$

Le lien entre la fonction g_F et les propriétés arithmétiques de la suite $\{F(n)\}_{n=1}^\infty$ apparaît naturellement dans l'énoncé suivant.

18. Voir, par exemple, [27] formule (2.8).

19. Voir [27], formule (2.15).

Lemme 5.1. Soit $F \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme dont la décomposition en facteurs irréductibles est donnée par (33). Alors on a pour $y > 1$, $P^+(u) \leq y \leq x$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ d_y(F(n))=u}} 1 = \begin{cases} O_y(1) & \text{si } D_F \nmid u, \\ x \frac{g_F(u)}{u} \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) + O_y(1) & \text{si } D_F \mid u. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $P_y := \prod_{p \leq y} p$. La quantité à évaluer vaut

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ F(n) \equiv 0 \pmod{u}}} \sum_{d|(P_y, F(n)/u)} \mu(d) &= \sum_{d|P_y} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ F(n) \equiv 0 \pmod{ud}}} 1 \\ &= \sum_{d|P_y} \mu(d) \left\{ x \frac{\varrho_F(ud)}{ud} + O(1) \right\} \\ &= x \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid u}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \prod_{p^\nu \parallel u} \left(\frac{\varrho_F(p^\nu)}{p^\nu} - \frac{\varrho_F(p^{\nu+1})}{p^{\nu+1}} \right) + O_y(1). \end{aligned}$$

La formule annoncée en découle immédiatement, en notant que le premier produit en p est nul si $D_F \nmid u$.

Le lemme suivant est dévolu à une évaluation de la valeur moyenne de g_F sur l'ensemble des multiples de D_F . Une telle estimation peut être obtenue grâce à la formule (37), qui permet de relier la série de Dirichlet de g_F au produit des fonctions zêta de Dedekind associées aux corps de décomposition des F_j . Nous omettons les détails de la démonstration, qui sont analogues à ceux de la preuve du lemme 3.9 de [27]. Nous posons

$$K_F := \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \frac{\varphi(D_F)}{D_F} \right\}^k \prod_{p \nmid D_F} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k.$$

La convergence du produit infini est assurée par le théorème des idéaux premiers, qui implique⁽²⁰⁾

$$(39) \quad \sum_{p \leq x} \varrho_j(p) = \text{li}(x) + O\left(xe^{-a_0\sqrt{\log x}}\right) \quad (1 \leq j \leq k)$$

avec $a_0 = a_0(F) > 0$.

Lemme 5.2. On a pour $x \geq 2$

$$(40) \quad \sum_{\substack{d \leq x \\ D_F \mid d}} g_F(d) = \left\{ K_F + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} x (\log x)^{\widehat{\omega}(F)-1}.$$

Le dernier résultat auxiliaire utilisé dans la preuve du Théorème 3 est formalisé dans l'énoncé suivant.

20. Voir par exemple [27], lemme 3.1, pour les détails.

Lemme 5.3. Soit $\alpha > 0$. Pour $N > 1$, $T > 1$, on désigne par $\varepsilon(N, \alpha; T)$ la densité de l'ensemble des entiers n tels que $\sum_{\substack{p^\nu \parallel F(n) \\ N^\alpha < p \leq N}} \nu > T$. Alors on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{N > 1} \varepsilon(N, \alpha; T) = 0.$$

Démonstration. Il résulte immédiatement de (34) et (39) que l'on a

$$(41) \quad \sum_{\substack{N^\alpha < p \leq N \\ \nu \geq 1}} \frac{\varrho_F(p^\nu)}{p^\nu} = \widehat{\Omega}(F) \log(1/\alpha) + O(1).$$

Cela fournit bien le résultat annoncé.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la preuve du Théorème 3. Soit $n \geq 1$. On considère la décomposition $F(n) = a_n b_n c_n$ où a_n est maximal sous la contrainte $a_n \leq N$ et $c_n := \prod_{p^\nu \parallel F(n), p > N^{1+\alpha}} p^\nu$. Si $F(n)$ ne possède aucun diviseur dans $\mathcal{A}_N :=]N, N^{1+\alpha}] \cap \mathbb{N}$, alors tous les facteurs premiers de b_n sont dans $]N^{1+\alpha}/a_n, N] \subset]N^\alpha, N]$, où nous convenons que cet ensemble est vide si $\alpha \geq 1$. De plus, d'après le Lemme 5.3, on a $\Omega(b_n) \leq T$, et donc $b_n \leq N^T$, sauf pour un ensemble d'entiers de densité tendant uniformément vers zéro lorsque $T \rightarrow \infty$. Or, d'après le Lemme 5.1, pour tous a, b fixés tels que $a \leq N$, $D_F \mid a$, $b \leq N^T$, $P^-(b) > N^\alpha$, $P^+(b) \leq N$, on a

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ a_n = a, b_n = b}} 1 = x \prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \frac{g_F(ab)}{ab} + O_N(1).$$

Il suit

$$(42) \quad 1 - \Delta_N(F, \alpha) = \prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \sum_{\substack{a \leq N \\ D_F \mid a}} \sum_{\substack{b \leq N^T \\ p \mid b \Rightarrow N^\alpha < p \leq N}}^* \frac{g_F(ab)}{ab} + O(\varepsilon_T)$$

où $\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon_T = 0$ et où l'astérisque indique que la sommation est restreinte aux entiers b tels que ab n'ait aucun diviseur dans \mathcal{A}_N . Le cas $b = 1$ fournit toujours une majoration de $\Delta_N(F, \alpha)$, soit, au vu du Lemme 5.1,

$$\Delta_N(F, \alpha) \leq 1 - \prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \sum_{\substack{a \leq N \\ D_F \mid a}} \frac{g_F(a)}{a},$$

qui est une égalité lorsque $\alpha \geq 1$. En tenant compte de (40), on obtient par un calcul facile dont nous omettons les détails, sous réserve d'existence de la limite,

$$\Delta(F, \alpha) \leq 1 - \frac{e^{-\gamma k}}{k! (1 + \alpha)^k},$$

avec égalité pour $\alpha \geq 1$. Cela établit en particulier que $\Delta(F, \alpha) < 1$.

Montrons ensuite que l'on a

$$(43) \quad \Delta_N(F, \alpha) \geq 1 - \prod_{N < p \leq N^{1+\alpha}} (1 - \varrho_F(p)/p),$$

ce qui, compte tenu de (39), fournira bien, sous réserve d'existence, la positivité de la limite.

Soit h_N la fonction fortement multiplicative définie par $h_N(p) := 1 - \mathbf{1}_{]N, N^{1+\alpha}[}(p)$. Alors $1 - h_N(m)$ vaut 1 ou 0 selon que m possède ou non un facteur premier dans $]N, N^{1+\alpha}[$. En particulier

$$(44) \quad \Delta_N(F, \alpha) \geq 1 - \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} h_N(F(n)).$$

Maintenant, on peut écrire la formule d'inversion de Möbius

$$h_N(m) = \sum_{d|(m, M_N)} \mu(d),$$

où l'on a posé $M_N := \prod_{N < p \leq N^{1+\alpha}} p$. Il suit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} h_N(F(n)) &= \sum_{d|M_N} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ F(n) \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \\ &= \sum_{d|M_N} \mu(d) \left\{ \frac{\varrho_F(d)x}{d} + O(1) \right\} \\ &= x \prod_{N < p \leq N^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p} \right) + O_N(1). \end{aligned}$$

En reportant dans (44), on obtient bien (43).

Il reste à établir l'existence de la limite $\Delta(F, \alpha)$. Pour chaque T fixé, il n'y a qu'un nombre fini de choix de $h \geq 1$ et de h -uples $(\nu_1, \dots, \nu_h) \in (\mathbb{N}^*)^h$ tels que l'on ait, dans (42),

$$(45) \quad b = p_1^{\nu_1} \cdots p_h^{\nu_h}, \quad \text{avec } N^\alpha < p_1 < p_2 < \cdots < p_h \leq N.$$

Nous pouvons donc nous restreindre à montrer que, pour chaque entier $h \geq 1$ et chaque h -uple fixé (ν_1, \dots, ν_h) , la sous-somme de (42) correspondant à la condition supplémentaire (45) tend vers une limite lorsque $N \rightarrow \infty$. Dans une telle sous-somme, on peut écrire, pour N assez grand, $a = up_1^{r_1} \cdots p_h^{r_h}$ avec $r_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq h$), $\sum_{1 \leq j \leq h} r_j \leq 1/\alpha$, $D_F | u$, $(u, p_1 \cdots p_h) = 1$. Il nous suffit donc de montrer que, pour $(\nu_1, \dots, \nu_h) \in (\mathbb{N}^*)^h$ et $(\nu_1, \dots, \nu_h) \in \mathbb{N}^h$ fixés, la quantité

$$(46) \quad \prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p} \right) \sum_{\substack{u \leq N \\ D_F | u}} \frac{g_F(u)}{u} \sum_{\substack{N^\alpha < p_1 < \cdots < p_h \leq N \\ (u, p_1 \cdots p_h) = 1}}^{**} \prod_{j=1}^h \frac{\varrho_F(p_j^{\nu_j + r_j})}{p_j^{\nu_j + r_j}},$$

où la double astérisque indique maintenant que $u \prod_{1 \leq j \leq h} p_j^{\nu_j + r_j}$ n'a aucun diviseur dans \mathcal{A}_N , tend vers une limite lorsque $N \rightarrow \infty$. Comme on a, d'après (38), pour tout $u \leq N$,

$$\sum_{\substack{p|u \\ N^\alpha < p \leq N}} \sum_{\nu \geq 1} \frac{g_F(p^\nu)}{p^\nu} \ll 1/N^\alpha,$$

on voit que la condition $(u, p_1 \cdots p_h) = 1$ dans la somme intérieure de (46) peut être omise avec une erreur globale $o(1)$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Cette somme intérieure peut alors être réécrite sous la forme

$$(47) \quad \sum_{N^\alpha < p_1 < \cdots < p_h \leq N} f\left(\frac{\log p_1}{\log N}, \dots, \frac{\log p_h}{\log N}, \frac{\log u}{\log N}\right) \prod_{j=1}^h \frac{\varrho_F(p_j^{\nu_j + r_j})}{p_j^{\nu_j + r_j}}$$

où $(v_1, \dots, v_h) \mapsto f(v_1, \dots, v_h; v)$ est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble de $[\alpha, 1]^h$ défini par un nombre fini d'inégalités linéaires pour lesquelles v intervient linéairement dans la définition des bornes. Ainsi $f(v_1, \dots, v_h; v)$ est intégrable au sens de Riemann et dépend continûment de v . Une adaptation immédiate du lemme 22.1 de [16], faisant appel à (39) au lieu du théorème des nombres premiers, permet alors de conclure que chacune des sommes (47) vaut $\lambda(\log u / \log N) + o(1)$ pour une fonction continue convenable $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Cela permet de récrire (46) sous la forme

$$\prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \sum_{\substack{u \leq N \\ D_F | u}} \frac{g_F(u)}{u} \lambda\left(\frac{\log u}{\log N}\right) + o(1) = \int_0^1 \lambda(v) dZ_N(v) + o(1),$$

où l'on a posé

$$Z_N(v) := \prod_{\substack{p \leq N^{1+\alpha} \\ p \nmid D_F}} \left(1 - \frac{\varrho_F(p)}{p}\right) \sum_{\substack{u \leq N^v \\ D_F | u}} \frac{g_F(u)}{u}.$$

D'après le Lemme 5.2, $Z_N(v)$ tend vers $e^{-\gamma k} v^k / k!$ pour tout $v \in [0, 1]$ et la suite des mesures dZ_N est uniformément bornée sur $[0, 1]$. Un théorème classique de convergence d'intégrales de Stieltjes (cf., par exemple, [33], théorème 16.4) permet alors de conclure que

$$\int_0^1 \lambda(v) dZ_N(v) = \frac{e^{-\gamma k}}{(k-1)!} \int_0^1 \lambda(v) v^{k-1} dv + o(1).$$

Cela achève la démonstration du Théorème 3.

Bibliographie

- [1] A.S. Besicovitch, On the density of certain sequences, *Math. Annalen* **110** (1934), 336–341.
- [2] H. Davenport & P. Erdős, On sequences of positive integers, *Acta Arith.* **2** (1937), 147–151.
- [3] H. Davenport & P. Erdős, On sequences of positive integers, *J. Indian Math. Soc.* **15** (1951), 19–24.
- [4] Elliott, P.D.T.A., Probabilistic number theory : central limit theorems (Grundlehren der Math. Wiss. 240). Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1980.
- [5] P. Erdős, Note on sequence none of which are divisible by any other, *J. London Math. Soc.* **10**, (1935), 126–128.
- [6] P. Erdős, On the distribution of additive functions, *Ann. Math.* **47** (1946), 1–20.
- [7] P. Erdős, On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod d), *Bull. Math. Soc. Grèce* **6** Fasc. 1 (1965), 27–36.
- [8] P. Erdős & R. R. Hall, Proof of a conjecture about the distribution of divisors of integers in residue classes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** (1976), 281–287.
- [9] P. Erdős & R. R. Hall, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 304–307.
- [10] P. Erdős & A. Rényi, Probabilistic methods in group theory, *Journal Analyse math.* **14** (1965), 127–138.
- [11] H. Halberstam et H.-E. Richert, On a result of R. R. Hall, *J. Number Theory*, no.1, **11** (1979), 76–89.
- [12] Hall, R. R., On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod k), *J. Number Theory* **2**, no. 2 (1970), 168–188.
- [13] Hall, R. R., Sets of multiples and Behrend sequences, in : *A tribute to Paul Erdős* (editors A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal), Cambridge University Press, 1990, pp. 249–258.
- [14] Hall, R. R., On some conjectures of Erdős in *Astérisque*, I, *J. Number Theory* **42**, (1992), 313–319.
- [15] Hall, R.R., *Sets of multiples*, Cambridge Tracts in mathematics, no. 118, Cambridge University Press, 1996.
- [16] R. R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in mathematics, no. 90, Cambridge University Press, 1988.
- [17] R. R. Hall & G. Tenenbaum, On Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **112** (1992), 467–482.
- [18] H. Maier & G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
- [19] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 1, *Acta Arith.* **69** (1995), 121–152.
- [20] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 2, *Acta Arith.* **69** (1995), 171–188.
- [21] A. Raouj & A. Stef, Sur la proximité des diviseurs des entiers, prépublication.
- [22] I. Z. Ruzsa & G. Tenenbaum, A note on Behrend sequences, *Acta Math. Hung.* **72**, no. 4 (1996), 327–337.
- [23] A. Stef, *L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs*, Thèse d'université, Université Nancy 1, 1992.
- [24] G. Tenenbaum, Lois de répartition des diviseurs, 3, *Acta Arith.* **39** (1981), 19–31.
- [25] G. Tenenbaum, Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Compositio Math.* **51** (1984), 243–263.
- [26] G. Tenenbaum, Un problème de probabilité conditionnelle en Arithmétique, *Acta Arith.* **49** (1987), 165–187.
- [27] G. Tenenbaum, Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős*, Cambridge University Press (1990), 405–443.
- [28] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.
- [29] G. Tenenbaum, On block Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **120** (1996), 355–367.
- [30] G. Tenenbaum, Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *L'Enseignement Mathématique* **42** (1996), 153–197.

- [31] G. Tenenbaum, Qu'est-ce qu'un entier normal?, in : É. Charpentier (éd.), *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, École doctorale de l'université de Bordeaux 1, Éditions Cassini, à paraître.
- [32] G. Tenenbaum, en collaboration avec J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [33] D.V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, huitième éd., 1972.

G. Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France