

*Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*  
(1993), **345**, 377-384.

# Cribler les entiers sans grand facteur premier

G. Tenenbaum

## 1. Introduction

Soit  $P(n)$  le plus grand facteur premier d'un entier naturel générique  $n$ , avec la convention  $P(1) = 1$ . La répartition asymptotique de l'ensemble

$$S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\} \quad (x \geq y \geq 2)$$

dans les progressions arithmétiques a suscité plusieurs travaux récents [BP,G,FT].

Lorsque  $(a, q) = 1$ , l'approximation naturelle pour

$$(1.1) \quad \Psi(x, y; a, q) := |S(x, y) \cap \{n \geq 1 : n \equiv a \pmod{q}\}|$$

est  $\Psi_q(x, y)/\varphi(q)$ , où  $\varphi$  est la fonction d'Euler et où l'on a posé

$$(1.2) \quad \Psi_q(x, y) := |S(x, y) \cap \{n \geq 1 : (n, q) = 1\}|.$$

Cette quantité, qui pose par ailleurs un intéressant problème de crible, est susceptible, en l'état actuel des techniques disponibles, d'être évaluée asymptotiquement dans un domaine en  $x, y, q$  beaucoup plus large que celui dans lequel on peut espérer estimer (1.1).

Posons classiquement  $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$ . Fouvry et l'auteur ont montré dans [FT] (th.1) que l'approximation heuristique

$$(1.3) \quad \Psi_q(x, y) \approx \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y)$$

a lieu sous des conditions assez peu restrictives pour les trois paramètres du problème. Nous nous proposons ici de préciser ce résultat en fournissant

des estimations essentiellement optimales pour le domaine de validité et la taille du terme résiduel.

Nous notons traditionnellement  $\omega(n)$  le nombre des facteurs premiers de  $n$ , comp-tés sans multiplicité ; par ailleurs, nous posons systématiquement dans tout l'article

$$u := \frac{\log x}{\log y} \quad (x \geq y \geq 2).$$

**Théorème.** *Soit  $c$  une constante positive arbitraire. Sous la condition*

$$(\Omega) \quad P(q) \leq y \leq x, \quad \omega(q) \leq y^{c/\log(1+u)},$$

*on a uniformément*

$$(1.4) \quad \Psi_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left( \frac{\log(1+u) \log(1+\omega(q))}{\log y} \right) \right\}.$$

*Remarques.* (i) L'hypothèse  $P(q) \leq y$  n'implique aucune perte de généralité. En effet, on a identiquement  $\Psi_q(x, y) = \Psi_k(x, y)$ , avec  $k := (q, \prod_{p \leq y} p)$ .

(ii) Dans le cas  $q = \prod_{p \leq z} p$ , nous retrouvons un théorème de Saias ([S], cor.4.3, p.97) concernant une fonction de crible étudiée par Friedlander [F]. La thèse de Saias [S] contient beaucoup d'autres informations très précises sur ce problème. En particulier, l'optimalité du domaine  $(\Omega)$  est établie pour les entiers  $q$  de la forme indiquée : si  $z = x^{o(1)}$ , la condition  $\log(1+u) \log z / \log y \rightarrow 0$  est nécessaire et suffisante pour que  $\Psi_q(x, y) \sim (\varphi(q)/q) \Psi(x, y)$  — [S], th.4.5.

(iii) Notre résultat affine une estimation de Xuan [X], qui a obtenu (1.4) dans un domaine relativement restreint en  $x, y, q$ , et avec un terme d'erreur supplémentaire  $O(e^{-c_0 \sqrt{u}})$ .

(iv) Le terme résiduel de (1.4) est optimal. Cela découle des théorèmes 2 & 3 de [FT], qui fournissent, uniformément pour

$$\exp\{(\log_2 x)^{(5/3)+\varepsilon}\} \leq y \leq x^{1-\varepsilon}, \quad \omega(q) \leq y^{1/(20 \log_2 x)},$$

la formule asymptotique

$$\Psi_q(x, y) = x \frac{\varphi(q)}{q} \left\{ \varrho(u) + c_1(q) \frac{\varrho'(u)}{\log y} + O\left( \frac{q}{\varphi(q)} \varrho(u) \frac{\log^2(1+u) \log^2(\omega(q) + \log y)}{\log^2 y} \right) \right\}$$

où  $\varrho$  désigne la fonction de Dickman et où l'on a posé

$$c_1(q) := \gamma - 1 + \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1}.$$

(Ici et dans toute la suite, nous notons  $\log_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme.) Compte tenu de l'évaluation de Hildebrand [H], valable dans le même domaine,

$$(1.5) \quad \Psi(x, y) = x\varrho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(1+u)}{\log y}\right) \right\},$$

de la formule classique  $\varrho'(u)/\varrho(u) \sim -\log u$  ( $u \rightarrow +\infty$ ), et du fait que la fonction  $c_1(q)$  peut effectivement prendre des valeurs de l'ordre de  $\log(1+\omega(q))$ , on voit que le terme d'erreur de (1.4) ne peut être amélioré dans un très large sous-domaine de  $(\Omega)$ .

(v) Pour les "grandes" valeurs de  $u$ , on peut relâcher quelque peu la contrainte sur  $\omega(q)$ , mais au prix d'une certaine complication du terme principal. En effet, ainsi que l'a montré Granville dans une version préliminaire, non publiée, de [G], la méthode du col (cf. [HT1,HT2]) s'applique presque sans changement pour

$$(1.6) \quad u \geq (\log_2 y)^2, \quad P(q) \leq y, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y$$

et fournit une évaluation du type

$$(1.7) \quad \Psi_q(x, y) = \Psi(x, y) \prod_{p|q} (1 - p^{-\alpha}) \{1 + \text{erreur}\},$$

où  $\alpha = \alpha(x, y)$  est l'unique solution de l'équation

$$(1.8) \quad \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

(En fait Granville énonce une estimation valable pour  $\omega(q) \leq y^{1-\varepsilon}$ , mais cela résulte apparemment d'une inexactitude.) La méthode de Xuan dans [X] fournit aussi une estimation de type (1.7) en supposant seulement, dans (1.6),  $u \gg \log_2 y / \log_3 y$ . Il ne semble pas que la méthode du col, en son état actuel, permette une telle région de validité.

(vi) Compte tenu des évaluations de  $\alpha(x, y)$  données dans [HT1], on peut déduire de (1.7) une nouvelle preuve de l'optimalité du domaine de validité  $(\Omega)$  pour l'estimation (1.4).

L'auteur tient ici à exprimer ses remerciements à Ti Zuo Xuan pour lui avoir signalé ses résultats avant publication.

## 2. Démonstration

Nous pouvons supposer  $x$  assez grand car le résultat est trival dans le cas contraire. Dans toute cette section, nous désignons par  $\alpha = \alpha(x, y)$  la solution de (1.8) et par  $E_q(x, y)$  le terme d'erreur de (1.4). Nous posons pour  $s \in \mathbb{C}$ ,  $y \geq 2$ ,

$$\zeta_q(s, y) := \prod_{\substack{p \leq y \\ p \neq q}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \zeta(s, y) := \zeta_1(s, y).$$

Dans un premier temps, nous examinons le cas  $y \leq (\log x)^2$ . On a alors

$$\log(1 + u) \geq \frac{1}{2} \log_2 x \geq \frac{1}{4} \log y,$$

de sorte que la condition  $(\Omega)$  implique que  $\omega(q)$  est borné. Dans ces circonstances, la relation (1.4) équivaut à

$$\Psi_q(x, y) \ll \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y) \asymp \Psi(x, y),$$

ce qui est trivialement vérifié.

Ensuite, nous traitons le cas

$$(2.1) \quad y > (\log x)^2, \quad u > (\log_2 2y)^2.$$

On a sous cette hypothèse

$$(2.2) \quad \Psi_q(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta_q(s, y) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\Psi(x, y) Y^{-1}\right),$$

avec  $Y := \exp\{(\log_2 2y)^{3/2}\}$ . Cela découle du *Lemma* 10 de [HT1] lorsque  $q = 1$ , mais la même démonstration fournit le cas général, en remarquant que  $\zeta_q(\alpha, y) \leq \zeta(\alpha, y)$  et en utilisant la majoration triviale

$$\Psi_q(x + z, y) - \Psi_q(x - z, y) \leq \Psi(x + z, y) - \Psi(x - z, y) \quad (z \geq 0).$$

A ce stade, nous observons que, pour  $s = \alpha + i\tau$ ,  $|\tau| \leq 1/\log y$ , on a

$$(2.3) \quad \prod_{p|q} (1 - p^{-s}) = \frac{\varphi(q)}{q} \exp \left\{ O \left( \sum_{p|q} \frac{|1 - p^{-i\tau}|}{p} + \frac{p^{1-\alpha} - 1}{p} \right) \right\},$$

puisque la formule (7.8) de [HT1] pour  $\alpha$  fournit, sous la première hypothèse (2.1) et pour  $x$  assez grand,

$$(2.4) \quad 0 \leq 1 - \alpha \leq \frac{3 \log(1 + u)}{2 \log y} \leq \frac{3}{4}.$$

Associé à la majoration élémentaire

$$\frac{p^{1-\alpha} - 1}{p} \leq A \frac{p_1^{1-\alpha} - 1}{p_1} \quad (2 \leq p_1 \leq p, 0 \leq \alpha \leq 1),$$

où  $A$  est une constante absolue, l'encadrement (2.4) nous permet d'inférer que, notant  $p_\omega$  le  $\omega(q)$ -ième nombre premier, la somme sous l'exponentielle dans (2.3) est

$$\ll \sum_{p \leq p_\omega} \frac{|\tau| \log p}{p} + \frac{p^{1-\alpha} - 1}{p} \ll E_q(x, y).$$

Il suit

$$\prod_{p|q} (1 - p^{-s}) = \frac{\varphi(q)}{q} \left( 1 + O(E_q(x, y)) \right).$$

Reportant cela dans (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi_q(x, y) &= \frac{\varphi(q)}{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y} \zeta(s, y) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\Psi(x, y) Y^{-1}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{\varphi(q)}{q} E_q(x, y) \int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y} \left| \zeta(s, y) \frac{x^s}{s} \right| |ds|\right). \end{aligned}$$

En appliquant (2.2) avec  $q = 1$ , on voit que le terme principal de cette expression vaut

$$\frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y) \left\{ 1 + O(Y^{-1}) \right\}.$$

De plus, le *Lemma* 11 de [HT1] énonce que l'intégrale du second terme d'erreur est  $\ll \Psi(x, y)$ . Puisqu'enfin

$$Y^{-1} \ll \frac{\varphi(q)}{q} E_q(x, y)$$

sous la condition  $(\Omega)$ , nous obtenons bien (1.4).

Il reste à traiter le cas

$$(2.5) \quad 1 \leq u \leq (\log_2 2y)^2.$$

En fait la méthode que nous allons employer fonctionne dans le domaine plus vaste  $u \leq (\log y)^{1-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . La démonstration repose sur un résultat auxiliaire relevant de la théorie du crible.

**Lemme.** *Soit  $K$  une constante positive arbitraire. On a uniformément pour  $q \geq 1$ ,  $x \geq 1 + \omega(q)$ ,  $\delta := 1/\log(3 + \omega(q))$ ,*

$$N_q(x) := \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} 1 = \frac{\varphi(q)}{q} x \left\{ 1 + O(x^{-K\delta} + e^{-\sqrt{\log x}}) \right\}.$$

*Démonstration.* La première étape consiste à remarquer que nous pouvons supposer  $x > (1 + \omega(q))^{\exp(40K)}$ , car le résultat découle, dans le cas contraire, de la majoration classique

$$N_q(x) \ll x \prod_{\substack{p|q \\ p \leq 1 + \omega(q)}} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \ll x \frac{\varphi(q)}{q} \left( 1 - \frac{1}{1 + \omega(q)} \right)^{-\omega(q)} \ll x \frac{\varphi(q)}{q}.$$

Ensuite, nous appliquons le Lemme Fondamental du crible, sous la forme donnée dans [DH]. Notant  $q_z$  le plus grand diviseur de  $q$  tel que  $P(q_z) \leq z$ , nous avons uniformément en  $z \geq 1$ ,  $v \geq 1$ ,

$$N_{q_z}(x) = x \frac{\varphi(q_z)}{q_z} \left\{ 1 + O(v^{-v/2}) \right\} + O(z^v).$$

Choisissons  $z := (\omega(q) + \exp\{\sqrt{\log x}\})^3$ ,  $v := (\log x)/(2 \log z)$ , de sorte que, si  $K$  et  $x$  sont assez grands, on a  $\log v \geq 8K$ . On peut alors écrire

$$N_{q_z}(x) = x \frac{\varphi(q)}{q} \left\{ 1 + O\left( \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^{-\omega(q)} - 1 \right) \right\} \left\{ 1 + O(e^{-4Kv}) \right\} + O(\sqrt{x}).$$

Le premier terme d'erreur est estimé par

$$\ll \exp \left\{ O(\omega(q)/z) \right\} - 1 \ll \exp\{-\sqrt{\log x}\},$$

et le second par

$$\ll \exp \left\{ \frac{-2K \log x}{\log(1 + \omega(q)) + \sqrt{\log x}} \right\} \ll x^{-K\delta} + \exp\{-\sqrt{\log x}\}.$$

Nous avons donc établi que l'on a, sous les conditions de l'énoncé,

$$N_{q_z}(x) = \frac{\varphi(q)}{q} x \left\{ 1 + O(x^{-K\delta} + e^{-\sqrt{\log x}}) \right\},$$

et il reste seulement à montrer que la différence  $N_{q_z}(x) - N_q(x)$  est englobée par le terme d'erreur.

On a en effet

$$\begin{aligned} 0 \leq N_{q_z}(x) - N_q(x) &= \sum_{\substack{d|q/q_z \\ d>1}} \mu(d) N_{q_z}\left(\frac{x}{d}\right) \\ &\ll \sum_{\substack{d|q/q_z \\ d>1}} \mu(d)^2 \frac{x}{d} \ll x \left\{ \prod_{p|q/q_z} \left(1 + \frac{1}{p}\right) - 1 \right\} \\ &\ll x \left\{ \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\omega(q)} - 1 \right\} \ll x e^{-2\sqrt{\log x}} \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q} x e^{-\sqrt{\log x}}. \end{aligned}$$

Cela complète la preuve du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de notre théorème. Nous appliquons d'abord les formules (5.4) et (5.5) de [FT], valables pour

$$u \leq L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Nous obtenons

$$(2.6) \quad \Psi_q(x, y) = \Lambda_q(x, y) + O\left(\Psi(x, y) L_{\varepsilon/2}(y)^{-1} \prod_{p \leq p_\omega} (1 + p^{\beta-1})\right),$$

avec

$$\Lambda_q(x, y) := \begin{cases} x \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(u-v) dR_q(y^v) & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+) \\ \Lambda_q(x+0, y) & (x \in \mathbb{Z}^+), \end{cases}$$

$$0 < \beta \ll \frac{\log(1+u)}{\log y},$$

où  $R_q(t)$  est défini par l'identité  $N_q(t) = t\{\frac{\varphi(q)}{q} + R_q(t)\}$ . Sous la condition  $(\Omega)$ , le produit en  $p$  dans (2.6) n'excède pas

$$\exp \left\{ \sum_{p \leq p_\omega} p^{\beta-1} \right\} \ll \exp \left\{ \log_2 p_\omega + O\left(\frac{p_\omega^\beta - 1}{\beta \log p_\omega}\right) \right\} \ll \delta^{-1}.$$

Il suit

$$(2.7) \quad \Psi_q(x, y) = \Lambda_q(x, y) + O\left(\Psi(x, y)L_\varepsilon(y)^{-1}\right).$$

Ensuite, nous évaluons  $\Lambda_q(x, y)$ . A cette fin, nous appliquons la formule (4.22) de [FT] avec  $k = 0$  et  $q_0 = q$ . Nous obtenons

$$\Lambda_q(x, y) = x \left\{ \frac{\varphi(q)}{q} \varrho(u) + S_1 + S_2 \right\},$$

avec

$$S_1 := R_q(x), \quad S_2 := \int_0^\infty \varrho'(u-v) R_q(y^v) dv.$$

Soit  $0 < \varepsilon < 1$ . Nous supposons dorénavant

$$(2.8) \quad u \leq (\log y)^{1-\varepsilon}.$$

D'après le lemme, on a sous les conditions  $(\Omega)$ , (2.8), et pour  $K \geq 3c$ ,  $q \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \frac{\varphi(q)}{q} \left\{ y^{-Ku/\log(3+\omega(q))} + e^{-\sqrt{u \log y}} \right\} \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q} \left\{ \frac{\log(3+\omega(q))}{\log y} u^{-2u} + \frac{\exp(-\frac{1}{2}u^{1+\varepsilon/2})}{\log y} \right\} \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q} E_q(x, y), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la minoration connue  $\varrho(u) \gg u^{-2u}$  ( $u \geq 1$ ) — cf. par exemple [T], th.III.5.8.

L' estimation de  $S_2$  nécessitera la majoration suivante (cf. par exemple [T], corollaires III.5.8.1 & 8.2), relative à la fonction de Dickman, et dans laquelle  $\xi(u)$  est défini pour  $u > 1$  comme l'unique solution positive de l'équation  $e^\xi = 1 + u\xi$ , avec la convention  $\xi(1) = 0$ ,

$$(2.9) \quad \varrho(u - v) \ll \varrho(u)e^{v\xi(u)} \quad (0 \leq v \leq u).$$

Il est à noter que

$$(2.10) \quad \xi(u) \sim \log u \quad (u \rightarrow +\infty).$$

Nous décomposons  $S_2$  sous la forme  $S_2 = S_{21} + S_{22}$ , où  $S_{21}$  correspond au domaine d'intégration  $0 \leq v \leq v_0 := 1/(\delta \log y)$ .

En utilisant l'estimation

$$\varrho'(u - v) \ll \varrho(u - v) \log(1 + u) \ll \varrho(u) \log(1 + u)e^{v\xi(u)} \quad (0 \leq v \leq u),$$

qui découle de (2.9), et en remarquant que la condition  $(\Omega)$  implique  $v_0\xi(u) \ll 1$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_{21} &\ll \varrho(u) \log(1 + u) \int_0^{v_0} \left\{ \frac{N_q(y^v)}{y^v} + \frac{\varphi(q)}{q} \right\} dv \\ &\ll \varrho(u) \log(1 + u) \left\{ \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n \leq y^{v_0} \\ (n, q) = 1}} \frac{1}{n} + v_0 \frac{\varphi(q)}{q} \right\}. \end{aligned}$$

La somme en  $n$  est

$$\begin{aligned} &\ll \prod_{\substack{p \leq y^{v_0} \\ p \nmid q}} (1 + p^{-1}) \ll v_0 \log y \prod_{\substack{p \leq y^{v_0} \\ p \mid q}} (1 - p^{-1}) \\ &\ll v_0 \log y \frac{\varphi(q)}{q} (1 - y^{-v_0})^{-\omega(q)} \ll v_0 \log y \frac{\varphi(q)}{q}. \end{aligned}$$

Il suit

$$(2.11) \quad S_{21} \ll \frac{\varphi(q)}{q} \varrho(u) E_q(x, y),$$

ce qui est acceptable compte tenu de (1.5).

Pour majorer  $S_{22}$ , nous faisons de nouveau appel à notre lemme. Grâce à (2.10), il est clair que nous pouvons choisir la constante  $K$  suffisamment grande pour que  $e^{\xi(u)} \leq y^{K\delta/2}$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S_{22} &\ll \frac{\varphi(q)}{q} \varrho(u) \log(1+u) \int_0^u \left\{ y^{-Kv} + e^{-\sqrt{v \log y}} \right\} dv \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q} \varrho(u) \log(1+u) \left\{ \frac{1}{\delta \log y} + \int_0^u e^{v\xi(u) - \sqrt{v \log y}} dv \right\}. \end{aligned}$$

Dans le domaine (2.8) on a, pour  $x$ , et donc  $y$ , assez grand,

$$v\xi(u)^2 \leq \frac{1}{4} \log y \quad (0 \leq v \leq u)$$

et l'on peut estimer la dernière intégrale par

$$\ll \int_0^u e^{-\frac{1}{2}\sqrt{v \log y}} dv \ll 1/\log y.$$

Ainsi la majoration (2.11) est également valable pour  $S_{22}$  et on obtient finalement

$$(2.12) \quad \Lambda_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y) \left\{ 1 + O(E_q(x, y)) \right\}.$$

En reportant cette estimation dans (2.7) et en remarquant que l'on a, sous l'hypothèse (2.8) — et donc *a fortiori* sous (2.5) —,

$$L_\varepsilon(y)^{-1} \ll \frac{\varphi(q)}{q} E_q(x, y),$$

nous obtenons la conclusion attendue.

*Remarque finale.* Nous déduisons en fait de (2.7) et (2.12) la validité de la formule

$$(2.13) \quad \Psi_q(x, y) = \Lambda_q(x, y) \left\{ 1 + O(L_\varepsilon(y)^{-1}) \right\}$$

uniformément dans l'intersection des domaines  $(\Omega)$  et

$$(2.14) \quad x \geq 3, \quad \exp \left\{ (\log x)^{(1/2)+\varepsilon} \right\} \leq y \leq x.$$

Cela constitue un renforcement partiel du théorème 2 de [FT].

## Bibliographie

- [BP] A. Balog & C. Pomerance, The distribution of smooth integers in arithmetic progressions, prépublication.
- [DH] H.G. Diamond & H. Halberstam, The combinatorial sieve, in : *Number Theory*, Proc. 4th Matsci. Conf. Ootacamund/India 1984, *Lect. Notes Math.* **1122** (1985), 63–73.
- [F] J.B. Friedlander, Integers free from large and small primes, *Proc. London Math. Soc.* (3) **33** (1976), 565–576.
- [FT] G. Tenenbaum & E. Fouvry, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
- [G] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions, prépublication.
- [H] A. Hildebrand, On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ , *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
- [HT1] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
- [HT2] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *Sém. Bordeaux*, à paraître.
- [S] E. Saias, *Applications de la méthode du col à certains problèmes de crible*, Thèse, Université de Nancy 1 (1990).
- [T] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Revue de l'Institut Elie Cartan **13**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1990).
- [X] T.Z. Xuan, Integers with no large prime factors, prépublication.

Département de Mathématiques  
Université de Nancy I  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex  
France