

Une propriété de concentration relative à la fonction d’Euler

F. Marie-Jeanne & G. Tenenbaum

1. Introduction

L’étude de la concentration des fonctions additives est un outil important de la théorie probabiliste des nombres et constitue souvent une première étape cruciale pour la détermination d’une répartition limite ou celle des lois locales. Elle est également utile dans le cadre plus général des fonctions additives normalisées, où les estimations de concentration permettent d’obtenir des critères d’existence, voire une description, de la répartition limite. Améliorant un théorème de Halász [7], Ruzsa [13] a obtenu en 1980 un résultat qui étend aux fonctions additives l’inégalité probabiliste de Kolmogorov–Rogozin (voir, par exemple, [12]) relative à la concentration des sommes de variables aléatoires indépendantes. L’inégalité de Ruzsa peut s’énoncer sous la forme

$$Q(x; f) := \max_{h \in \mathbb{R}} x^{-1} |\{n \leq x : h < f(n) \leq h + 1\}| \ll W(x)^{-1/2},$$

avec

$$W(x) := 1 + \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda^2 + \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \min(1, |f(p) - \lambda \log p|)^2 \right\}.$$

Elle fournit une majoration du bon ordre de grandeur dans de nombreux cas, comme par exemple $f(n) = \Omega(n) := \sum_{p^\nu \parallel n} \nu$, et $f(n) = c \log n$, où $1 \leq c \ll \sqrt{\log_2 x}$. Le résultat de Ruzsa a été récemment étendu par Elliott [3] au cadre de la répartition des valeurs des fonctions additives sur les nombres premiers translats.

Si l’inégalité de Kolmogorov–Rogozin est optimale en toute généralité, il est très facile de construire des exemples de sommes de variables aléatoires indépendantes où elle ne fournit pas une estimation de très bonne qualité. Une discrépance maximale est obtenue pour la somme $X := \sum_{0 \leq j < k} \varepsilon_j 2^j$ où les ε_j sont des variables de Bernoulli indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(\varepsilon_j = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_j = 1) = \frac{1}{2}$. On a dans ce cas $\sup_m \mathbb{P}(X = m) = 1/2^k$, alors que l’inégalité de Kolmogorov–Rogozin ne donne pour cette quantité qu’une majoration $\ll 1/\sqrt{k}$. Des phénomènes semblables sont valables pour les fonctions arithmétiques — cf. en particulier [8], [10], [15], où sont abordées les questions de l’ordre normal et de l’ordre moyen de la fonction de Hooley $\Delta(n) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{d|n, t < \log d \leq t+1} 1$.

Une situation générale dans laquelle on peut s’attendre à ce que les estimations de type Halász–Ruzsa ne soient pas optimales est celle d’une fonction arithmétique additive f telle que $f(p) = g(p-1)$ où la fonction g est elle-même additive et possède une répartition asymptotique gaussienne dont la variance tend vers l’infini tout en restant à croissance modérée. Nous nous proposons ici de traiter le cas exemplaire de la fonction

$$E(n) = \Omega(\varphi(n))$$

où φ désigne la fonction indicatrice d’Euler. Nos résultats pourraient facilement être étendus aux hypothèses plus générales indiquées ci-dessus.

Balazard et Smati conjecturent dans [1] que l'on a

$$(1.1) \quad Q(x; E) \asymp 1/(\log_2 x)^{3/2} \quad (x \rightarrow \infty),^{(1)}$$

et plus précisément que

$$(1.2) \quad Q(x; E) \sim \sqrt{3/2\pi}/(\log_2 x)^{3/2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Ces conjectures reposent essentiellement sur la nature gaussienne de la répartition globale des valeurs de $E(n)$. On a uniformément pour $x \geq 3$, $z \in \mathbb{R}$,

$$(1.3) \quad \frac{1}{x} \left| \left\{ n \leq x : E(n) \leq \frac{1}{2}y^2 + (z/\sqrt{3})y^{3/2} \right\} \right| = \Phi(z) + O(1/\sqrt{y}),$$

avec $y := \log_2 x$ et $\Phi(z) := \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt/\sqrt{2\pi}$. La formule asymptotique contenue dans (1.3), due à Erdős & Pomerance [5], est obtenue par des méthodes classiques de théorie probabiliste des nombres : le théorème de Bombieri–Vinogradov permet facilement d'estimer la valeur moyenne et la variance de $E(n)$, et l'on conclut par le théorème de Kubilius–Shapiro (cf. [2], *Theorem 12.2*) qui joue le rôle du théorème probabiliste de Feller–Lindeberg.⁽²⁾ L'estimation du terme d'erreur figurant dans (1.3) est due à Balazard et Smati [1]. Les évaluations (1.1) et (1.2) découlent immédiatement de (1.3) sous l'hypothèse que ce terme d'erreur est suffisamment régulier. À fins de référence ultérieure, nous remarquons dès à présent que, notant toujours $y := \log_2 x$, la relation (1.3) implique, pour tout $\xi \ll y^{1/3}$,

$$\frac{1}{x} \sum_{|k - \frac{1}{2}y^2| \leq \xi y} \sum_{\substack{n \leq x \\ E(n)=k}} 1 = \{2\xi + O(1)\} \sqrt{\frac{3}{2\pi y}}$$

d'où

$$(1.4) \quad Q(x; E) \geq \frac{\sqrt{3/2\pi} + o(1)}{(\log_2 x)^{3/2}} \quad (x \rightarrow \infty),$$

ce qui est bien en accord avec (1.2). Nous établissons (1.1).

Théorème 1. *On a $Q(x; E) \asymp 1/(\log_2 x)^{3/2}$ ($x \geq 3$).*

La fonction $E(n)$ peut au prime abord apparaître quelque peu artificielle et le lecteur peu familier avec ce type de problèmes est en droit de s'interroger sur la valeur spécifique de l'information contenue dans un tel résultat. L'intérêt arithmétique réside en fait dans les renseignements fournis concernant les nombres premiers. Nombreuses sont en effet les conjectures qui souscrivent à l'idée générale

1. Ici et dans la suite désignons par \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme.

2. Il est à noter que Ram Murty et Saradha ont fourni dans [11] une preuve du théorème d'Erdős–Pomerance indépendante du théorème de Bombieri–Vinogradov et reposant essentiellement sur le crible d'Ératosthène.

que, mises à part leurs évidentes contraintes de congruences, les nombres premiers se comportent de manière stochastique. La conjecture de Goldbach en est un exemple célèbre. Une autre propriété, apparemment plus anodine, résiste depuis longtemps aux efforts des arithméticiens : peut-on montrer que $\Omega(p-1)$ est aussi souvent pair qu'impair ? On ignore même si $\Omega(p-1)$ est infiniment souvent pair (ou impair) et une réponse à cette question constituerait une brèche dans ce que les spécialistes du crible appellent le *phénomène de parité*. Dans ce contexte, on peut voir le Théorème 1 comme une approche *en moyenne* de ce problème : la fonction $E(n)$ est arithmétiquement très semblable à la fonction additive $\sum_{p|n} \Omega(p-1)$ (pour laquelle les techniques du présent travail s'appliquent d'ailleurs sans changement) et une évaluation de l'ordre de grandeur exact de la concentration permet de montrer qu'en un certain sens aucune valeur n'est prise avec une fréquence prépondérante. On peut d'ailleurs déduire rigoureusement du Théorème 1 que, pour tout entier q fixé assez grand et tout a ($1 \leq a \leq q$), on a $E(n) \not\equiv a \pmod{q}$ pour une suite d'entiers n de densité positive.

Notre preuve du Théorème 1 est fondée sur une approche analytique dont nous dégageons les deux arguments-clefs sous forme de propositions formelles. Nous utilisons, ici et dans la suite, les notations traditionnelles

$$e(u) = e^{2\pi i u}, \quad \|u\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |u - n| \quad (u \in \mathbb{R}).$$

De plus, nous réservons la lettre p pour désigner génériquement un nombre premier.

Proposition 1. *Posons $Z(x; \vartheta, \tau) := \sum_{p \leq x} \{1 - \cos(2\pi\vartheta\Omega(p-1) - \tau \log p)\}/p$. On a uniformément pour $T \geq 1$, $x \geq 3$,*

$$Q(x; E) \ll \frac{1}{\sqrt{T}} + \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\min_{|\tau| \leq T} Z(x; \vartheta, \tau)/2} d\vartheta.$$

Démonstration. On a pour un entier convenable k

$$Q(x; E) = x^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n \leq x} e(\vartheta E(n)) e(-k\vartheta) d\vartheta.$$

Le résultat annoncé découle donc de la majoration générale de Halász–Montgomery (cf. par exemple [16], Corollaire III.4.6.3) appliquée à la fonction multiplicative $n \mapsto e(\vartheta E(n))$, soit

$$\sum_{n \leq x} e(\vartheta E(n)) \ll \frac{x}{\sqrt{T}} + x e^{-\min_{|\tau| \leq T} Z(x; \vartheta, \tau)/2} \quad (T \geq 1, x \geq 3, \vartheta \in \mathbb{R}).$$

Proposition 2. *Posons $\|\vartheta\|_m := \min_{1 \leq \ell \leq m} \|\vartheta \ell\|$. Pour une constante absolue convenable L et tout $\varrho \in]0, 1[$, il existe $\delta = \delta(\varrho) > 0$ tel que l'on ait*

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \delta \min(1, \|\vartheta\|_L^2 (\log_2 x)^2) \log_2 x + O(1)$$

uniformément pour $x \geq 3$, $|\tau| \leq (\log x)^\ell$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Remarque. La constante L est celle qui apparaît au Lemme 0 *infra*, dû à Hildebrand [9]. Pour des commentaires concernant les valeurs numériques, voir la remarque faisant suite à cet énoncé.

Nous établissons la Proposition 2 à la section suivante. Voyons ici comment elle implique le Théorème. En appliquant la Proposition 1 avec $T := (\log_2 x)^3$, on obtient

$$Q(x; E) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^{3/2}} + \sum_{\ell \leq L} \int_{-1/2}^{1/2} (\log x)^{-\delta \min(1, \|\vartheta \ell\|^2 (\log_2 x)^2)} d\vartheta.$$

L'intégrale en ϑ est indépendante de ℓ et vaut

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (\log x)^{-\delta \min(1, \vartheta^2 (\log_2 x)^2)} d\vartheta &\leq \int_{-1/\log_2 x}^{1/\log_2 x} e^{-\delta \vartheta^2 (\log_2 x)^3} d\vartheta + 1/(\log x)^\delta \\ &\ll 1/(\log_2 x)^{3/2}. \end{aligned}$$

Cela fournit bien l'estimation souhaitée pour $Q(x; E)$.

Au prix de certaines difficultés techniques, la méthode du présent travail peut être adaptée pour traiter le cas de la fonction non additive $E^*(n) := \omega(\varphi(n))$.

Théorème 2. *On a pour $x \geq 3$*

$$(1.5) \quad Q(x; E^*) \asymp \frac{1}{(\log_2 x)^{3/2}}.$$

Ce résultat avait également été conjecturé par Balazard & Smati dans [1]. L'idée essentielle consiste ici à décomposer canoniquement un entier n sous la forme $n = ab$ avec $p|\varphi(b) \Rightarrow p \notin]r^{1/8}, r]$, où $r := (\log_2 x)^4$. L'ensemble des entiers b résulte donc d'un crible sur un ensemble de nombres premiers de densité strictement comprise entre 0 et 1. Ensuite, on considère la décomposition

$$E^*(n) = E^*(n, r) + E_r^*(n)$$

où $E^*(n, r) = \sum_{p|\varphi(n), p \leq r} 1$. L'étude des propriétés de divisibilité de $\varphi(n)$ montre alors que, quitte à négliger un nombre acceptable d'exceptions, on a :

- (i) $E^*(n, r)$ ne dépend que de a ;
- (ii) $E_r^*(n) = E_r(n) = E_r(a) + E_r(b)$ avec $E_r(n) := \sum_{p^\nu || \varphi(n), p > r} \nu$.

Comme la fonction E_r est additive, la technique de démonstration du Théorème 1 s'applique pour majorer, à a fixé, la concentration de E_r sur les entiers $b \leq x/a$. Le gain est encore, en moyenne, d'un facteur $(\log_2 x)^{-3/2}$. On conclut en re-sommant sur a .

Nous présentons les lemmes nécessaires à la preuve du Théorème 2 à la section 3 et complétons la démonstration à la section 4.

La technique est très flexible et est susceptible de multiples généralisations, en particulier aux fonctions dénombrant les facteurs premiers de $\varphi(n)$ ou de fonctions analogues dans des sous-ensembles de nombres premiers assez réguliers. Nous ne développerons pas ici ces applications.

Les auteurs tiennent à exprimer ici leurs remerciements à Michel Balazard et Hakim Smati pour leurs utiles remarques sur des versions préliminaires de ce travail.

2. Preuve de la Proposition 2

L'évaluation de $Z(x; \vartheta, \tau)$ pour les grandes valeurs de $|\tau| + \|\vartheta\|_L \sqrt{\log_2 x}$ repose sur le résultat suivant, dû à Hildebrand [9].

Lemme 0 (Hildebrand). *Il existe deux constantes absolues δ_1 et L telles que l'on ait*

$$\left| \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} f(p-1) \right| \leq 1 - \delta_1$$

uniformément pour $x \geq 2$ et f multiplicative satisfaisant à $|f(n)| = 1$ ($n \leq x$) et

$$\max_{1 \leq \ell \leq L} \left| \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)^\ell \right| \leq \delta_1.$$

Remarques. (i) Hildebrand n'indique pas de valeur numérique mais précise que sa démonstration est susceptible de fournir une majoration de l'ordre de 10^3 . La valeur conjecturée est $L = 1$, un résultat profond et sans doute difficile, au vu de l'application à la fonction de Liouville $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ qui impliquerait que les ensembles

$$\{p : \Omega(p-1) \equiv j \pmod{2}\} \quad (j = 1, 2)$$

sont de densité relative positive. Il est très vraisemblable que la méthode de Elliott dans [4] permette d'améliorer notablement la borne supérieure de L , sinon dans le Lemme 0, du moins dans la Proposition 2.

(ii) Hildebrand énonce son résultat pour des nombres premiers translatés de la forme $p+1$ et non $p-1$. Sa démonstration est en fait valable pour toute translation $p+h$ où h est un entier non nul arbitraire et fixé.

Lemme 1. *Soit $\varrho \in]0, 1[$. Il existe une constante positive K_0 , dépendant au plus de ϱ , telle que l'on ait*

$$(2.1) \quad Z(x; \vartheta, \tau) \geq (1 - \varrho)\delta_1 \log_2 x + O(1)$$

sous la condition

$$(2.2) \quad x \geq 3, \quad K_0 < |\tau| + \|\vartheta\|_L \sqrt{\log_2 x} \leq (\log x)^e.$$

Démonstration. Nous pouvons manifestement supposer $x \geq x_0(\varrho)$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe une constante absolue c_1 telle que l'on ait

$$(2.3) \quad \left| \sum_{p \leq v} \frac{e^{2\pi i \vartheta \Omega(p-1)}}{(p-1)^{i\tau}} \right| \leq (1 - \delta_1) \pi(v) \quad (e^{c_1(\log x)^\varrho} < v \leq x),$$

lorsque τ et ϑ satisfont (2.2). Le Lemme 0 permet de réduire la preuve de cette majoration à celle des inégalités

$$(2.4) \quad S_\ell(v) := \left| \sum_{n \leq v} e^{2\pi i \vartheta \ell \Omega(n)} n^{-i\tau \ell} \right| \leq \delta_1 v \quad (1 \leq \ell \leq L, e^{c_1(\log x)^\varrho} < v \leq x).$$

Nous obtiendrons (2.4) grâce au résultat classique de Selberg [14]

$$\sum_{n \leq u} z^{\Omega(n)} = u(\log u)^{z-1} (G(z) + O_{z_0}(1/\log u)) \quad (u \geq 2, |z| \leq z_0 < 2),$$

où $G(z) := \Gamma(z)^{-1} \prod_{p \geq 2} (1 - z/p)^{-1} (1 - 1/p)^z$. Posant $c_0 := \sup_{|z|=1} |G(z)|$, on en déduit en effet que

$$\begin{aligned} S_\ell(v) &= \left| G(e(\ell\vartheta)) \int_2^v u^{-i\ell\tau} (\log u)^{e(\ell\vartheta)-1} du + \int_2^v u^{-i\ell\tau} dO\left(\frac{u}{\log u}\right) \right| \\ &\leq c_0 \left| \int_2^v u^{-i\ell\tau} (\log u)^{e(\ell\vartheta)-1} du \right| + c_2 L(1 + |\tau|) \frac{v}{\log v} \quad (1 \leq \ell \leq L), \end{aligned}$$

où c_2 est absolue. Sous l'hypothèse (2.2), il suit pour x assez grand

$$\begin{aligned} S_\ell(v) &\leq c_0 \left| \left[\frac{(\log u)^{e(\ell\vartheta)-1} u^{1-i\ell\tau}}{1 - i\ell\tau} \right]_2^v \right| + c_3 \int_2^v \frac{du}{\log u} + \frac{2Lc_2}{c_1} v \\ &\leq c_0 \frac{v}{\sqrt{1 + \tau^2}} (\log v)^{\cos(2\pi\ell\vartheta)-1} + 2c_3 \frac{v}{\log v} + \frac{2Lc_2}{c_1} v, \end{aligned}$$

où c_3 est absolue. En choisissant $c_1 > 5Lc_2/\delta_1$, on obtient pour x , et donc v , assez grand

$$(2.5) \quad S_\ell(v) \leq c_0 \frac{v}{\sqrt{1 + \tau^2}} (\log v)^{\cos(2\pi\ell\vartheta)-1} + \frac{1}{2} \delta_1 v.$$

Soient $K_0^* := \sqrt{\log(2c_0/\delta_1)}$, $K_1 = K_0^*/\sqrt{\varrho}$. Lorsque $\|\vartheta\|_L > K_1/\sqrt{\log_2 x}$, on peut écrire

$$1 - \cos(2\pi\ell\vartheta) \geq 8\|\ell\vartheta\|^2 \geq 8\|\vartheta\|_L^2 > 8K_0^{*2}/\log_2 v,$$

d'où en reportant dans (2.5)

$$S_\ell(v) \leq c_0 v \exp\{-8K_0^{*2}\} + \frac{1}{2} \delta_1 v < \delta_1 v.$$

Cela montre que (2.4) est satisfaite dès que $\|\vartheta\|_L \sqrt{\log_2 x} > K_1$.

Posons maintenant $c_4 := 2c_0/\delta_1$. On déduit encore de (2.5) que l'on a pour $|\tau| \geq c_4$

$$S_\ell(v) \leq c_0 \frac{v}{|\tau|} + \frac{1}{2}\delta_1 v \leq \delta_1 v.$$

Nous avons ainsi établi la majoration (2.3) dans l'hypothèse que l'une des deux inégalités $\|\vartheta\|_L \sqrt{\log_2 x} > K_1$ ou $|\tau| \geq c_4$ est satisfaite. Une condition suffisante est donc (2.2) avec $K_0 := K_1 + c_4$.

L'estimation (2.1) est une conséquence facile de ce qui précède. En effet, posant $y := \exp\{c_1(\log x)^\varrho\}$, on a

$$\begin{aligned} Z(x; \vartheta, \tau) &\geq \sum_{y < p \leq x} \frac{1 - \cos(2\pi\vartheta\Omega(p-1) - \tau \log p)}{p} \\ &= \sum_{y < p \leq x} \frac{1 - \cos(2\pi\vartheta\Omega(p-1) - \tau \log(p-1))}{p} + O\left(\sum_{y < p \leq x} \frac{|\tau|}{p^2}\right) \\ &\geq \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right) - \int_y^x \left| \sum_{p \leq v} \frac{e^{2\pi i\vartheta\Omega(p-1)}}{(p-1)^{i\tau}} \right| \frac{dv}{v^2} + O(1) \\ &\geq (1 - \varrho)\delta_1 \log_2 x + O(1). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du Lemme 1.

Nous établissons maintenant une minoration de $Z(x; \vartheta, \tau)$ valable pour les petites valeurs de $\|\vartheta\| \sqrt{\log_2 x}$.

Lemme 2. *Il existe une constante K_2 telle que l'on ait*

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \frac{1}{2} \min(1, 2\vartheta^2(\log_2 x)^2) \log_2 x + O_C(1)$$

pour toute constante C et uniformément pour $x \geq 3$, $|\vartheta| \leq K_2/\sqrt{\log_2 x}$, $|\tau| \leq C$.

Démonstration. Nous pouvons supposer $|\vartheta| \leq \frac{1}{2}$. Le principe de cette démonstration consiste à approcher $\Omega(p-1)$ par $\log_2 p$. On pose $Z = Z(x; \vartheta, \tau)$ et

$$Z_0 = Z_0(x; \vartheta, \tau) := \sum_{p \leq x} \frac{1 - \cos(2\pi\vartheta \log_2 p - \tau \log p)}{p}.$$

On a

$$|Z - Z_0| \leq \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \left| e^{2\pi i\vartheta(\Omega(p-1) - \log_2 p)} - 1 \right| \leq 2\pi|\vartheta| \sum_{p \leq x} \frac{|\Omega(p-1) - \log_2 p|}{p},$$

d'après l'inégalité $|e^{iu} - 1| \leq |u|$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suit

$$\begin{aligned} |Z - Z_0| &\leq 2\pi|\vartheta| \left\{ \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sum_{p \leq x} \frac{(\Omega(p-1) - \log_2 p)^2}{p} \right\}^{1/2} \\ &\ll |\vartheta| (\log_2 x)^{1/2} \{M_2 - 2M_1 + M_0\}^{1/2}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $M_j := \sum_{p \leq x} \Omega(p-1)^j (\log_2 p)^{2-j} / p$ ($j = 0, 1, 2$).

D'après [5] (*Lemma 2.1*) et [6] (*Lemma 2.2, §6*), on a

$$\sum_{p \leq x} \Omega(p-1)^j = \frac{x}{\log x} \{ (\log_2 x)^j + O((\log_2 x)^{j-1}) \} \quad (j = 1, 2).$$

Le théorème des nombres premiers garantit que la même estimation est valable avec un terme d'erreur $O(1/\log x)$ pour $j = 0$. On en déduit par sommation d'Abel

$$M_0 = \frac{1}{3}(\log_2 x)^3 + O(1), \quad M_j = \frac{1}{3}(\log_2 x)^3 + O((\log_2 x)^2) \quad (j = 1, 2).$$

On a donc

$$(2.6) \quad \sum_{p \leq x} (\Omega(p-1) - \log_2 p)^2 / p = M_2 - 2M_1 + M_0 \ll (\log_2 x)^2,$$

et l'on en déduit l'existence d'une constante absolue $K_3 > 0$ telle que

$$(2.7) \quad |Z - Z_0| \leq K_3 |\vartheta| (\log_2 x)^{3/2}.$$

Il reste à minorer Z_0 . On a d'après le théorème des nombres premiers

$$(2.8) \quad Z_0 = \log_2 x - \Re e I(x) + O_C(1),$$

avec $I(x) := \int_2^x \frac{(\log u)^{2\pi i \vartheta - 1}}{u^{1+i\tau}} du$. Posons $w = w(x, \tau) = \min(\log x, 2\pi/|\tau|)$. En insérant l'estimation $u^{-i\tau} = 1 + O(|\tau| \log u)$ pour $2 \leq u \leq e^w$ et en effectuant le changement de variables $v = |\tau| \log u$ pour $e^w < u \leq x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_2^{e^w} (\log u)^{2\pi i \vartheta - 1} \frac{du}{u} + O(|\tau|w) + |\tau|^{-2\pi i \vartheta} \int_{|\tau|w}^{|\tau| \log x} e^{-i \operatorname{sgn}(\tau)v} v^{2\pi i \vartheta - 1} dv \\ &= \frac{w^{2\pi i \vartheta} - 1}{2\pi i \vartheta} + |\tau|^{-2\pi i \vartheta} \int_{\min(2\pi, |\tau| \log x)}^{|\tau| \log x} e^{-i \operatorname{sgn}(\tau)v} v^{2\pi i \vartheta - 1} dv + O(1) \\ &= \frac{w^{2\pi i \vartheta} - 1}{2\pi i \vartheta} + O(1), \end{aligned}$$

où nous avons majoré la dernière intégrale par intégration par parties, soit, pour tout $y > 2\pi$,

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^y e^{\pm i v} v^{2\pi i \vartheta} \frac{dv}{v} &= \int_{2\pi}^y \frac{d}{dv} (e^{\pm i v + 2\pi i \vartheta \log v}) \frac{dv}{2\pi i \vartheta \pm i v} \\ &= \left[\frac{e^{\pm i v + 2\pi i \vartheta \log v}}{2\pi i \vartheta \pm i v} \right]_{2\pi}^y \pm \int_{2\pi}^y \frac{e^{\pm i v + 2\pi i \vartheta \log v}}{(2\pi \vartheta \pm v)^2} dv = O(1). \end{aligned}$$

En reportant dans (2.8), il vient $Z_0 = \log_2 x - \sin(2\pi\vartheta \log w)/(2\pi\vartheta) + O_C(1)$, d'où, en tenant compte de (2.7)

$$(2.9) \quad Z \geq \log_2 x - \frac{\sin(2\pi\vartheta \log w)}{2\pi\vartheta} - K_3|\vartheta|(\log_2 x)^{3/2} + O_C(1).$$

On a $\sin u/u \leq 1 - u^2/\pi^2$ ($|u| \leq \pi$), donc, pour $|\vartheta| \log_2 x \leq \frac{1}{2}$,

$$Z \geq \log_2 x - \log w + 4\vartheta^2(\log w)^3 - K_3|\vartheta|(\log_2 x)^{3/2} + O_C(1).$$

Nous utilisons cette inégalité lorsque $|\vartheta| \log_2 x \leq \frac{1}{3}$, et en y remplaçant le coefficient 4 par 2, de sorte que le membre de droite devient une fonction décroissante de w sur $[3, x]$. Il suit

$$\begin{aligned} Z &\geq 2\vartheta^2(\log_2 x)^3 - K_3|\vartheta|(\log_2 x)^{3/2} + O_C(1) \\ &\geq \vartheta^2(\log_2 x)^3 + O_C(1) \quad (|\vartheta| \log_2 x \leq \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

Cette minoration est bien compatible avec le résultat requis.

Lorsque $|\vartheta| \log_2 x > \frac{1}{3}$, il découle trivialement de (2.9) que

$$Z > \log_2 x - \frac{3}{2\pi} \log_2 x - K_2 K_3 \log_2 x + O_C(1) > \frac{1}{2} \log_2 x + O_C(1),$$

si K_2 est assez petite. Cette inégalité implique bien celle de l'énoncé. Cela achève la démonstration du lemme.

Lemme 3. *Il existe une constante positive δ_2 telle que l'on ait*

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \delta_2 \min(1, \vartheta^2(\log_2 x)^2) \log_2 x + O_C(1)$$

pour toute constante C et uniformément pour $x \geq 3$, $|\vartheta| \leq K_0/\sqrt{\log_2 x}$, $|\tau| \leq C$.

Démonstration. Le cas $|\vartheta| \leq K_2/\sqrt{\log_2 x}$ a déjà été traité au Lemme 2. Nous pouvons donc supposer

$$K_2 < |\vartheta| \sqrt{\log_2 x} \leq K_0.$$

On déduit alors de l'inégalité élémentaire $1 - \cos u \geq (1 - \cos \ell u)/\ell^2$ ($u \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$), que l'on a

$$(2.10) \quad Z(x; \vartheta, \tau) \geq \frac{1}{\ell^2} Z(x; \ell\vartheta, \ell\tau).$$

Choisissons $\ell = \lceil K_0/K_2 \rceil + 1$, de sorte que $K_0 \leq \ell|\vartheta| \sqrt{\log_2 x} \leq \ell K_0$. On a alors $\|\ell\vartheta\|_L > K_0/\sqrt{\log_2 x}$ et $\ell|\tau| \leq 2K_0 C/K_2$. Le Lemme 1 (avec, par exemple, $\varrho = \frac{1}{2}$) permet donc de minorer $Z(x; \ell\vartheta, \ell\tau)$ et l'on obtient par (2.10)

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \frac{\delta_1}{2\ell^2} \log_2 x + O(1).$$

Lemme 4. *Il existe une constante positive δ_3 telle que l'on ait*

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \delta_3 \min(1, \|\vartheta\|_L^2 (\log_2 x)^2) \log_2 x + O(1)$$

pour $x \geq 3$, $|\tau| + \|\vartheta\|_L \sqrt{\log_2 x} \leq K_0$.

Démonstration. La condition $\|\vartheta\|_L \leq K_0/\sqrt{\log_2 x}$ implique l'existence d'entiers a et b , $1 \leq a < b \leq L$, tels que $|\vartheta b - a| \leq K_0/\sqrt{\log_2 x}$. Or on a, grâce à (2.10),

$$Z(x; \vartheta, \tau) \geq \frac{1}{b^2} Z(x; b\vartheta, b\tau) = \frac{1}{b^2} Z(x; b\vartheta - a, b\tau).$$

On peut donc appliquer le Lemme 3 avec $C = LK_0$ pour minorer $Z(x; b\vartheta - a, b\tau)$. On obtient

$$\begin{aligned} Z(x; \vartheta, \tau) &\geq \frac{\delta_2}{b^2} \min(1, (b\vartheta - a)^2 (\log_2 x)^2) \log_2 x + O(1) \\ &\geq \frac{\delta_2}{L^2} \min(1, \|\vartheta\|_L^2 (\log_2 x)^2) \log_2 x + O(1), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Fin de la démonstration de la Proposition 2. Le résultat découle immédiatement de la conjonction des Lemmes 1 et 4.

3. Preuve du Théorème 2 : résultats préliminaires

Soit \mathcal{M} l'ensemble des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité. Étant donné $g \in \mathcal{M}$, $T > 0$ et $N \geq 1$, on pose

$$m_N(x, T) := \min_{|\tau| \leq T} \sum_{p \leq x, p \nmid N} \frac{1 - \Re(g(p)p^{-i\tau})}{p}.$$

Lemme 5. *Soient $\kappa \in]0, 1[$ et N un nombre entier satisfaisant à $P^+(N) \leq x$ et*

$$(3.1) \quad \prod_{p|N, p > u} (1 + 1/p) \ll \left(\frac{\log x}{\log u}\right)^{1-\kappa} \quad (2 \leq u \leq x).$$

Alors on a

$$(3.2) \quad \sum_{n \leq x, (n, N)=1} g(n) \ll x \frac{\varphi(N)}{N} \{e^{-\kappa m_N(x, T)} + T^{-\kappa/2}\}$$

uniformément pour $x \geq 1$, $T \geq 2$, $g \in \mathcal{M}$.

Remarque. Ce résultat étend et précise le *Lemma 12* de Elliott dans [3].

Démonstration. D'après le théorème de Halász–Montgomery (voir par exemple [16], théorème III.4.6), on a

$$(3.3) \quad \sum_{n \leq x, (n, N)=1} g(n) \ll \frac{x}{\log x} \int_{1/\log x}^1 \frac{H_N(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

avec

$$H_N(\alpha)^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + 1} \max_{\substack{\sigma=1+\alpha \\ |\tau-k| \leq 1/2}} |F_N(s)|^2, \quad F_N(s) := \sum_{\substack{n=1 \\ (n, N)=1}}^{\infty} g(n)n^{-s}.$$

On montre facilement — cf. [16], formule (III.4.45) — que

$$F_N(s) \ll \lambda_N(\alpha) \alpha^{-1} e^{-m_N(\exp(1/\alpha), T)} \quad (s = 1 + \alpha + i\tau, |\tau| \leq T).$$

avec

$$\lambda_N(\alpha) = \prod_{p|N, p \leq \exp(1/\alpha)} (1 - 1/p) \ll \frac{\varphi(N)}{N} (\alpha \log x)^{1-\kappa},$$

d'après l'hypothèse (3.1). De plus, il a été établi dans [17] (exercice III.4.6) que l'on a uniformément pour $\alpha \in [1/\log x, 1]$ et $T \geq 1$

$$m_N(\exp(1/\alpha), T) \geq \log(1/\alpha) - \log_2 x + m_N(x, T) + O(1).$$

Nous pouvons donc écrire

$$F_N(s) \ll \frac{\varphi(N)}{N} (\log x)^{2-\kappa} e^{-m_N(x, T)} \alpha^{1-\kappa} \quad (s = 1 + \alpha + i\tau, |\tau| \leq T),$$

d'où

$$(3.4) \quad H_N(\alpha) \ll \frac{\varphi(N)}{N} (\log x)^{2-\kappa} \alpha^{1-\kappa} \left\{ e^{-m_N(x, T)} + T^{-1/2} \right\}.$$

Nous disposons également de la majoration triviale

$$F_N(s) \ll \exp \left\{ \sum_{p \nmid N} p^{-1-\alpha} \right\} \ll \lambda_N(\alpha) \alpha^{-1} \ll \frac{\varphi(N)}{N} (\log x)^{1-\kappa} \alpha^{-\kappa},$$

qui implique

$$(3.5) \quad H_N(\alpha) \ll \frac{\varphi(N)}{N} (\log x)^{1-\kappa} \alpha^{-\kappa}.$$

Posons $\alpha_0 := (\log x)^{-1} \{ e^{-m_N(x, T)} + T^{-1/2} \}^{-1}$. En majorant, dans (3.3), $H_N(\alpha)$ par (3.4) lorsque $1/\log x \leq \alpha \leq \alpha_0$ et par (3.5) lorsque $\alpha_0 < \alpha \leq 1$, nous obtenons bien l'estimation annoncée (3.2).

Lemme 6. Pour $x \geq 3$, on pose $z := \log_2 x$, $D := \prod_{\sqrt{z} < p \leq z^4} p$ et

$$\mathcal{P}(D, x) := \{p \leq x : (D, p(p-1)) > 1\}, \quad N := \prod_{p \in \mathcal{P}(D, x)} p.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $x_0(\varepsilon) \geq 3$ telle que l'on ait

$$(3.6) \quad \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{6/7} \ll \prod_{u < p \leq t, p|N} (1 + 1/p) \ll \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{8/9}$$

uniformément sous les conditions

$$(3.7) \quad x \geq x_0(\varepsilon), \quad t \geq \exp\{(\log x)^\varepsilon\}, \quad 2 \leq u \leq t \leq x.$$

Remarque. Soient a_1, a_2, ε des constantes positives arbitraires. Le lecteur vérifiera aisément que cet énoncé reste valide, quitte à changer les valeurs des exposants en d'autres nombres de $]0, 1[$, pour tout $z = z(x) > 2$ et tout entier $D = \prod_{z^{a_1} < p \leq z^{a_2}} p$ tels que $D \leq \exp\{(\log x)^{\varepsilon/2}\}$.

Démonstration. Il suffit d'établir que

$$(3.8) \quad \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{13/15} \ll \prod_{u < p \leq t, p|N} (1 + 1/p) \ll \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{15/17}$$

lorsque l'on a, outre les conditions (3.7), $u > u_1 := \exp\{(\log x)^{\varepsilon/100}\}$. En effet, supposant cela acquis, on peut écrire, pour $2 \leq u \leq u_1 \leq \exp\{(\log t)^{1/100}\}$,

$$\begin{aligned} \prod_{u \leq p \leq t, p|N} (1 + 1/p) &\gg \left(\frac{\log t}{\log u_1}\right)^{13/15} \\ &\gg (\log t)^{(13/15)(99/100)} \gg \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{6/7} \end{aligned}$$

et similairement

$$\begin{aligned} \prod_{u \leq p \leq t, p|N} (1 + 1/p) &\ll \prod_{u \leq p \leq u_1} (1 + 1/p) \left(\frac{\log t}{\log u_1}\right)^{15/17} \\ &\ll \frac{(\log t)^{15/17} (\log u_1)^{2/17}}{\log u} \\ &\ll \frac{(\log t)^{1502/1700}}{\log u} \leq \left(\frac{\log t}{\log u}\right)^{8/9}. \end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que $D \leq e^{2z^4} < u_1^{1/3}$ dès que $x \geq x_0(\varepsilon)$. On peut donc écrire pour $v > u_1$

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 < p \leq v, p \nmid N} 1 &= \sum_{u_1 < p \leq v} \sum_{d|(D, p-1)} \mu(d) = \sum_{d|D} \mu(d) \sum_{\substack{u_1 < p \leq v \\ p \equiv 1 \pmod{d}}} 1 \\ &= \sum_{d|D} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} (\pi(v) - \pi(u_1)) + O\left(\sum_{d \leq v^{1/3}} \varrho(v; d, 1) \right) \\ &= \lambda(D) (\pi(v) - \pi(u_1)) + O\left(\frac{v}{(\log v)^2} \right), \end{aligned}$$

d'après le théorème de Bombieri–Vinogradov, où l'on a posé

$$\varrho(v; d, 1) := \max_{w \leq v} \left| \sum_{\substack{p \leq w \\ p \equiv 1 \pmod{d}}} 1 - \frac{\pi(w)}{\varphi(d)} \right|, \quad \lambda(D) := \prod_{p|D} \left(\frac{p-2}{p-1} \right).$$

Par sommation d'Abel, il suit pour $u_1 \leq u \leq t \leq x$

$$(3.9) \quad \sum_{u < p \leq t, p \nmid N} \frac{1}{p} = \lambda(D) \log \left(\frac{\log t}{\log u} \right) + O(1).$$

La formule de Mertens fournit $\lambda(D) = \frac{1}{8} + o(1)$ ($x \rightarrow \infty$). Donc (3.9) implique (3.8) puisque $\frac{2}{17} < \frac{1}{8} < \frac{2}{15}$. Partant, la démonstration du lemme est complète.

Lemme 7. Pour $x \geq 2$ on désigne par $\mathcal{M}(x)$ l'ensemble des fonctions multiplicatives g telles que $|g(n)| = 1$ ($1 \leq n \leq x$). Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $\delta_4 > 0$, $x_0 \geq 2$, ne dépendant que de ε , telles que l'on ait

$$\left| \sum_{\substack{2 < p \leq x \\ (p-1, D)=1}} g(p-1) \right| \leq (1 - \delta_4) \lambda(D) \pi(x) \quad (x > x_0(\varepsilon))$$

pour tout $D \leq x^{1/2-\varepsilon}$ et toute fonction $g \in \mathcal{M}(x)$ satisfaisant à

$$(3.10) \quad \sup_{x^{1-\varepsilon/2} < y \leq x} \sup_{1 \leq \ell \leq 1/\delta_4} y^{-1} \left| \sum_{n \leq y, (n, D)=1} g(n)^\ell \right| \leq \delta_4 \frac{\varphi(D)}{D}.$$

Démonstration. Il s'agit ici d'adapter la démonstration de Hildebrand au cas d'une fonction nulle sur les facteurs premiers de D . La transposition n'induit aucune difficulté fondamentale et nous nous contentons d'indiquer les points essentiels. Pour simplifier l'exposition, nous effectuons la démonstration pour une fonction complètement multiplicative : l'extension au cas général est standard.

Nous pouvons manifestement supposer que D est impair. Soit $\eta = \frac{1}{4}\varepsilon$. On pose $J :=]x^\eta, x^{2\eta}]$ et l'on considère la quantité

$$S := \sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1}} \sum_{\substack{q|(p-1) \\ q \in J}} 1 = \sum_Q S(Q),$$

où $S(Q)$ est la sous-somme de S correspondant à la condition supplémentaire

$$q \in J(Q) := J \cap]Q, 2Q] \cap \mathbb{P},$$

la lettre \mathbb{P} désignant l'ensemble des nombres premiers et Q décrivant les nombres de la forme $2^t x^\eta$ avec $2^t \leq x^\eta$. Ici et dans toute la suite de cette démonstration la lettre q désigne un nombre premier. Une application routinière du théorème de Bombieri–Vinogradov fournit la minoration

$$\begin{aligned} (3.11) \quad S &= \sum_{q \in J} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} \sum_{d|(D, p-1)} \mu(d) = \sum_{q \in J} \sum_{d|D} \mu(d) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{[q, d]}}} 1 \\ &= \sum_{q \in J} \sum_{d|D} \mu(d) \frac{\pi(x)}{\varphi(q)\varphi(d)} + O\left(\sum_{q \in J} \sum_{\substack{d|D/q \\ d|D}} \frac{\pi(x)}{\varphi(q)\varphi(d)} + \frac{x}{(\log x)^2} \right) \\ &\geq \frac{9}{10} \lambda(D) \pi(x) \sum_{q \in J} \frac{1}{q-1} \geq \frac{1}{2} \lambda(D) \pi(x) \quad (x > x_1(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$(3.12) \quad \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1}} g(p-1) \right| > (1 - \delta_4) \lambda(D) \pi(x).$$

On en déduit que, pour un nombre complexe convenable w de module 1,

$$(3.13) \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1}} \{1 - \Re e(wg(p-1))\} \leq 2\delta_4 \lambda(D) \pi(x) \quad (x > x_2(\varepsilon)),$$

où nous avons utilisé l'estimation

$$(3.14) \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1}} 1 = \sum_{d|D} \mu(d) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{d}}} 1 = \lambda(D) \pi(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

qui découle également du théorème de Bombieri–Vinogradov. En faisant appel à l'identité $1 - \Re e Z = \frac{1}{2}|1 - Z|^2$ valable pour tout nombre complexe Z de module 1, on déduit de (3.13) que

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1 \\ |g(p-1) - \bar{w}| > \delta_5}} 1 \leq 4\delta_5 \lambda(D) \pi(x) \quad (x > x_2(\varepsilon)),$$

avec $\delta_5 = \delta_4^{1/3}$.

Posons $k := 1 + \lceil 4/\delta_5 \rceil$, $J_m = \{q \in J : \arg g(q) \in]2\pi m/k, 2\pi(m+1)/k]\}$ ($0 \leq m \leq k-1$), $J_m(Q) = J_m \cap J(Q)$. On peut alors écrire

$$(3.15) \quad S \leq \sum_Q \sum_{0 \leq m \leq k-1} S_m(Q) + (4\delta_5/\eta)\lambda(D)\pi(x) \quad (x > x_2(\varepsilon)),$$

avec

$$S_m(Q) := \sum_{\substack{p \leq x \\ (p-1, D)=1 \\ |g(p-1) - \bar{w}| \leq \delta_5}} \sum_{\substack{q|(p-1) \\ q \in J_m(Q)}} 1 \quad (1 \leq m \leq k).$$

Posant $n = (p-1)/q$ dans la somme intérieure, il suit

$$S_m(Q) \leq \sum_{\substack{n \leq x/Q \\ (n, D)=1 \\ |g(n) - w_m| \leq 2\delta_5}} \sum_{\substack{q \in J_m(Q) \\ 1+qn \in \mathbb{P}}} 1,$$

où nous avons introduit $w_m := \bar{w} e^{-(m + \frac{1}{2})/k}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$S_m(Q) \leq (S_{m1}(Q))^{1/2} \left(\sum_{q, q' \in J_m(Q)} S_{m2}(Q; q, q') \right)^{1/2}$$

avec

$$S_{m1}(Q) := \sum_{\substack{n \leq x/Q \\ (n, D)=1 \\ |g(n) - w_m| \leq 2\delta_5}} 1, \quad S_{m2}(Q; q, q') := \sum_{\substack{n \leq x/Q \\ (n, D)=1 \\ 1+qn, 1+q'n \in \mathbb{P}}} 1.$$

En utilisant l'hypothèse (3.10) et l'inégalité d'Erdős–Turán comme dans [9] (*Lemma 3*), on peut écrire

$$S_{m1}(Q) \ll \delta_5 \frac{\varphi(D)}{D} \frac{x}{Q}$$

où la constante impliquée est absolue.

Le grand crible ou le crible de Brun permettent de majorer $S_{m2}(Q; q, q')$. On obtient

$$\begin{aligned} S_{m2}(Q; q, q) &\ll \frac{\varphi(D)}{D} \frac{x}{Q \log x}, \\ S_{m2}(Q; q, q') &\ll \frac{\varphi(D)}{D} \frac{|q' - q|}{\varphi(|q' - q|)} \frac{x}{Q(\log x)^2} \quad (q \neq q'). \end{aligned}$$

Il suit

$$(3.16) \quad S_m(Q) \ll \sqrt{\delta_5} \frac{\varphi(D)}{D} \frac{x}{Q \log x} \sqrt{R_m(Q) + |J_m(Q)| \log x}$$

avec

$$\begin{aligned} R_m(Q) &:= \sum_{q \in J_m(Q)} \sum_{\substack{q' \in J_m(Q) \\ q' < q}} \frac{q - q'}{\varphi(q - q')} \\ &\leq \sum_{q \in J_m(Q)} |J_m(Q)|^{1/2} \left(\sum_{\substack{q' \in J(Q) \\ q' < q}} \frac{(q - q')^2}{\varphi(q - q')^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Un argument de convolution identique à celui du *Lemma 2* de [9] fournit une majoration $\ll Q/\log Q$ pour la somme intérieure, d'où

$$R_m(Q) \ll \sqrt{Q/\log Q} |J_m(Q)|^{3/2}.$$

En reportant dans (3.16), on obtient pour $x > x_3(\varepsilon)$

$$\sum_{0 \leq m \leq k-1} S_m(Q) \ll \sqrt{\delta_5} \frac{\varphi(D)}{D} \frac{x}{Q \log x} \frac{Q^{1/4}}{(\log Q)^{1/4}} \sum_{0 \leq m \leq k-1} |J_m(Q)|^{3/4}.$$

En employant l'inégalité de Hölder sous la forme

$$\sum_{0 \leq m \leq k-1} |J_m(Q)|^{3/4} \leq k^{1/4} \left(\sum_{0 \leq m \leq k-1} |J_m(Q)| \right)^{3/4} \asymp \delta_5^{-1/4} |J(Q)|^{3/4},$$

nous obtenons finalement

$$\sum_{0 \leq m \leq k-1} S_m(Q) \ll \delta_5^{1/4} \frac{\varphi(D)}{D} \frac{x}{\eta(\log x)^2}.$$

En reportant dans (3.15), on en déduit l'estimation

$$\begin{aligned} (3.17) \quad S &\ll \pi(x) \left\{ \delta_5^{1/4} \frac{\varphi(D)}{D} + \frac{\delta_5}{\varepsilon} \lambda(D) \right\} \\ &\ll \{ \delta_4^{1/12} + \delta_4^{1/3} \varepsilon^{-1} \} \lambda(D) \pi(x) \quad (x > x_4(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Cette majoration étant incompatible avec (3.11) pour $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon)$ assez petit, il s'ensuit que (3.12) n'a pas lieu pour une telle valeur de δ_4 . Cela complète la démonstration du lemme.

Dans le lemme suivant nous majorons la concentration de la fonction additive

$$E_r(n) := \sum_{p^\nu \parallel \varphi(n), p > r} \nu \quad (r = z^4)$$

sur les entiers n tels que $(\varphi(n), D) = 1$.

Lemme 8. Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations du Lemme 6, on a, uniformément pour $\exp\{(\log x)^\varepsilon\} \leq t \leq x$,

$$(3.18) \quad \sup_{k \geq 0} \sum_{\substack{b \leq t, (\varphi(b), D) = 1 \\ E_r(b) = k}} 1 \ll_\varepsilon \frac{t}{(\log_2 x)^{3/2}} \frac{\varphi(N)}{N} \left(\frac{\log x}{\log t} \right)^{8/9}.$$

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous convenons de désigner exclusivement par la lettre b un entier tel que $(\varphi(b), D) = 1$, c'est-à-dire tel que $(b, N) = 1$.

Soit $Q_z(t)$ la quantité à majorer. On a clairement

$$Q_z(t) \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{b \leq t} e(\vartheta E_r(b)) \right| d\vartheta.$$

Par les Lemmes 5 et 6, on peut encore écrire

$$\sum_{b \leq t} e(\vartheta E_r(b)) \ll t \frac{\varphi(N)}{N} \left(\frac{\log x}{\log t} \right)^{8/9} \left\{ e^{-\min_{|\tau| \leq T} Z_N(t; \vartheta, \tau)/9} + T^{-1/18} \right\}$$

avec

$$Z_N(t; \vartheta, \tau) := \sum_{\substack{p \leq t \\ p \nmid N}} \frac{1 - \cos(2\pi \vartheta \Omega_r(p-1) - \tau \log p)}{p},$$

$$\Omega_r(n) := \sum_{\substack{p^v \parallel n \\ p > r}} \nu.$$

On choisit $T = (\log_2 x)^{27}$. Cela réduit la preuve de (3.18) à celle de la minoration

$$(3.19) \quad Z_N(t; \vartheta, \tau) \gg \min(1, \|\vartheta\|_K^2 (\log_2 x)^2) \log_2 x + O(1) \quad (x_1 \leq t \leq x, |\tau| \leq T)$$

où $K = K(\varepsilon)$ est une constante convenable et où l'on a posé $x_1 = e^{(\log x)^\varepsilon}$.

On a pour les valeurs considérées de τ et t

$$\sum_{\substack{x_1 < p \leq t \\ p \nmid N}} \frac{e^{2\pi i \vartheta \Omega_r(p-1)}}{p^{1+i\tau}} = \sum_{\substack{x_1 < p \leq t \\ (p-1, D) = 1}} \frac{e^{2\pi i \vartheta \Omega_r(p-1)}}{(p-1)^{1+i\tau}} + O(1),$$

donc le Lemme 7 fournit (3.19) — avec en fait une constante ne dépendant que de ε au lieu de $\min(1, \|\vartheta\|_K^2 (\log_2 x)^2)$ — pour toutes les valeurs de ϑ et τ telles que

$$(3.20) \quad \sup_{\exp\{(\log x)^{\varepsilon/2}\} \leq y \leq x} \sup_{1 \leq \ell < 1/\delta_4} y^{-1} \left| \sum_{n \leq y, (n, D) = 1} e^{2\pi i \vartheta \ell \Omega_r(n)} n^{-i\tau} \right| \leq \frac{1}{10} \delta_4.$$

Nous avons utilisé ici le fait que $\varphi(D)/D \rightarrow \frac{1}{8}$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

On montre facilement par intégration complexe (voir [16], théorème II.5.3) que l'on a

$$\sum_{n \leq y, (n, D)=1} e^{2\pi i \vartheta \Omega_r(n)} = y(\log y)^{e(\vartheta)-1} \{G_1(z, \vartheta) + O_\varepsilon(G_2(z)/\log y)\} \quad (y \geq 2)$$

avec

$$G_1(z, \vartheta) := \prod_{p \leq \sqrt{z}} \left(1 + \frac{1 - e(\vartheta)}{p-1}\right) \prod_{p|D} \left(1 - \frac{e(\vartheta)}{p}\right) \frac{1}{\Gamma(e(\vartheta))} \prod_p \frac{(1 - 1/p)^{e(\vartheta)}}{1 - e(\vartheta)/p},$$

$$G_2(z) := \prod_{p \leq r} (1 + p^{-4/5}) \ll_\varepsilon (\log x)^{\varepsilon/4}.$$

Par intégration par parties, on en déduit (3.20) sous l'hypothèse

$$(3.21) \quad K_4(\varepsilon) < |\tau| + \|\vartheta\|_K \sqrt{\log_2 x} \leq 2T,$$

où $K = K(\varepsilon) = 1/\delta_4$ et $K_4(\varepsilon)$ est une constante convenable. Nous omettons les détails, qui sont identiques, *mutatis mutandis*, à ceux de la démonstration du Lemme 1. (On pourrait ainsi remplacer la borne supérieure $2T$ de (3.21) par $(\log x)^\alpha$ avec $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$, mais nous n'aurons pas l'usage de cette précision.)

Il reste à établir (3.19) lorsque $|\tau| + \|\vartheta\|_K \sqrt{\log_2 x} \leq K_4(\varepsilon)$. On procède de manière semblable à celle des Lemmes 2, 3 et 4, en approchant $\Omega_r(p-1)$ par $\log_2 p - \log_2 r$ et en estimant l'erreur impliquée par une extension adéquate de (2.6). La technique de sommation d'Abel est inchangée, à ceci près que l'on fait appel à (3.14) préalablement au théorème des nombres premiers. En définissant $I(x)$ comme dans (2.8), on obtient que l'on a

$$Z_N(t, \vartheta, \tau) = \lambda(D) \left\{ \log_2 x - \Re e \left(\frac{I(x)}{(\log r)^{2\pi i \vartheta}} \right) \right\} + O_{\varepsilon, C}(1 + |\vartheta|(\log_2 x)^{3/2})$$

uniformément pour $e^{(\log x)^\varepsilon} \leq t \leq x$, $|\tau| \leq C$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. On peut donc utiliser l'estimation de $I(x)$ établie au Lemme 2 et conclure, par les mêmes calculs, que (3.19) a bien lieu si τ est borné et $|\vartheta| \sqrt{\log_2 x}$ est assez petit. Les arguments des Lemmes 3 et 4 sont alors applicables sans modification pour obtenir la validité inconditionnelle de (3.19). Cela achève la démonstration du Lemme 8.

4. Preuve du Théorème 2 : complétion de l'argument

Conservons les notations r , $E^*(n, r)$, $E_r^*(n)$, $E_r(n)$ de la section 1 et z , D , N du Lemme 6. Conformément au schéma de démonstration décrit dans l'introduction, nous décomposons chaque entier $n \leq x$ sous la forme $n = ab$ avec $p|a \Rightarrow p|N$ et $(b, N) = 1$. Nous convenons de désigner génériquement, dans tout ce qui suit, par a

et b des entiers soumis à ces contraintes multiplicatives. Nous pouvons alors écrire, en introduisant $F_r^*(n) := \sum_{p|\varphi(n), \sqrt{z} < p \leq r} 1$,

$$E^*(n) = E^*(n, \sqrt{z}) + F_r^*(a) + E_r^*(n).$$

Cela découle trivialement du fait que, par construction, $F_r^*(b) = 0$. Nous allons maintenant montrer que tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $O(x/(\log_2 x)^2)$ d'entre eux satisfont aux conditions suivantes :

- (i) $E^*(n, \sqrt{z}) = \pi(\sqrt{z})$,
- (ii) $E_r^*(n) = E_r(a) + E_r(b)$,
- (iii) $a \leq x/\exp\{(\log x)^{1/10}\}$.

Pour q premier, soit $\chi_q(n)$ la fonction multiplicative valant 1 si $q \nmid \varphi(n)$ et 0 dans le cas contraire. Le nombre des entiers n contrevenant à (i) n'excède pas

$$\sum_{q \leq \sqrt{z}} \sum_{n \leq x} \chi_q(n) \ll x \sum_{q \leq \sqrt{z}} \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{\chi_q(p) - 1}{p}\right),$$

d'après un résultat classique concernant les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives positives — voir par exemple [16], théorème III.3.5. Le produit en p est

$$\leq \exp \left\{ - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} \frac{1}{p} \right\} \ll (\log x)^{-1/(q-1)}$$

uniformément pour $q \leq \sqrt{z}$, d'après le théorème de Siegel–Walfisz. Le nombre des entiers n ne vérifiant pas (i) est donc $\ll x\pi(\sqrt{z})e^{-\sqrt{z}} \ll x/z^2$.

Un entier n contrevient à (ii) si et seulement s'il existe un nombre premier $q > r$ tel que $q^2 | \varphi(n)$. Cela n'est possible que si l'une des trois conditions suivantes est réalisée : n est divisible par q^2 ; n possède un facteur premier $p \equiv 1 \pmod{q^2}$; n possède deux facteurs premiers distincts p_1, p_2 tels que $p_j \equiv 1 \pmod{q}$ ($j = 1, 2$). En utilisant l'estimation

$$\sum_{s < p \leq x, p \equiv 1 \pmod{s}} \frac{1}{p} \ll \frac{\log_2 x}{\varphi(s)} \quad (1 \leq s \leq x)$$

qui découle facilement du théorème de Brun–Titchmarsh, on obtient que le nombre de ces exceptions n'excède pas $\ll x(\log_2 x)^2/r \ll x/(\log_2 x)^2$.

Pour estimer le nombre des exceptions à (iii) nous utilisons le crible de Brun sous la forme

$$\sum_{a \leq t} 1 \ll t \prod_{p \leq t, p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = t \frac{N}{\varphi(N)} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{t < p \leq x \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (2 \leq t \leq x).$$

En estimant le dernier produit par le Lemme 6, nous obtenons donc

$$(4.1) \quad \sum_{a \leq t} 1 \ll \frac{N}{\varphi(N)} t (\log t)^{-1/7} (\log x)^{-6/7} \quad (2 \leq t \leq x).$$

Le nombre des entiers n tels que $a > x / \exp\{(\log x)^{1/10}\}$ n'excède donc pas

$$\sum_{x / \exp\{(\log x)^{1/10}\} < a \leq x} \frac{x}{a} \ll \frac{N}{\varphi(N)} \frac{x}{(\log x)^{9/10}} \ll \frac{x}{(\log x)^{1/90}},$$

où la première estimation résulte de (4.1) par sommation d'Abel et la seconde de (3.6).

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la phase finale de la démonstration du Théorème 2. La minoration de (1.5) découle, comme dans le cas de $E(n)$, de la convergence vers la loi de Gauss : ainsi que le remarquent Balazard et Smati dans [1], la formule (1.3) est valable pour $E^*(n)$ à condition de multiplier le terme d'erreur par $\log_4 x$. Nous pouvons donc nous restreindre à montrer la majoration contenue dans (1.5).

Il découle des réductions aux conditions (i), (ii) et (iii) que l'on a

$$Q(x; E^*) \leq x^{-1} \sum_{a \leq x / \exp\{(\log x)^{1/10}\}} \sup_{k \geq 0} \sum_{b \leq x/a, E_r(b)=k} 1 + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right).$$

En majorant la somme en b par le Lemme 8, il suit

$$Q(x; E^*) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^{3/2}} \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{a \leq x} \frac{1}{a} \left(\frac{\log x}{\log(2x/a)}\right)^{8/9} + \frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

Une sommation d'Abel utilisant (4.1) permet de montrer que la somme en a est $\ll N/\varphi(N)$. Cela achève la démonstration.

Bibliographie

- [1] M. Balazard et A. Smati, Travaux de Pomerance sur la fonction φ d'Euler, *Publ. Math. d'Orsay* **87**, (1989/1990), 5–36.
- [2] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory, I, II*, Springer Verlag (1979, 1980).
- [3] P.D.T.A. Elliott, The concentration of additive functions on shifted primes, *Acta Math.* **173**, no 1, (1994), 1–35.
- [4] P.D.T.A. Elliott, The multiplicative group of rationals generated by the shifted primes, I, *J. reine angew. Math.* **463** (1995), 169–216.
- [5] P. Erdős & C. Pomerance. On the normal number of prime factors of $\varphi(n)$, *Rocky Mountain Journal of Math.* (2) **15** (1985), 343–352.
- [6] P. Erdős, A. Granville, C. Pomerance & C. Spiro, On the normal behavior of the iterates of some arithmetic functions, *Analytic Number Theory (B.C. Berndt, H.G. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand eds.)*, Birkhäuser, (1990), 165–204.

- [7] G. Halász, On the distribution of additive arithmetical functions, *Acta Arith.* **27** (1975), 143–152.
- [8] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge tracts in mathematics, no 90, Cambridge University Press (1988).
- [9] A. Hildebrand, Additive and multiplicative functions on shifted primes, *Proc. London Math. Soc.* (3) **59**, (1989), 209–232.
- [10] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **31** (1985), 393–400.
- [11] M. Ram Murty & N. Saradha, On the sieve of Eratosthenes, *Can. J. Math.* **39**, no 5 (1987), 1107–1122.
- [12] B.A. Rogozin, On the increase of dispersion of sums of independent variables, *Theor. Probab. and Appl.* **6** (1961), 97–99.
- [13] I.Z. Ruzsa, On the concentration of additive functions, *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* **36** (1980), 215–232.
- [14] A. Selberg. Note on a paper by L.G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* **18** (1954), 83–87.
- [15] G. Tenenbaum, Sur la concentration moyenne des diviseurs, *Comment. Math. Helvetici* **60** (1985), 411–428.
- [16] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés no 1, *Société Mathématique de France* (Paris), 1995.
- [17] G. Tenenbaum, en collaboration avec J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no 2, *Société Mathématique de France* (1996), xiv + 251 pp.

F. Marie-Jeanne & G. Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France