Aequationes Mathematicae **35** (1988) 55–68
University of Waterloo

0001-9054/88/010055-14$1.50 + 0.20/0


# Sur la distribution conjointe des deux fonctions "nombre de facteurs premiers"

GÉRALD TENENBAUM

## 1. Introduction et énoncés des résultats

Désignons par $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers d'un entier $n$ comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Ces deux fonctions classiques ont à bien des égards des comportements très similaires, mais certaines questions fines font apparaître des divergences radicales. Ainsi, le Théorème d'Erdös et Kac, précisant celui de Hardy et Ramanujan, énonce dans les deux cas l'existence d'une même répartition limite gaussienne autour de l'ordre normal $\log_2 n$. Cependant, les lois locales $N(x, k)$ (resp. $\pi(x, k)$) $= \operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n)$ (resp. $\omega(n)) = k\}$ sont de natures asymptotiques essentiellement distinctes pour les grandes valeurs de $k$ – cf. [3, 4, 7, 8] pour l'état actuel de cette dernière question.

Récemment, A. Ivić [5] a proposé d'aborder le problème de la distribution conjointe des valeurs de $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ en considérant la quantité

$$V(x, \lambda) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n) > \lambda\omega(n)\}$$

lorsque $\lambda$ est un réel fixé $> 1$.

L'évaluation asymptotique de $V(x, \lambda)$ pose *a priori* une intéressante question méthodologique. En effet, on pourrait penser à première vue que l'approche, aujourd'hui classique, de Selberg, employée notamment par Delange (cf. [2]) pour estimer

AMS (1980) subject classification: Primary 11N05. Secondary 11M05, 30E20.

*Manuscript received June 19, 1986.*

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n) \text{ ou } \omega(n) > \lambda \log_2 x\},$$

est facilement transposable. Un examen plus détaillé montre cependant qu'un distinguo doit être établi: lorsque $\lambda$ est rationnel, disons $\lambda = a/q$, on peut, au moins théoriquement, obtenir $V(x, \lambda)$ par la formule de Cauchy appliquée au polynôme de Laurent

$$\sum_{n \leqslant x} z^{q\Omega(n) - a\omega(n)};$$

lorsque $\lambda$ est irrationnel, au contraire, on voit clairement qu'une modification plus profonde de la méthode est nécessaire. Ce travail a été accompli par Balazard. Dans un article [1] élaboré indépendamment de la présente étude, il considère le polynôme en deux variables complexes

$$\sum_{n \leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}$$

et obtient par une double application de la formule de Cauchy et un processus assez compliqué de re-sommation une formule asymptotique pour $V(x, \lambda)$ valable pour tout $\lambda > 1$.

Nous avons suivi une autre voie en utilisant la formule de Perron, qui remplace avantageusement celle de Cauchy lorsqu'il s'agit d'approcher la fonction caractéristique de l'ensemble de positivité d'une fonction non nécessairement à valeurs entières. Un aspect inhabituel, voire inattendu, de la formule asymptotique obtenue consiste en une discontinuité aux points rationnels de l'expression du terme principal. Ainsi la dichotomie technique observée plus haut n'est pas purement superficielle mais, *au contraire*, révélatrice d'une proprieté intrinsèque de l'objet étudié.

Avant d'énoncer nos résultats, précisons quelques notations et définitions.

Pour $\lambda > 1$, nous posons

$$\alpha = 2^{1-\lambda}, \quad \gamma = 2^{1-\lambda} - 3^{1-\lambda},$$

et

$$H(\alpha) = \frac{\alpha 2^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha) \log 4} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{p-2}\right).$$

Si $\lambda$ est irrationnel, nous définissons le *type* (cf. [6] p. 121)

$$\psi(q) = \max_{m \leqslant q} \left( \frac{1}{m\|\lambda m\|} \right)$$

où $\|u\|$ désigne, comme c'est l'usage, la distance de $u$ à l'ensemble des entiers. On introduit alors la quantité suivante, définie pour $y$ assez grand,

$$Q_\lambda(y) := \max\{q \geqslant 1 : q\psi(q) \leqslant y\}.$$

Il est clair que $Q_\lambda(y)$ tend vers l'infini avec $y$ pour tout $\lambda$ irrationnel. Plus précisément, si l'on désigne par $D_n$ la discrépance de la suite $\{q\lambda\}$ à l'ordre $n$, nous prouvons en appendice que l'on a

$$Q_\lambda(y)^{-1} \ll \delta_\lambda(y) \tag{1}$$

pour toute fonction $\delta_\lambda(y)$ décroissante, majorant $D_{[y]}$, et telle que $y\delta_\lambda(y)$ soit croissante. Un choix possible est

$$\delta_\lambda(y) = \frac{1}{y} \int_0^y \left( \sup_{n \geqslant [t]} D_n \right) dt.$$

Théorème 1. *Si $\lambda = a/q$, $(a, q) = 1$, on a*

$$V(x, \lambda) = \frac{\log 2}{q(2^{1/q} - 1)} H(\alpha) x (\log x)^{\alpha - 1} \left( 1 + O_\varepsilon((\log x)^{-\gamma + \varepsilon} + \log q \cdot (\log x)^{-2\gamma \sin^2 \frac{\pi}{q}}) \right)$$

*uniformément pour $x \geqslant e^q$, $1 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$.*

Théorème 2. *Si $\lambda$ est irrationnel, on a*

$$V(x, \lambda) = H(\alpha)\, x (\log x)^{\alpha - 1} \left(1 + O(Q_\lambda(\sqrt{\log_2 x})^{-1})\right)$$

*uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$.*

Remarques. 1) Une modification triviale de la démonstration du théorème 1 permet de calculer $\operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n) > \lambda\omega(n) - 1/q\}$. Par différence, on obtient l'évaluation

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n) = \lambda\omega(n)\} = \frac{\log 2}{q} H(\alpha)\, x (\log x)^{\alpha - 1} (1 + o(1))$$

où le terme reste peut être majoré par

$$O_\varepsilon\left((\log x)^{-\gamma+\varepsilon} + q \log q (\log x)^{-2\alpha \sin^2 \frac{\pi}{q}}\right).$$

Il est remarquable, ici comme dans le théorème 1, que le seconde terme disparaisse lorsque $\lambda$ est un entier naturel ($q = 1$).

2) Les termes d'erreur obtenus par Balazard sont légèrement moins précis que ceux qui apparaissent dans les énoncés précédents. Dans le cas d'un irrationnel quadratique par exemple (qui fournit dans les deux méthodes le meilleur terme reste pour un irrationnel), on a $\psi(q) \ll 1$ d'où

$$Q_\lambda(\sqrt{\log_2 x})^{-1} \asymp (\log_2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

alors que le terme reste correspondant dans [1] n'est pas $o(\log_3 x \cdot (\log_2 x)^{-\frac{1}{2}})$. On peut voir la cause de ce phénomène dans la nécessité, inhérente à l'emploi de la double formule de Cauchy, d'opérer une re-sommation pour obtenir le terme principal — alors que la méthode développée ici le fait apparaître directement, par un calcul de résidus.

3) Dans ce contexte, il est à noter que la majoration (1) n'est pas toujours optimale. Dans le cas quadratique par exemple, il est bien connu que la majoration

$$\delta_\lambda(y) \ll (\log y)/y$$

n'est pas améliorable (cf. [6] p. 109), alors que l'on a manifestement

$$Q_\lambda(y) \asymp y.$$

L'auteur tient à exprimer ici ses plus vifs remerciements à Michel Balazard, Aleksandar Ivić et Jean-Louis Nicolas pour de fructueuses conversations, épistolaires ou non, concernant les questions abordées dans cet article.

## 2. Première réduction du problème

Notre méthode consiste essentiellement à appliquer une formule de Perron à l'expression

$$P_\lambda(x, z) := \sum_{n \leqslant x} e^{z(\Omega(n) - \lambda\omega(n))},$$

de façon à approcher suffisamment $V(x,\lambda)$. La première étape est bien entendu l'obtention d'une formule asymptotique pour cette quantité, assortie d'une majoration effective et uniforme du terme d'erreur.

On introduit à cet effet la série de Dirichlet

$$F(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z(\Omega(n) - \lambda\omega(n))} n^{-s},$$

qui est absolument convergente pour $\operatorname{Re} z < \log 2$, $\operatorname{Re} s > 1$. Dans ce domaine, on a

$$F(s, z) = \zeta(s)^{\rho}\, G(s, z) \tag{2}$$

avec

$$\rho := e^{(1-\lambda)z}, \quad G(s, z) := \prod_p (1 - p^{-s})^{\rho}\left(1 + \frac{\rho}{p^s - e^z}\right).$$

Pour chaque réel $\eta$, $0 < \eta < 1/2$, la formule (2) définit un prolongement analytique de $F(s, z)$ au demi-plan $\operatorname{Re} s > 1 - \eta$, lorsque $\operatorname{Re} z \leqslant \log 2 - \eta$. En utilisant les propriétés classiques du prolongement de $\zeta(s)$ dans la bande critique, on en déduit comme dans l'article initial de Selberg [9] que la formule suivante est valable uniformément pour $x \geqslant 2$, $0 < \eta \leqslant 1/2 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \log 2 - \eta$,

$$P_{\lambda}(x, z) = \frac{G(1, z)}{\Gamma(\rho)}\, x(\log x)^{\rho - 1} + O(\eta^{-6}\, x(\log x)^{\rho - 2}). \tag{3}$$

La quantité $\eta^{-6}$ apparaît ici comme un majorant de

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)|(\log(3n))^4\, n^{-1} \tag{4}$$

où $b_z(n)$ désigne le coefficient de $n^{-s}$ dans le développement de $G(s, z)$ en série de Dirichlet. En fait, $b_z(n)$ est la fonction multiplicative de $n$ dont les valeurs sur les puissances de nombres premiers sont définies par l'identité

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_z(p^{\nu})\xi^{\nu} = (1 - \xi)^{\rho}\left(1 + \frac{\rho\xi}{1 - \xi e^z}\right). \tag{5}$$

Comme le membre de droite de (5) est une fonction holomorphe de $\xi$ dans le disque

$|\xi| \leqslant \frac{1}{2} e^{\eta/2}$ lorsque $\operatorname{Re} z \leqslant \log 2 - \eta$, on obtient par la formule de Cauchy

$$|b_z(2^\nu)| \leqslant c_1 \eta^{-1} 2^\nu e^{-\eta\nu/2}, \quad |b_z(p^\nu)| \leqslant c_2 \left(\frac{5}{2}\right)^\nu, \ (p \geqslant 3),$$

où $c_1$ et $c_2$ ne dépendent que de $\lambda_1$ et $\lambda_2$. De plus, la relation (5) implique

$$b_z(p) = 0, \ (p \geqslant 2).$$

On obtient donc que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)| n^{-s} = \prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_z(p^\nu)| p^{-\nu s}$$

converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1 - \eta/2$ et est dans ce demi-plan

$$\ll \left(1 + c_1 \eta^{-1} \sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-\eta\nu(1-\log 2)/2}\right) \prod_{p \geqslant 3} \left(1 + \frac{25 c_2}{2p(2p-5)}\right)$$
$$\ll \eta^{-2}.$$

En appliquant alors la formule de Cauchy à l'ordre 4 à cette fonction de $s$, on obtient bien que la série (4) est $O(\eta^{-6})$.

## 3. Preuve du Théorème 1

La point de départ est la formule de Perron

$$1 - e^{-Ty^+} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{yz} \frac{T dz}{z(z+T)} \tag{6}$$

valable pour tous $\beta > 0$, $T > 0$, $y \in \mathbb{R}$, et où l'on a posé

$$y^+ = \max(y, 0).$$

Désignons par $\chi$ la fonction caractéristique de $(0, +\infty)$. Si $y \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$, le membre de gauche de (6) vaut

$$(1 + O(e^{-T/q}))\,\chi(y).$$

En spécialisant, dans (6), $y = \Omega(n) - \lambda\omega(n)$ et en sommant pour $n \leqslant x$, il vient donc

$$V(x, \lambda)\,(1 + O(e^{-T/q})) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} P_\lambda(x, z)\frac{T\,dz}{z(z+T)}. \tag{7}$$

Choisissons maintenant $T = q\ \log x \leqslant (\log x)^2$ et $\beta = \log 2 - 1/\log_2 x$. Evaluant $P_\lambda(x, z)$ par (3), on constate que la contribution au membre de droite de (7) du terme d'erreur de (3) est

$$\ll x(\log x)^{\alpha-2}(\log_2 x)^7.$$

Pour calculer la contribution du terme principal de (3), on déplace la droite d'intégration jusqu'à $\beta = \log 3 - \varepsilon$ et on applique le Théorème des résidus.

L'intégrale sur la droite verticale $\operatorname{Re} z = \log 3 - \varepsilon$ est

$$\ll_\varepsilon x(\log x)^{\alpha-1-\gamma+\varepsilon}.$$

La fonction $G(1, z)$ possède un pôle simple en chaque point

$$z_{b,k} = \log 2 + 2i\pi(b + kq), \ (0 \leqslant b < q,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Le résidu de $G(1, z)x(\log x)^{\rho-1}/\Gamma(\rho)$ en $z_{b,k}$ vaut exactement

$$\log 2\; H(\alpha_b)\; x(\log x)^{\alpha_b - 1}$$

où l'on a posé

$$\alpha_b = \exp\{(1-\lambda)z_{b,0}\} = \alpha\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{ab\pi}{q}\right)\right)$$

(on a en particulier $\alpha_0 = \alpha$). La somme des résidus intervenant dans le calcul de (7) est donc égale à

$$x(\log x)^{\alpha-1}\log 2\sum_{b=0}^{q-1} H(\alpha_b)(\log x)^{-2\alpha\sin^2(ab\pi/q)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{T}{z_{b,k}(z_{b,k}+T)}. \tag{8}$$

Notons $e(u) := \exp(2i\pi u)$. La somme intérieure ci-dessus vaut

$$\frac{2^{1/q}e(b/q)}{2i\pi q}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}(2^{1/q}e(b/q)-e^{z/q})^{-1}\frac{Tdz}{z(z+T)}. \tag{9}$$

Cette expression découle du théorème des résidus en déplaçant l'abscisse d'intégration vers la droite jusqu'à l'infini. Or, en déplaçant maintenant cette abscisse vers la gauche à l'infini, on obtient que (9) vaut encore

$$\begin{aligned}\frac{2^{1/q}e(b/q)}{q}&\left\{\left(2^{1/q}e(b/q)-1\right)^{-1}-\left(2^{1/q}e(b/q)\right)-e^{-T/q})^{-1}\right\}\\&=\frac{1}{q(2^{1/q}e(b/q)-1)}+O\left(\frac{1}{T}\right).\end{aligned}$$

En reportant dans (8), on voit que le terme correspondant à $b = 0$ fournit le terme principal annoncé. Pour $1 \leqslant b < q$, on a $|q(2^{1/q}e(b/q) - 1)| \gg \min(b, q - b)$. La somme des termes correspondant aux valeurs non nulles de $b$ (vide si $q = 1$) apporte donc une contribution

$$\ll x(\log x)^{\alpha-1-2\alpha\sin^2(\pi/q)}\log q.$$

On obtient bien le résultat annoncé en regroupant les estimations idoines.

## 4. Preuve du Théorème 2

Nous utilisons l'encadrement suivant, valable pour tous $\beta > 0$, $T > 0$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \chi(y)-(1-e^{-Ty^+}) &\leqslant \frac{e^2}{e-1}(e^{-T(y+1/T)^+}-e^{-2T(y+1/T)^+})\\&=\frac{e^2}{e-1}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}e^{z(y+1/T)}\frac{Tdz}{(z+T)(z+2T)}.\end{aligned}$$

En prenant en compte la formule (6), on obtient comme précédemment

$$\begin{aligned}V(x,\lambda)=&\frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}P_\lambda(x,z)\frac{Tdz}{z(z+T)}\\&+O\left(\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}P_\lambda(x,z)\frac{e^{z/T}Tdz}{(z+T)(z+2T)}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

Posons $\eta = 1/\log_2 x$, choisissons $\beta = \log 2 - \eta$, et reportons l'évaluation (3) dans les intégrales en $z$. On a $e^{(1-\lambda)\beta} < \alpha + O(\eta)$; la contribution au membre de droite de (10) du terme d'erreur de (3) est donc

$$\begin{aligned}&\ll \eta^{-6}\, x(\log x)^{\alpha-2} \int_1^\infty \frac{T dt}{t(t+T)}\\ &\ll x(\log x)^{\alpha-1} \frac{\log T \cdot (\log_2 x)^6}{\log x}.\end{aligned}$$

La contribution du terme principal de (3) est estimée en déplaçant l'abscisse d'intégration jusqu'à $\operatorname{Re} z = 1$ et en faisant appel au théorème des résidus.

Les résidus du pôle simple $z = \log 2$ fournissent un terme

$$\begin{aligned}&H(\alpha)\, x(\log x)^{\alpha-1}\left(\frac{T}{T+\log 2} + O\left(\frac{T}{(\log 2 + T)(\log 2 + 2T)}\right)\right)\\ &\qquad = \left(1 + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) H(\alpha)\, x(\log x)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Les résidus des autres pôles $z = \log 2 + 2i\pi k, k \neq 0$, contribuent pour une quantité

$$\ll x \sum_{k=1}^{\infty} (\log x)^{\alpha\cos(2k\pi\lambda)-1} \frac{T}{k(k+T)} = x(\log x)^{\alpha-1} R_\lambda(x, T),$$

disons.

Enfin, les intégrales sur la droite verticale $\operatorname{Re} z = 1$ sont

$$\ll x(\log x)^{e^{1-\lambda}-1} \int_1^\infty \frac{T dt}{t(t+T)} \ll x(\log x)^{\alpha-1} \frac{\log T}{(\log x)^{c_3}}$$

où $c_3 = c_3(\lambda_1, \lambda_2)$ est une constante positive.

En regroupant les estimations précédentes, on obtient

$$V(x, \lambda) = H(\alpha)x(\log x)^{\alpha-1}\left(1 + O\left(\frac{1}{T} + R_\lambda(x, T) + \frac{\log T}{(\log x)^{c_4}}\right)\right) \tag{11}$$

où $c_4$ est une constante positive ne dépendant que de $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Maintenant, la minoration $1 - \cos(2k\pi\lambda) \geqslant 8\|k\lambda\|^2$ implique

$$R_\lambda(x, T) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\log x)^{-8\alpha\|k\lambda\|^2} \frac{T}{k(k+T)}$$

et la conjonction des deux lemmes suivants montre que cette quantité est $O(Q_\lambda(\sqrt{\log_2 x})^{-1})$ pour le choix $T = Q_\lambda(\sqrt{\alpha \log_2 x})$. Comme $Q_\lambda(\sqrt{\alpha \log_2 x}) \ll \sqrt{\log_2 x}$, on obtient bien le résultat annoncé en reportant dans (11).

LEMME 1. *Pour tout nombre irrationnel $\lambda$ fixé, et tout réel $y$ assez grand, on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-y\|k\lambda\|^2\} \frac{T}{k(k+T)} \ll \frac{1}{T}$$

*avec*

$$T = Q_\lambda(\sqrt{y}).$$

LEMME 2. *Pour tous réels $\theta, y$, $0 < \theta \leqslant 1$, $y \geqslant 1$, tels que $\theta y$ soit assez grand, on a*

$$Q_\lambda(\theta y) \geqslant \frac{1}{2}\theta Q_\lambda(y).$$

*Preuve du Lemme* 2. Soit $q$ le plus petit entier tel que $q \geqslant \frac{1}{\theta}(1 + Q_\lambda(\theta y))$. Comme $\psi$ est croissante on a

$$q\psi(q) \geqslant \frac{1}{\theta}(1 + Q_\lambda(\theta y))\,\psi(1 + Q_\lambda(\theta y)) > y$$

donc

$$Q_\lambda(y) < q \leqslant \frac{2}{\theta} Q_\lambda(\theta y),$$

c'est-à-dire l'inégalité souhaitée.

*Preuve du Lemme* 1. Soit $T = Q_\lambda(\sqrt{y})$. Par définition de $Q_\lambda$, on a

$$\|qy\| \geqslant y^{-\frac{1}{4}}, \ (1 \leqslant q \leqslant T).$$

Pour $k, h \leqslant T/2$, $k \neq h$, on a donc

$$\big|\|k\lambda\| - \|h\lambda\|\big| \geqslant \|(k \pm h)\lambda\| \geqslant y^{-\frac{1}{4}}.$$

Ainsi, pour chaque $j \geqslant 0$, l'intervalle $[jy^{-\frac{1}{2}}, (j+1)y^{-\frac{1}{2}}]$ contient au plus une valeur de $\|k\lambda\|$ avec $1 \leqslant k \leqslant T/2$, et n'en contient aucune si $j = 0$. Désignons par $k(j)$ l'unique entier de $[1, T/2]$, s'il existe, tel que $j \leqslant \|k(j)\lambda\| y^{\frac{1}{2}} < j+1$, et posons $k(j) = +\infty$ dans l'éventualité contraire. On a

$$k(j)\psi(k(j)) \geqslant \frac{1}{\|k(j)\lambda\|} > \frac{\sqrt{y}}{j+1}.$$

Cela implique l'existence d'une constante absolue $c_0$ telle que

$$k(j) \geqslant Q_\lambda\left(\frac{\sqrt{y}}{j+1}\right) \geqslant \frac{T}{2(j+1)}, \ (1 \leqslant j \leqslant c_0\sqrt{y}),$$

où la seconde inégalité découle du lemme 2. Il vient donc

$$\begin{aligned}\sum_{k \leqslant T/2} e^{-y\|k\lambda\|^2} k^{-1} &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2} k(j)^{-1} \\ &\leqslant \frac{2}{T} \sum_{1 \leqslant j \leqslant c_0 y^{1/2}} (j+1) e^{-j^2} + \sum_{j > c_0 y^{1/2}} e^{-j^2} \ll \frac{1}{T}.\end{aligned}$$

Pour achever la preuve du Lemme 1, il suffit donc de montrer que l'on a

$$\sum_{k > T/2} e^{-y\|k\lambda\|^2} k^{-2} \ll T^{-2}.$$

Nous allons voir que l'on a en fait pour tout $m \geqslant 1$

$$\sum_{mT/2 < k \leqslant (m+1)T/2} e^{-y\|k\lambda\|^2} \ll 1. \tag{12}$$

Pour chaque $j \geqslant 0$, l'encadrement

$$j \leqslant \|k\lambda\| y^{\frac{1}{2}} < j+1 \tag{13}$$

ne peut être réalisé que pour au plus deux valeurs de $k$ telles que $mT/2 < k \leqslant (m+1)T/2$. En effet, si (13) possède trois solutions $k_1, k_2, k_3$, alors $\{k_i\lambda\} - \frac{1}{2}$ est d'un signe déterminé pour au moins deux valeurs de $i$, disons $i = 1$ et $i = 2$. Cela implique

$$\|(k_1 - k_2)\lambda\| \leqslant \big|\|k_1\lambda\| - \|k_2\lambda\|\big| < y^{-\frac{1}{2}},$$

et contredit le fait que $|k_1 - k_2| < T/2$. On a donc

$$\sum_{mT/2 < k \leqslant (m+1)T/2} e^{-y\|k\lambda\|^2} \leqslant 2 \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j^2} \ll 1,$$

ce qui achève la démonstration.

## Appendice

Nous nous proposons ici d'établir la relation (1).

Pour chaque $y \geqslant 1$, considérons la discrépance $D$ de la suite $\{k\lambda\}$ à l'ordre $[y]$. On a par définition de $D$

$$\operatorname{Card}\{k \leqslant y : \|k\lambda\| < \frac{1}{2}D\} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2}D + Dy = 2Dy. \tag{14}$$

S'il existait alors un entier $q \leqslant 1/3D$ tel que $\|q\lambda\| < 1/(6y)$, on aurait pour tout $k$ de la forme $k = hq$, $h \leqslant 3yD$,

$$k \leqslant y \text{ et } \|k\lambda\| \leqslant h\|q\lambda\| < \frac{1}{2}D.$$

Cela impliquerait l'existence d'au moins $[3yD]$ entiers $k \leqslant y$ tels que $\|k\lambda\| < D/2$, ce qui contredirait (14) pour y assez grand.

Nous avons donc montré que l'on a

$$\|q\lambda\| > \frac{1}{6y}$$

pour tout $q \leqslant 1/(3D)$ et *a fortiori* pour tout $q \leqslant 1/(3\delta_\lambda(y))$. Pour chaque entier $q \geqslant 1$, définissons

$$Y = Y(q) = \max\left\{m \geqslant 1 : \delta_\lambda(m) > \frac{1}{3q}\right\}.$$

On a donc $q \leqslant 1/(3\delta_\lambda(Y+1))$ et il découle de ce qui précède que

$$\|q\lambda\| > \frac{1}{6(Y+1)} \geqslant \frac{1}{12Y} = \frac{3\delta_\lambda(Y)}{36Y\delta_\lambda(Y)}$$
$$> \frac{1}{36qY\delta_\lambda(Y)}.$$

Comme $Y(q)$ est une fonction croissante de $q$, il en va de même de $Y\delta_\lambda(Y)$ et on en déduit que

$$\psi(q) \leqslant 36Y(q)\delta_\lambda(Y(q)), \ (q \geqslant 1). \tag{15}$$

Choissons maintenant, pour y assez grand,

$$q = \left[\frac{1}{3\delta_\lambda(y/36)}\right]. \tag{16}$$

On a nécessairement $Y(q) \leqslant y/36$ car l'inégalité opposée impliquerait, grâce à la décroissance de $\delta_\lambda$,

$$\delta_\lambda(y/36) \geqslant \delta_\lambda(Y(q)) > \frac{1}{3q},$$

ce qui contredit (16).

En utilisant alors le fait que $y\delta_\lambda(y)$ est croissante, on déduit de (15) que l'on a

$$q\psi(q) \leqslant 36q \cdot \frac{y}{36}\delta_\lambda\left(\frac{y}{36}\right) < y$$

d'où

$$Q_\lambda(y) \geqslant q \geqslant \frac{1}{6\delta_\lambda(y/36)} \geqslant \frac{1}{216\delta_\lambda(y)},$$

où la dernière inégalité découle de la croissance de $y\delta_\lambda(y)$ sous la forme

$$\frac{y}{36}\delta_\lambda\left(\frac{y}{36}\right) \leqslant y\delta_\lambda(y).$$

REFERENCES

[1] BALAZARD, M., *Sur la moyenne des exposants dans la décomposition en facteurs premiers.* Acta Arith., à paraître.
[2] ERDŐS, P. et NICOLAS, J.-L., *Sur la fonction: nombre de facteurs premiers de N.* Enseign Math. *27* (1981), 3–27.
[3] HENSLEY, D., *On the distribution of round numbers.* Proc. London Math. Soc. (3) *54* (1987), 412–444.
[4] HILDEBRAND, A. et TENENBAUM, G., *On the number of prime factors of an integer.* Duke Math. J., à paraître.
[5] IVIĆ, A., *On the distribution of values of the omega functions.* Prépublication (Septembre 1985).
[6] KUIPERS, L. et NIEDERREITER, H., *Uniform distribution of sequences.* Wiley, New York, London, Sidney, Toronto, 1974.
[7] NICOLAS, J.-L., *Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers.* Acta Arith. *44* (1984), 191–200.
[8] POMERANCE, C. *On the distribution of round numbers.* In: Number Theory (Proc. Ootacamund, India 1984). Ed. K. Alladi. (Lecture Notes in Math. Vol. 1121) Springer, Berlin, New York, 1985, pp. 173–200.
[9] SELBERG, A., *Note on a paper by L. G. Sathe.* J. Indian Math. Soc. *18* (1954), 83–87.

*Université de Nancy I,*
*U.E.R. Sciences Mathématiques,*
*B.P. 239,*
*F-54506 Vandœuvre les Nancy Cedex,*
*France.*