The mathematics of Paul Erdős,
R.L. Graham & J. Nešetřil (eds),
Algorithms and combinatorics 13
Springer Verlag, 1997, 117–128.

Sur la non-dérivabilité de fonctions périodiques associées à certaines formules sommatoires(1)

Gérald Tenenbaum

1. Introduction

Les fonctions arithmétiques associées aux systèmes de représentations d'entiers, comme le développement dans une base donnée, satisfont généralement des relations de récurrence qui facilitent considérablement l'étude de leur valeur moyenne. Considérons par exemple la somme des chiffres en base 2, que nous désignons par $\sigma(n)$. On a

$$\sigma(2n) = \sigma(n), \quad \sigma(2n+1) = \sigma(n) + 1 \qquad (n \geqslant 1), \tag{1.1}$$

d'où il découle que la fonction sommatoire $S(n) := \sum_{0 \leqslant m < n} \sigma(m)$ satisfait à

$$S(2n) = n + 2S(n), \quad S(2n+1) = n + \sigma(n) + 2S(n) \qquad (n \geqslant 0). \tag{1.2}$$

En particulier, si l'on pose $\varphi(n) := S(n) - \dfrac{n \log n}{2 \log 2}$ $(n \geqslant 1)$, la première relation (1.2) implique $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$ pour tout n, de sorte que l'on peut écrire

$$\varphi(n) = nG\Big(\frac{\log n}{\log 2}\Big), \qquad S(n) = \frac{n \log n}{2 \log 2} + nG\Big(\frac{\log n}{\log 2}\Big), \tag{1.3}$$

où G est périodique de période 1.

Dans la quasi-totalité des exemples connus, on obtient de même, sans trop de difficulté, une formule du type

$$\sum_{m<n} a_m = P(n) + Q(n)G(\log n) + R(n) \tag{1.4}$$

pour une fonction arithmétique donnée $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, où P et Q sont des fonctions régulières — typiquement des combinaisons linéaires de produits de puissances n^{α}

1. Nous incluons ici certaines corrections relativement à la version publiée.

et de puissances de logarithmes $(\log n)^\beta$ —, $R(n)$ est un terme résiduel, souvent périodique et/ou borné, et G est une fonction oscillante périodique à caractère fractal, en général continue.

Trollope [38] a donné, pour la fonction G de la formule (1.3), une formule explicite impliquant en particulier qu'elle est continue, et partant bornée. Utilisant une méthode plus simple, Delange [10] a généralisé le résultat au cas de la somme des chiffres en base $q \geqslant 2$ quelconque, que nous notons $\sigma_q(n)$, soit

$$\sum_{m<n} \sigma_q(m) = \frac{q-1}{2\log q} n \log n + nG_q\Big(\frac{\log n}{\log q}\Big), \tag{1.5}$$

où G_q est continue et 1-périodique. Il montre en outre que G_q n'est nulle part dérivable et détermine son développement de Fourier.

A côté de celles de Trollope et Delange, plusieurs autres techniques sont en fait susceptibles de fournir le calcul explicite de G_q. Nous utilisons à la section 3 une approche assez générale fondée sur l'intégration complexe. Voyons ici, par exemple, comment fonctionne, dans le cas $q = 2$, celle de Brillhart, Erdős et Morton dans [2]. Soit x un nombre réel positif, dont le développement en base 2 est

$$x = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r 2^{-r},$$

avec $\varepsilon_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_r = 0$ ou 1 pour $r \geqslant 1$, et $\varepsilon_r \neq 1$ pour une infinité de valeurs de r. On pose

$$x_k := \big[2^k x\big] = \sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r 2^{k-r}, \quad \text{et} \quad T_k := \frac{S(x_k)}{2^k} - \frac{x\log(2^k x)}{2\log 2}.$$

On a $x_k = 2x_{k-1} + \varepsilon_k$. Grâce à (1.2), on en déduit par un calcul de routine que

$$T_k - T_{k-1} = \varepsilon_k 2^{-k}\sigma(x_{k-1}) - \sum_{r=k}^{\infty} \varepsilon_r 2^{-r-1}, \tag{1.6}$$

ce qui implique l'existence de $\varphi(x) := \lim_{k\to\infty} T_k$. De plus, par itération puis passage à la limite en k, la relation (1.6) fournit

$$\varphi(x) - T_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_r}{2^r}\big\{\sigma(x_{r-1}) - \tfrac{1}{2}r\big\},$$

d'où

$$\varphi(x) = S([x]) - \frac{x\log x}{2\log 2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_r}{2^r}\big\{\sigma(x_{r-1}) - \tfrac{1}{2}r\big\} \tag{1.7}$$

Lorsque $x = n \in \mathbb{N}$, on a $\varepsilon_0 = n$, $\varepsilon_r = 0 \quad (r \geqslant 1)$ et l'on retrouve bien (1.3). De plus, lorsque ξ est un rationnel dyadique positif de dénominateur réduit 2^m $(m \geqslant 0)$, on a

$$\lim_{x\to\xi-} \sigma(x_r) = \begin{cases} \sigma(\xi_r) & (r < m), \\ \sigma(\xi_m - 1) + r - m & (r \geqslant m), \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\xi-} \varepsilon_r(x) = \begin{cases} \varepsilon_r(\xi) & (r < m), \\ \varepsilon_m(\xi) - 1 & (r = m), \\ 1 & (r > m). \end{cases}$$

Cela permet de vérifier facilement que $\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. La fonction G de (1.3) peut donc être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ par la formule

$$G(u) := \varphi(2^u)/2^u.$$

Puisque les quantités $(\log n)/\log 2$ sont denses modulo 1, la propriété de périodicité observée plus haut est encore valable pour le prolongement.

La littérature abonde en exemples de situations similaires — ainsi qu'on pourra s'en convaincre à la lecture de notre bibliographie, issue de celle rassemblée dans la thèse de Cateland [5]. Désignons, conformément à l'usage, par *q-noyau* d'une suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ l'ensemble des sous-suites

$$\{n \mapsto a_{q^k n + r} : k \geqslant 0,\ 0 \leqslant r < q^k\}.$$

La généralisation naturelle de la propriété (1.1) est celle des suites q-automatiques, i.e. dont le q-noyau est fini, voire des suites q-régulières, c'est-à-dire dont le q-noyau engendre un module de type fini — cf.[1]. La quasi-totalité des exemples connus relève effectivement de ces deux définitions.

Dans cette note, nous nous intéressons plus particulièrement à la non-dérivabilité des fonctions fractales G apparaissant dans des formules de type (1.4). Peu de résultats généraux sont disponibles dans cette direction. Les travaux les plus significatifs sont ceux de Dumont-Thomas [11-13] et Cateland [5]. On distingue essentiellement trois types de méthodes : d'une part celles qui exploitent l'expression exacte de $G(x)$, généralement sous la forme d'une série liée à la représentation de x dans un système adéquat, d'autre part celles qui établissent l'existence d'équations fonctionnelles pour G (c'est en particulier la voie explorée par Dumont et Thomas), enfin celles qui utilisent les divers renseignements disponibles sur les coefficients de Fourier de G — ce qui ne fournit en général qu'une preuve de la non-dérivabilité presque-partout, et non partout. Nous nous proposons de développer ici une quatrième approche, sans doute la plus naïve de toutes. Elle consiste à "oublier" la définition explicite de G pour ne retenir que la formule (1.4) : comme le membre de gauche est arithmétique, donc irrégulier, il est naturel d'attendre que le membre de droite contienne lui aussi un certain degré d'irrégularité — qui doit alors être nécessairement le fait du terme fractal $G(\log n)$. Il reste ensuite à opérer un "relèvement" des valeurs de la variable, en transportant les propriétés des $G(\log n)$ aux $G(x)$ où x est un nombre réel quelconque. Il est vraisemblable que ce principe puisse être formalisé dans un contexte assez général. Nous nous contentons ici de le mettre en œuvre dans trois cas particuliers importants de la littérature.

Le premier exemple est celui de la suite de Newman-Coquet

$$c_n = (-1)^{\sigma(3n)}. \tag{1.8}$$

Coquet [7] établit la formule sommatoire

$$\sum_{m<n} c_m = n^\vartheta G_0\Big(\frac{\log n}{\log 4}\Big) + \tfrac{1}{3}\eta(n), \tag{1.9}$$

où G_0 est continue et 1-périodique, et où l'on a posé

$$\vartheta := \frac{\log 3}{\log 4}, \qquad \eta(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{\sigma(3n-3)} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous montrons, directement à l'aide de (1.9) et sans utiliser l'expression de G_0, le résultat suivant, qui est d'ailleurs implicitement contenu dans la preuve de Coquet de la non-dérivabilité de G_0.

Théorème 1. *La fonction G_0 n'est dérivable pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$G_0(x+h) - G_0(x) = \Omega\big(|h|^\vartheta\big) \qquad (h \to 0). \tag{1.10}$$

Nous considérons ensuite la suite de Rudin-Shapiro

$$r_n := (-1)^{e(n)}, \quad \text{avec} \quad e(n) := \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} \quad \text{si} \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j 2^j.$$

Brillhart, Erdős et Morton établissent dans [2] la formule sommatoire

$$\sum_{m<n} r_m = \sqrt{n}\, G_1\Big(\frac{\log n}{\log 4}\Big), \tag{1.11}$$

où G_1 est 1-périodique, bornée et continue, et ils prouvent que G_1 n'est dérivable en aucun point x normal en base 4. Dans [12], Dumont et Thomas montrent que cette dernière restriction est inutile. Notre approche directe fonctionne ici très simplement et fournit le résultat suivant.

Théorème 2. *La fonction G_1 n'est dérivable pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$G_1(x+h) - G_1(x) = \Omega\big(\sqrt{|h|}\big) \qquad (h \to 0). \tag{1.12}$$

La troisième application concerne les *suites digitales*, introduites par Cateland [5], et qui sont une généralisation de la somme des chiffres en base q. Pour $q \geqslant 2$, $\ell \geqslant 1$, notons $E(q,\ell)$ l'ensemble des ℓ-uples $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{\ell-1})$ avec $\varepsilon_j \in \{0, \ldots, q-1\}$ pour tout j. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j(n) q^j$ le développement de n en base q et l'on pose

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k(n) := \big(\varepsilon_k(n), \ldots, \varepsilon_{k+\ell-1}(n)\big) \in E(q,\ell) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

On note encore

$$\chi_k(n;\boldsymbol{\varepsilon}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_k(n) = \boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_k(n) \neq \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad \big(\boldsymbol{\varepsilon} \in E(q,\ell)\big), \qquad \varrho(n;\boldsymbol{\varepsilon}) := \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(n;\boldsymbol{\varepsilon}),$$

avec la convention $\varrho(n;\mathbf{0}) = 1$ pour tout n. La fonction $\varrho(n;\boldsymbol{\varepsilon})$ est donc égale au nombre d'occurrences du mot $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans la représentation q-adique de n. Etant donnée une fonction $F : E(q,\ell) \to \mathbb{C}$ telle que $F(\mathbf{0}) = 0$, on définit une suite digitale $\{u_F(n)\}_{n=0}^{\infty}$ par la formule

$$u_F(n) = \sum_{k=0}^{\infty} F\big(\boldsymbol{\varepsilon}_k(n)\big) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in E(q,\ell)} F(\boldsymbol{\varepsilon}) \varrho(n;\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{1.13}$$

On retrouve la suite $\sigma_q(n)$ en choisissant $\ell = 1$ et F égale à l'identité. Cateland a établi, par la méthode de Delange, la formule sommatoire générale

$$\sum_{m<n} u_F(m) = A_F n \log n + n G_F\Big(\frac{\log n}{\log q}\Big) + \delta_F(n) \tag{1.14}$$

avec

$$A_F := \frac{1}{q^\ell \log q} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in E(q,\ell)} F(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

et où G_F est continue et 1-périodique, et δ_F est $q^{\ell-1}$-périodique. Nous donnons une preuve assez simple de ce résultat à la section 3. Notre objectif principal consiste à déduire de (1.14) le résultat suivant de non-dérivabilité, qui étend optimalement celui de Cateland. Comme nous le verrons, la démonstration, reposant sur le principe énoncé plus haut, est extrêmement simple.

Théorème 3. *Soient $q \geqslant 2$, $\ell \geqslant 1$, $F : E(q,\ell) \to \mathbb{C}$ et $\{u_F(n)\}_{n=0}^{\infty}$ la suite digitale correspondante. Une condition nécéssaire et suffisante pour que la fonction 1-périodique G_F associée soit nulle part dérivable est qu'il existe un entier $a \geqslant 1$ tel que $u_F(q^{\ell-1}a) \neq 0$.*

Le résultat de Cateland était conditionnel à l'hypothèse $A_F \neq 0$. Lorsque $u_F(q^{\ell-1}a) = 0$ $(a \geqslant 1)$, u_F est périodique, $A_F = 0$, et la fonction G_F est constante.

L'auteur tient ici à remercier Jean-Paul Allouche pour son aide précieuse lors de la préparation de cet article.

2. Démonstration des théorèmes 1, 2 et 3

Prouvons d'abord les théorèmes 1 et 2. Soit $x \in [0,1[$. Nous écrivons le développement 4-adique de 4^x, soit

$$4^x = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j 4^{-j},$$

avec $0 \leqslant \varepsilon_j \leqslant 3$ pour tout j et $\varepsilon_j \neq 3$ pour une infinité d'indices j. Ensuite, nous définissons, pour $k \geqslant 0$, les réels x_k, y_k et l'entier n_k par les formules

$$n_k = 4^{x_k+k} = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j 4^{k-j}, \qquad n_k + 1 = 4^{y_k+k}. \tag{2.1}$$

En écrivant (1.9) pour $n = n_k$ et $n = n_k + 1$ et en effectuant la différence, il vient

$$c_{n_k} = (n_k+1)^\vartheta G_0(y_k) - n_k^\vartheta G_0(x_k) + \tfrac{1}{3}\big(\eta(n_k+1) - \eta(n_k)\big),$$

d'où

$$n_k^\vartheta \big\{G_0(y_k) - G_0(x_k)\big\} = c_{n_k} - \tfrac{1}{3}\big\{\eta(n_k+1) - \eta(n_k)\big\} + O(n_k^{\vartheta-1}). \tag{2.2}$$

Compte tenu de la définition de $\eta(n)$, il est clair que le second membre est de valeur absolue $\gg 1$. Par ailleurs, il découle immédiatement de (2.1) que

$$n_k \asymp 4^k \asymp (y_k - x_k)^{-1}. \tag{2.3}$$

Il suit

$$\big|G_0(y_k) - G_0(x_k)\big| \gg (y_k - x_k)^\vartheta.$$

Comme

$$\max\big\{|x - x_k|, |x - y_k|\big\} \ll 4^{-k}, \tag{2.4}$$

cela contredit

$$G_0(x+h) - G_0(x) = o(|h|^\vartheta) \quad (h \to 0),$$

et partant implique la conclusion requise (1.10) du théorème 1.

La situation est encore plus simple pour le théorème 2. On obtient parallèlement à (2.2)

$$\sqrt{n_k}\big\{G_1(y_k) - G_1(x_k)\big\} = r_{n_k} + O(1/\sqrt{n_k}), \tag{2.5}$$

d'où par (2.3), puisque $|r_{n_k}| = 1$,

$$\big|G_1(y_k) - G_1(x_k)\big| \gg \sqrt{y_k - x_k}.$$

Grâce à (2.4), cela implique (1.12) et établit ainsi le théorème 2.

La même approche fonctionne encore pour établir le théorème 3. L'hypothèse $F \neq 0$ implique $u_F \neq 0$, et, plus précisément, implique l'existence d'un entier a, $1 \leqslant a < q^\ell$, tel que $u_F(a) \neq 0$. En effet, notant $F^*(h) := F(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\ell-1})$ pour $h = \sum_{r=0}^{\ell-1} \varepsilon_r q^r$, on a

$$u_F(j) = \sum_{h=0}^{q^\ell - 1} \alpha_{jh} F^*(h) \quad (1 \leqslant j < q^\ell)$$

avec $\alpha_{jh} \geqslant 1$ si j est de la forme $j = a + q^s h$ avec $s \geqslant 0$, $a < q^s$, et $\alpha_{jh} = 0$ dans le cas contraire. En particulier, on a $\alpha_{jj} = 1$ pour $1 \leqslant j < q^\ell$ et $\alpha_{jh} = 0$ si $h > j$. La matrice carrée (α_{jh}) est donc triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale principale. Par conséquent, elle est inversible et cela établit la propriété indiquée.

Cependant, lorsque $\ell \geqslant 2$, on peut avoir $u_F(q^{\ell-1}a) = 0$ pour tout $a \geqslant 1$ sans que u_F soit identiquement nulle : pour $\ell = q = 2$ et $F(1,0) = -F(0,1) = 1,\ F(1,1) = 0$, u_F est la fonction indicatrice des nombres impairs. On peut vérifier facilement que, dans un tel cas, $A_F = 0$ et la fonction G_F est constante.

Soit alors $a \geqslant 1$. Nous allons montrer que si G_F est dérivable en un point $x \in [0, 1[$ alors $u_F\big(q^{\ell-1}a\big) = 0$. On écrit les développements q-adiques

$$a = \sum_{r=0}^{m(a)} \varepsilon_r(a) q^r, \qquad q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j q^{-j},$$

et l'on pose

$$L := 2\ell + m(a), \quad n_k = q^{x_k + L + k} = q^L \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j q^{k-j}, \quad n_k + 1 = q^{y_k + L + k}. \tag{2.6}$$

On a

$$n_k \asymp q^k \asymp (y_k - x_k)^{-1}, \qquad \max\big\{|x - x_k|, |x - y_k|\big\} \ll q^{-k}. \tag{2.7}$$

Ici et dans la suite de cette démonstration les constantes implicites peuvent dépendre de a ou F mais pas de k.

En appliquant (1.14) avec n et $n+1$ et en faisant la différence, on obtient lorsque $n \equiv 0 \pmod{q^{\ell-1}}$

$$\begin{aligned} u_F(n) =& A_F \log n + n\Big\{G_F\Big(\frac{\log(n+1)}{\log q}\Big) - G_F\Big(\frac{\log n}{\log q}\Big)\Big\} \\ &+ A_F(n+1)\log(1+1/n) + G_F\Big(\frac{\log(n+1)}{\log q}\Big) + \delta_F(1) - \delta_F(0), \end{aligned} \tag{2.8}$$

où l'on a tenu compte de la périodicité de δ_F. Substituons $n = n_k$ dans cette relation. La périodicité de G_F nous permet de remplacer $G_F\big(\log(n+1)/\log q\big)$ par $G_F(y_k)$ et $G_F(\log n/\log q)$ par $G_F(x_k)$, soit

$$\begin{aligned} u_F(n) =& A_F \log n + n\big\{G_F(y_k) - G_F(x_k)\big\} \\ &+ A_F(n+1)\log(1+1/n) + G_F(y_k) + \delta_F(1) - \delta_F(0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si G_F est dérivable au point x, on a lorsque $k \to +\infty$

$$G_F(x_k) - G_F(x) = (x_k - x)G'_F(x) + o(x_k - x) = (x_k - x)G'_F(x) + o(1/n_k),$$

et similairement

$$G_F(y_k) - G_F(x) = (y_k - x)G'_F(x) + o(1/n_k).$$

Il suit

$$n_k\big\{G_F(y_k) - G_F(x_k)\big\} = n_k(y_k - x_k)G'_F(x) + o(1) = \frac{G'_F(x)}{\log q} + o(1).$$

En reportant dans (2.9), on obtient

$$u_F(n_k) = A_F \log n_k + A_F + \frac{G'_F(x)}{\log q} + G(x) + \delta_F(1) - \delta_F(0) + o(1),$$

et donc

$$u_F(n_k) = kA_F \log q + B + o(1), \tag{2.10}$$

avec $B := A_F\big\{1 + (x + L)\log q\big\} + G'_F(x)/\log q + G_F(x) + \delta_F(1) - \delta_F(0)$.

Substituons maintenant $n = n_k + q^{\ell-1}a$ dans (2.8). Les calculs qui précédent restent valables *mutatis mutandis*, et l'on obtient

$$u_F\big(n_k + q^{\ell-1}a\big) = kA_F \log q + B + o(1). \tag{2.11}$$

Or il découle immédiatement des définitions de u_F et L que

$$u_F\big(n_k + q^{\ell-1}a\big) = u_F(n_k) + u_F\big(q^{\ell-1}a\big).$$

Les relations (2.10) et (2.11) impliquent donc par différence

$$u_F\big(q^{\ell-1}a\big) = o(1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_F\big(q^{\ell-1}a\big) = 0.$$

Cela termine la démonstration du théorème 3.

3. Preuve de la formule de Cateland par intégration complexe

Nous nous proposons ici de donner une démonstration de la formule (1.14) en utilisant la formule de Perron. La démarche, semblable à celle de Flajolet *et al.* dans [15], possède le double avantage de ne nécessiter que quelques calculs assez simples et de fournir directement les développements de Fourier des fonctions G_F et δ_F.

Au vu de (1.13), nous pouvons nous restreindre à estimer la valeur moyenne de $\varrho(n,\boldsymbol{\varepsilon})$ pour $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{\ell-1}) \in E(q,\ell)$ fixé. Posons $h := \sum_{j=0}^{\ell-1}\varepsilon_j q^j$ et

$$V(n) := \sum_{0\leqslant m<n} \varrho(m;\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{0\leqslant m<n} \chi_k(m;\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{3.1}$$

La somme intérieure est égale au nombre d'entiers $m \in [0, n-1]$ qui sont de la forme $m = a + q^k h + q^{k+\ell} b$ avec $0 \leqslant a < q^k$, $b \geqslant 0$. Elle vaut donc

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant a<q^k}\Big(1+\Big[\frac{n-(hq^k+a+1)}{q^{k+\ell}}\Big]\Big) &= \sum_{0\leqslant a<q^k}\int_a^{a+1}\Big(1+\Big[\frac{n-(hq^k+t)}{q^{k+\ell}}\Big]\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{q^k}\Big(1+\Big[\frac{n-(hq^k+t)}{q^{k+\ell}}\Big]\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= q^k\int_h^{h+1}\Big(1+\Big[\frac{n}{q^{k+\ell}}-\frac{t}{q^\ell}\Big]\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour établir la première égalité, nous avons utilisé le fait que l'intégrande du second membre est constante sur chaque intervalle $]a, a+1]$.

Pour évaluer la partie entière de la dernière intégrale, nous introduisons la fonction zêta de Hurwitz, définie, pour chaque valeur du paramètre $\alpha \in]0,1]$, par la formule

$$\zeta(s;\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s} \qquad (\Re e\, s > 1),$$

et prolongée en une fonction méromorphe dans le plan complexe tout entier ayant pour unique singularité un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. On a pour $x > 0$

$$1 + [x-\alpha] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta(s;\alpha)x^s s^{-1}\,\mathrm{d}s \qquad (c > 1),$$

sauf si $x \in \alpha + \mathbb{Z}$, où le membre de droite vaut $[x-\alpha] + \frac{1}{2}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}V(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k\int_h^{h+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\zeta(s;t/q^\ell)\Big(\frac{n}{q^{k+\ell}}\Big)^s s^{-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Big(\frac{n}{q^\ell}\Big)^s\frac{1}{s(1-q^{1-s})}\int_h^{h+1}\zeta(s;t/q^\ell)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Big(\frac{n}{q^\ell}\Big)^s\frac{q^\ell Z(s-1;h/q^\ell)}{s(1-s)(1-q^{1-s})}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$Z(s;t) := \zeta(s;t+1/q^\ell) - \zeta(s;t) = s\int_0^{1/q^\ell} \zeta(s+1;t+u)\,\mathrm{d}u.$$

Déplaçons maintenant l'abscisse d'intégration vers la gauche jusqu'à l'axe $\Re e\, s = \frac{1}{2}$. La contribution du pôle double en $s=1$ vaut

$$\frac{n}{\log q}\Big\{Z(0;h/q^\ell)\Big(\log(n/q^\ell) - 1 + \tfrac{1}{2}\log q\Big) + Z'(0,h/q^\ell)\Big\}.$$

La contribution des pôles simples $p_k := 1 + 2\pi k i/\log q$ $(k \neq 0)$ est égale à

$$n\sum_{k\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{Z(p_k-1;h/q^\ell)}{p_k(1-p_k)\log q} e\Big(k\frac{\log n}{\log q}\Big) = ng_h\Big(\frac{\log n}{\log q}\Big) \qquad \text{(disons)},$$

avec la notation traditionnelle $e(t) := \exp\{2\pi i t\}$. La fonction g_h est 1-périodique, et sa série de Fourier, explicitement donnée ci-dessus, est absolument convergente. En particulier, g_h est continue.

On a

$$Z(0;h/q^\ell) = q^{-\ell}, \quad \zeta'(0;\alpha) = \log\Big(\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}\Big), \quad Z'(0;\alpha) = \log\Big(\Gamma(\alpha+q^{-\ell})/\Gamma(\alpha)\Big).$$

Il suit

$$V(n) = \frac{n}{q^\ell \log q}\Big\{\log n - 1 + \log\Big(\frac{\Gamma((h+1)/q^\ell)}{\Gamma(h/q^\ell)q^{\ell-1/2}}\Big)\Big\} + ng_h\Big(\frac{\log n}{\log q}\Big) + \delta_h(n), \tag{3.2}$$

avec

$$\delta_h(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Big(\frac{n}{q^\ell}\Big)^s \frac{q^\ell Z(s-1;h/q^\ell)}{s(1-s)(1-q^{1-s})}\,\mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

Nous évaluons $\delta_h(n)$ en faisant appel à l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Hurwitz, soit

$$\zeta(s;\alpha) = \Gamma(1-s)\sum_{r\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} (2r\pi i)^{s-1} e(r\alpha) \qquad (\Re e\, s < 0),$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale. On en déduit, en posant $\alpha = h/q^\ell$,

$$Z(s-1;\alpha) = -s(1-s)\Gamma(-s)\sum_{r\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} (2r\pi i)^{s-2} e(r\alpha)\{e(r/q^\ell) - 1\}.$$

Reportons dans (3.3) en développant $1/(q^{1-s}-1) = \sum_{k=1}^\infty q^{-k(1-s)}$. Il vient

$$\delta_h(n) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{q^\ell e(r\alpha)\{e(r/q^\ell)-1\}}{-4\pi^2r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i q^k} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(-s)(2\pi rniq^{k-\ell})^s \,\mathrm{d}s.$$

Par la formule de Mellin inverse

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(-s)x^s \,\mathrm{d}s = e^{-x}-1 \qquad (x>0)$$

(où le terme -1 provient du pôle de Γ à l'origine), on obtient

$$\delta_h(n) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{q^\ell e(rh/q^\ell)\{e(r/q^\ell)-1\}}{4\pi^2r^2q^k}\{1-e(-rnq^{k-\ell})\}$$

Cela implique que $\delta_h(n)$ est bien une fonction $q^{\ell-1}$-périodique de n et, compte tenu de (3.2), achève ainsi la démonstration.

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche & J. Shallit, The ring of k-regular sequences, *Theor. Comp. Sci.* **98** (1992), 163–187.

[2] J. Brillhart, P. Erdős & P. Morton, On sums of Rudin–Shapiro coefficients II,*Pac. J. Math.* **107** (1983), 39–69.

[3] J. Brillhart & P. Morton, Über Summen von Rudin–Shapiroschen Koeffizienten, *Ill. J. Math.* **22** (1978), 126–148.

[4] L. E. Bush, An asymptotic formula for the average sums of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly* **47** (1940), 154–156.

[5] E. Cateland, Suites digitales et suites k régulières, *Thèse*, Université de Bordeaux 1, 1992.

[6] P. Cheo & S. Yien, A problem on the K-adic representation of positive integers, *Acta Math. Sinica* **5** (1955), 433–438.

[7] J. Coquet, A summation formula related to the binary digits, *Invent. Math.* **73** (1983), 107–115.

[8] J. Coquet, Power sums of digital sums, *J. Number Theory* **22** (1986), 161–176.

[9] J. Coquet & P. van den Bosch, A summation formula involving Fibonacci digits, *J. Number Theory* **22** (1986), 139–146.

[10] H. Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", *Ens. Math.* **21** (1975), 31–47.

[11] J.-M. Dumont, Formules sommatoires et systèmes de numération liés aux substitutions, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1987/88), Exposé n° 39.

[12] J.-M. Dumont & A. Thomas, Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions, *Theor. Comp. Sci.* **65** (1989), 153–169.

[13] J.-M. Dumont & A. Thomas, Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet, *J. Number Theory* **39** (1991), 351–366.

[14] P. Flajolet & L. Ramshaw, A note on Gray code and odd-even merge, *SIAM J. Comp.* **9** (1980), 142–158.

[15] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhoffer, H. Prodinger & R. Tichy, Mellin transforms and asymptotics : digital sums, *Theoret. Comput. Sci.* **123** (1994), no. 2, 291–314.

[16] D. M. Foster, Estimates for a remainder term associated with the sum of digits function, *Glasgow Math. J.* **29** (1987), 109–129.
[17] P. J. Grabner & R. F. Tichy, Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences, *J. Number Theory* **36** (1990), 160–169.
[18] H. Harboth, Number of odd binomial coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* **63** (1977), 19–22.
[19] J. Honkala,On number systems with negative digits, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A. I. Mathematica* **14** (1989), 149–156.
[20] R. E. Kennedy & C. N. Cooper, An extension of a theorem by Cheo and Yien concerning digital sums, *Fibonacci Quarterly* **29** (1991), 145–149.
[21] P. Kirschenhoffer, Subblock occurrences in the q-ary representation of n, *Siam J. Alg. Disc. Meth.* **4** (1983), 231–236.
[22] P. Kirschenhoffer & H. Prodinger, Subblock occurrences in positional number systems and Gray code representation, *J. Inf. Opt. Sci.* **5** (1984), 29–42.
[23] P. Kirschenhoffer & R. F. Tichy, On the distribution of digits in Cantor representations of integers, *J. Number Theory* **18** (1984), 121–134.
[24] G. Larcher & R. F. Tichy, Some number-theoretical properties of generalized sum-of-digit functions, *Acta Arith.* **52** (1989), 183–196.
[25] M. D. Mac Ilroy, The number of 1's in binary integers : bounds and extremal properties, *SIAM J. Comput.* **3** (1974), 225–261.
[26] L. Mirsky, A theorem on representations of integers in the scale of r, *Scripta Math.* **15** (1949), 11–12.
[27] D. J. Newman, On the number of binary digits in a multiple of three, *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), 719–721.
[28] A. Pethö & R. F. Tichy, On digit expansions with respect to linear recurrences, *J. Number Theory* **33** (1989), 243–256.
[29] H. Prodinger, Generalizing the "sum of digits" function, *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* **3** (1982), 35–42.
[30] P. Shiu & A. H. Osbaldestin, A correlated digital sum problem associated with sums of three squares, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 369–374.
[31] A. H. Stein, Exponential sums related to binomial coefficient parity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80** (1980), 526–530.
[32] A. H. Stein, Exponential sums of an iterate of the binary sum of digit function, *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), 309–315.
[33] A. H. Stein, Exponential sums of sum-of-digit functions, *Ill. J. Math.* **30** (1986), 660–675.
[34] A. H. Stein, Exponential sums of digit counting functions, in : J.M. de Koninck et C. LeVesque (eds.), *Théorie des Nombres* (Québec 5–18/7/87), 861–868, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1989.
[35] K. B. Stolarsky, Digital sums and binomial coefficients, *Notices Amer. Math. Soc.* **22** (1975), A 669, Abstract # 728–A7.
[36] K. B. Stolarski, Power and exponential sums related to binomial digit parity, *SIAM J. Appl. Math.* **32** (1977), 717–730.
[37] J. R. Trollope, Generalized bases and digital sums, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 690–694.
[38] J. R. Trollope, An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.* **41** (1968), 21–25.

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France