Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 5 (2000), 1445–1504.

Sur certaines équations fonctionnelles arithmétiques

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum

Sommaire

Mots-clefs : Fonctions arithmétiques additives ; fonctions arithmétiques multiplicatives ; fonction de Gutman–Ivić–Matula ; graphes ; répartition des nombres premiers ; équations fonctionnelles approchées ; inégalité de Berry–Esseen ; transformée de Fourier–Stieltjes ; fonctions caractéristiques.
Classification math. : 11N37, 05C35, 05C90, 11N60, 11N64.

1. Introduction

Cet article a pour objet l'étude des propriétés de régularité des éléments d'une certaine classe de fonctions arithmétiques complètement additives, dont la fonction de Gutman–Ivić–Matula,(1) qui a motivé notre travail, est le prototype. Elle est définie comme l'unique fonction complètement additive vérifiant la relation

$$f(p_k) = 1 + f(k) \qquad (k \geqslant 1), \tag{1·1}$$

où p_k désigne le k-ième nombre premier. Nous verrons plus loin comment cette étude peut être plongée dans la problématique générale de la description d'une fonction arithmétique additive ou multiplicative pour laquelle $f(p_k)$ est une fonction suffisamment régulière de $f(k)$.

La fonction GIM trouve son origine dans une modélisation mathématique utilisée en chimie organique et introduite par Matula en 1968 [M68]. Les molécules d'alcanes non-cycliques étant représentables par des arbres, Matula définit une correspondance bijective $M : \mathcal{A} \to \mathbb{N}^*$ de l'ensemble des arbres dans celui des entiers naturels. Sa construction est récursive : l'arbre trivial T_1 composé d'un seul sommet a pour image $M(T_1) = 1$; à un arbre générique A, déterminé par les sous-arbres $A_1, \ldots, A_k$ issus de sa racine, on associe ensuite le nombre $M(A) = \prod_{j=1}^k p_{m_j}$ où les m_j sont définis par $M(A_j) = m_j\,(1 \leqslant j \leqslant k)$. Ainsi, l'unique arbre T_2 composé de deux sommets satisfait-il $M(T_2) = p_1 = 2$ alors que l'arbre T_3 composé de trois sommets alignés est tel que $M(T_3) = p_2 = 3$ et que l'arbre T_3', composé de trois sommets en triangle, vérifie $M(T_3') = p_1^2 = 4$.

Comme le note Matula [M68], on peut représenter par un arbre A toute molécule d'alcane α non cyclique, à condition de choisir préalablement un atome de carbone particulier. L'application $\alpha \mapsto M(A)$ représente alors un codage des molécules d'alcanes par des nombres entiers. Elk [E89], [E90] a étendu ce type de représentation « mono-numérique » des structures chimiques à une vaste classe de composés organiques. Gutman et Yeh ont montré dans [GY93] comment l'on peut déduire certaines propriétés spécifiques des arbres à partir de leur nombre de Matula. Le lecteur trouvera dans l'article de Gutman et Ivić [GI96] un survol de l'histoire et des progrès récents de la théorie des nombres de Matula.

Gutman, Ivić et Elk [GIE93] ont renouvelé l'étude de cette correspondance en introduisant formellement l'application qui à $M(A)$ associe le nombre $N(\alpha)$ de carbones de α, mettant ainsi en évidence la fonction GIM, qui satisfait $N(\alpha) = 1 + f(M(A))$ et dont la très simple définition récursive (1·1) motive l'intérêt intrinsèque. Dans un travail ultérieur [GI94], Gutman et Ivić ont établi l'encadrement essentiellement optimal (2)

$$\frac{\log n}{\log_2 n} \leqslant f(n) \leqslant \frac{3}{\log 5} \log n \qquad (n \geqslant 7),$$

1. Cette fonction est désignée dans la suite sous le nom de *fonction GIM*.

2. Ici et dans la suite, nous désignons par $\log_2$ la deuxième itérée de la fonction logarithme.

où les bornes constituent les ordres extrémaux de f — autrement dit, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels elles sont asymptotiquement atteintes.

Nous introduisons un espace fonctionnel qui contient simultanément la fonction GIM et la fonction logarithme. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, nous désignons par $\boldsymbol{\mathcal{E}}(a, b)$ la classe des fonctions arithmétiques à valeurs complexes F qui sont complètement additives et satisfont à

$$\begin{aligned} r_k = r_k(F) &:= F(p_k) - F(k) - b \log_2 k - a \\ &\ll \log_2 k / \log k \end{aligned} \qquad (k \geqslant 2).^{(3)} \tag{1·2}$$

Il est à noter, en toute généralité, qu'une fonction complètement additive F est entièrement définie par les données du nombre $F(2)$ et de la suite $\{r_k(F)\}_{k=2}^{\infty}$. La fonction GIM est l'unique élément f de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(1, 0)$ tel que $f(2) = 1$ et $r_k(f) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Il découle immédiatement du théorème des nombres premiers que le logarithme appartient à $\boldsymbol{\mathcal{E}}(0, 1)$.

La classe $\boldsymbol{\mathcal{E}} := \cup_{a,b} \boldsymbol{\mathcal{E}}(a, b)$ est un espace vectoriel dont la fonction logarithme est, en un certain sens, un élément maximal : on a $F(n) \ll \log n$ pour toute fonction F de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — cf. Lemme 2.1 *infra*.

Une famille remarquable d'éléments de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est constituée par la suite $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(0, 0)$ définies par

$$\varphi_j(2) := \delta_{1j}, \qquad r_k(\varphi_j) := \delta_{kj} \quad (j \geqslant 1,\ k \geqslant 2), \tag{1·3}$$

où δ_{kj} désigne le symbole de Kronecker. Le nombre $\varphi_j(n)$ représente donc le nombre de sous-arbres codés par j apparaissant dans l'arbre codé par n. Ainsi, $\varphi_1(n)$ dénombre les feuilles de l'arbre codé par n. Nous remarquons que $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une famille totale de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, au sens où l'on a, pour toute fonction $F \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$,

$$F(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \big\{F(p_j) - F(j)\big\} \varphi_j(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Réciproquement, une série formelle $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j$ définit un élément de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(a, b)$ si, et seulement si, l'on a

$$\alpha_j = a + b \log_2 j + O(\log_2 j / \log j) \qquad (j \geqslant 2).$$

La fonction GIM, par exemple, vérifie $f = \sum_{j \geqslant 1} \varphi_j$.

La méthode que nous développons pour évaluer les moments des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est fondée sur l'observation que ces quantités satisfont des équations

3. Ici et dans tout l'article la notation de Vinogradov $f \ll g$ est employée pour signifier que $|f| \leqslant C|g|$ pour une constante convenable C, qui peut être absolue ou dépendre de certains paramètres — auquel cas la dépendance pourra être indiquée en indice. La notation $f \asymp g$ signifie que $f \ll g$ et $g \ll f$ ont lieu simultanément.

fonctionnelles approchées. Nous établissons à cet effet, au Théorème 1.1, un résultat général de nature taubérienne, possédant un intérêt intrinsèque dépassant largement le cadre de l'étude de l'espace $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Nous obtenons une formule asymptotique pour la valeur moyenne d'une fonction arithmétique quelconque g en fonction de la quantité

$$R(x;g) := \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) - \frac{1}{x}\sum_{p_k\leqslant x} g(k)\Big[\frac{x}{p_k}\Big] \tag{1·4}$$

sous la seule hypothèse que l'on a, pour une constante convenable $\alpha > 0$,

$$g(n) \ll (\log n)^\alpha. \tag{1·5}$$

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions $U : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ qui sont à variation bornée sur tout intervalle borné. Nous définissons deux transformations sur $\mathcal{V}$ par les formules

$$U^\dagger(x) := \sup_{1\leqslant t\leqslant x} |U(t)|, \qquad \mathfrak{T}U(x) := U(\mathrm{e}) + \int_{\mathrm{e}}^{\max(\mathrm{e},x)} \frac{\mathrm{d}U(t)}{\log t}, \tag{1·6}$$

et nous posons, sous réserve d'existence,

$$\overline{U}(x) := U(x) - \lim_{x\to+\infty} U(x), \qquad \text{d'où} \quad \overline{\mathfrak{T}U}(x) = -\int_{\max(x,\mathrm{e})}^{\infty} \frac{\mathrm{d}U(t)}{\log t}.$$

Une intégration par parties permet d'écrire

$$\mathfrak{T}U(x) = \frac{U(x)}{\log x} + \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{U(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (x \geqslant \mathrm{e}). \tag{1·7}$$

À fins de références ultérieures, nous observons dès à présent qu'une condition suffisante pour que $\mathfrak{T}U(x)$ converge à l'infini est :

$$U(x) = o(\log x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{U(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.} \tag{1·8}$$

Dans ce cas, on a

$$\overline{\mathfrak{T}U}(x) = \frac{U(x)}{\log x} - \int_{x}^{\infty} \frac{U(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (x \geqslant \mathrm{e}). \tag{1·9}$$

Nous posons, pour toute fonction arithmétique g et tout entier $k \geqslant 1$,

$$M_k(x;g) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} g(n)^k. \tag{1·10}$$

Nous établissons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soit g une fonction arithmétique vérifiant (1·5).*

(i) *Si $\mathfrak{T}R(x;g)$ tend vers une limite finie lorsque $x \to \infty$, il existe une constante $\Phi_1(g)$ telle que*

$$M_1(x;g) = x\log(x\log x)\Big\{\Phi_1(g) + \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + O\Big(\frac{\varepsilon(x)\log_2 x}{\log x}\Big)\Big\} \tag{1·11}$$

avec $\varepsilon(x) := \sup_{t\geqslant\sqrt{x}} \big|\overline{\mathfrak{T}R}(t;g)\big| + 1/\log x = o(1)$.

(ii) *Si* $\mathfrak{T}R(x;g)$ *ne possède pas de limite finie lorsque* $x\to\infty$ *et si*

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} R^\dagger(t;g)\frac{\log_2 t}{t(\log t)^3}\,\mathrm{d}t<\infty, \tag{1·12}$$

il existe une constante $K=K(g)$ *telle que*

$$M_1(x;g)=x\log x\Big\{\mathfrak{T}R(x;g)+K+O\Big(\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{R^\dagger(t;g)}{t(\log t)^2}\frac{\log_2(x+t)}{\log(x+t)}\,\mathrm{d}t\Big)\Big\}. \tag{1·13}$$

(iii) *Si* $\mathfrak{T}R(x;g)$ *ne possède pas de limite finie quand* $x\to\infty$ *et si*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathrm{e}}^{x} R^\dagger(t;g)\frac{\log_2 t}{t(\log t)^3}\,\mathrm{d}t=\infty, \tag{1·14}$$

on a

$$M_1(x;g)=x\log x\Big\{\mathfrak{T}R(x;g)+O\Big(\int_{\mathrm{e}}^{x^2} R^\dagger(t;g)\frac{\log_2 t}{t(\log t)^3}\,\mathrm{d}t\Big)\Big\}. \tag{1·15}$$

Une simple application du théorème de Lebesgue permet de montrer que, sous l'hypothèse (1·12), le terme d'erreur de (1·13) tend vers 0 lorsque $x\to\infty$. On remarque que celui de (1·15) peut dépasser le terme principal lorsque $R(x;g)$ est très oscillante.

Ainsi que nous l'avons mentionné plus haut, le Théorème 1.1 constitue l'outil essentiel de notre méthode itérative pour estimer la moyenne et, plus généralement, tous les moments centrés d'une fonction de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Ces résultats sont établis aux paragraphes 5 et 6. La démonstration repose de manière fondamentale sur l'observation que, pour chaque entier $k\geqslant 1$, la quantité $R(x;f^k)$ définie par (1·4) peut être évaluée asymptotiquement dès que l'on dispose d'approximations convenables pour les moments d'ordres strictement inférieurs à k. Une telle estimation, facile lorsque $k=1$, est obtenue dans le cas général au moyen d'une récurrence simple dans son principe mais dont la mise en œuvre est passablement technique.

Le Théorème 1.1(i) implique l'existence d'une constante $\Phi_1(f)$ telle que

$$M_1(x;f)=\Phi_1(f)x\log x+O(x\log_2 x)\qquad (f\in\boldsymbol{\mathcal{E}}).$$

Cette première estimation permet d'opérer un recentrage de f dans $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Nous posons à cet effet

$$f_0=f-\Phi_1(f)\log. \tag{1·16}$$

Nous évaluons ensuite les moments centrés $M_k(x;f_0)/x$ d'ordre arbitraire k. Nous obtenons le résultat suivant où l'on note

$$\mu_\ell:=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^{2\ell}\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{2\pi}}=\frac{(2\ell)!}{2^\ell\ell!} \tag{1·17}$$

le moment d'ordre 2ℓ de la loi normale. Nous faisons également usage d'une version « triangulaire » du symbole de Kronecker, soit

$$\delta_{ji}^{+} := \begin{cases} 1 & \text{si } j \geqslant i, \\ 0 & \text{si } j < i. \end{cases} \tag{1·18}$$

Théorème 1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in \boldsymbol{\mathcal{E}}(a, b)$.*
(i) *Posant $b_0 := b - \Phi_1(f)$ et $E_1(X) := -b_0X - (b_0 + a)$, on a pour $x \geqslant 3$*

$$M_1(x; f_0) = xE_1(\log_2 x) + O\Big(\frac{x \log_2 x}{\log x}\Big). \tag{1·19}$$

(ii) *Il existe une constante $\Phi_2 = \Phi_2(f)$ telle que l'on ait, pour $x \geqslant 3$,*

$$M_2(x; f_0) = \Phi_2 x \log(x \log x) + xB_2(\log_2 x) + O\Big(\frac{x(\log_2 x)^2}{\sqrt{\log x}}\Big), \tag{1·20}$$

où l'on a posé $B_2(X) := E_1(X)^2 - b_0^2 = b_0^2X^2 + 2b_0(a + b_0)X + (a^2 + 2b_0a)$.
(iii) *Il existe une constante $b_1 = b_1(f)$ telle que, posant*

$$E_{2\ell-1}(X) := E_1(X) + (\ell - 1)b_1, \qquad E_{2\ell}(X) = 1 \qquad (\ell \geqslant 1),$$

on ait, pour tous entiers $\ell \geqslant 1$, $h = 0$ ou 1, l'estimation asymptotique

$$M_{2\ell-h}(x; f_0) = \mu_\ell x(\Phi_2 \log x)^{\ell-h}\Big\{E_{2\ell-h}(\log_2 x) + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta^{+}_{\ell,2+h}}}{(\log x)^{1-h/3}}\Big)\Big\}. \tag{1·21}$$

Au sous-paragraphe 5.2, nous déduisons de (i) le résultat suivant, assez surprenant de prime abord.

Théorème 1.3. *Soit f une fonction arithmétique complètement additive. Si f est non identiquement nulle et satisfait pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ à $f(p_k) \geqslant f(k)$, alors on a*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \gg x \log x.$$

En particulier, la constante Φ_1 associée à la fonction GIM *est strictement positive.*

En correspondance privée, Ruzsa nous a communiqué une démonstration directe de ce résultat. Son approche peut être succinctement décrite de la façon suivante. Après avoir restreint, sans perte de généralité, l'étude au cas $f = \varphi_j$, définie en (1·3), il utilise l'additivité complète de f sous la forme

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s = \zeta(s) \sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} f(p)/p^{\nu s},$$

dont il déduit par dérivation

$$-\frac{F'(s)}{\zeta(s)}+\frac{F(s)\zeta'(s)}{\zeta(s)^2}\geqslant\sum_{k\geqslant 1}\frac{f(p_k)\log p_k}{p_k^s}\geqslant\sum_{k\geqslant 1}\frac{f(k)\log k}{k^s(p_k/k)^s}+O(1)\quad(s>1).$$

Un argument simple de troncature, utilisant la majoration du Lemme 2.1 et reposant sur l'inégalité $\mathrm{e}^{-u}\geqslant 1-u$, permet de montrer que le membre de droite est au moins égal à $F(s)+O\big(|\log(s-1)|/(s-1)\big)$. Une intégration fournit alors $F(s)\gg\zeta(s)^2$. Le résultat souhaité en découle grâce à l'observation $F(s)/\zeta(s) = \sum_p f(p)/p^s + O(1)$ et un nouvel appel à la majoration $f(p)\ll\log p$.

Dans la même veine que celle du Théorème 1.3, nous déduisons de (ii) que si $f_0\neq 0$, alors $\Phi_2(f)>0$.

Théorème 1.4. *Soit* $f\in\boldsymbol{\mathcal{E}}$. *Si l'on a* $M_2(x;f_0)=o(x\log x)$ *lorsque* $x\to\infty$, *alors* $f=\Phi_1(f)\log$.

La preuve est donnée au sous-paragraphe 5.4.

Soit $\mathbb{C}\log$ la droite vectorielle engendrée par la fonction logarithme. Lorsque $f\in\boldsymbol{\mathcal{E}}\smallsetminus\mathbb{C}\log$, les résultats précédents impliquent directement, grâce au théorème des moments, une estimation de la répartition limite des valeurs de la fonction centrée f_0, soit

$$F_N(z):=\frac{1}{N}\big|\big\{n\leqslant N: f_0(n)\leqslant z\sqrt{\Phi_2\log N}\big\}\big|=\Phi(z)+o(1)\tag{1·22}$$

lorsque $N\to\infty$, avec

$$\Phi(z):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau\qquad(z\in\mathbb{R}).$$

Cependant, l'uniformité en k des estimations de $M_k(N;f)$ et la qualité du terme résiduel en N fournies par la méthode ne permettent pas une grande précision sur le terme d'erreur de (1·22). Pour améliorer le résultat final, nous développons une autre approche, consistant à utiliser les informations obtenues sur les moments d'ordres 1 et 2 pour estimer la transformée de Fourier–Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\tau z}\,\mathrm{d}F_N(z)=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}e^{i\tau f_0(n)/\sqrt{\Phi_2\log N}}.\tag{1·23}$$

L'évaluation souhaitée pour $F_N(z)$ est ensuite déduite de celle de (1·23) par l'inégalité de Berry–Esseen.

Ici encore, nous plaçons le problème dans un contexte nettement plus général — à savoir l'étude de la valeur moyenne de fonctions complètement multiplicatives $h(n)$ de module au plus 1 pour lesquelles le rapport

$h(p_k)/h(k)$ possède certaines propriétés de régularité. L'application envisagée nécessite de pouvoir choisir

$$h(n) = h_N(n;\tau) = e^{i\tau f_0(n)/\sqrt{\Phi_2 \log N}} \qquad (n \geqslant 1). \tag{1·24}$$

Cela signifie que nous devons viser des estimations *effectives* de valeur moyenne, autrement dit que la fonction dont on étudie la moyenne sur les entiers n'excédant pas N doit être autorisée à dépendre de N.

Nous nous donnons donc dans la suite un nombre entier $N \geqslant 1$ et considérons une fonction complètement multiplicative h_N, de module au plus 1, dont nous cherchons à évaluer la fonction sommatoire

$$H_N(t) := \sum_{n \leqslant t} h_N(n)$$

pour $1 \leqslant t \leqslant N$. Nos hypothèses sont exprimées en termes de quantités

$$\varrho_N \in \mathbb{C}, \qquad |\varrho_N| = 1, \qquad \beta_N \in \mathbb{R},$$

et d'une suite complexe $\{\varepsilon_{k,N}\}_{k=1}^{\infty}$ satisfaisant à la relation

$$h_N(p_k) = \varrho_N (\log 2k)^{i\beta_N}(1 + \varepsilon_{k,N})h_N(k). \tag{1·25}$$

(On peut aussi considérer N, ϱ_N, β_N et $\{\varepsilon_{k,N}\}_{k=1}^{\infty}$ comme donnés, et interpréter la relation (1·25) comme une définition récursive de la fonction complètement multiplicative h_N.) Nous posons encore

$$E_N := \sum_{p_k \leqslant N} |\varepsilon_{k,N}|/k.$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.5. *Soient $N \geqslant 3$ et h_N une fonction complètement multiplicative de module au plus 1 vérifiant (1·25). On suppose qu'il existe une constante absolue $a_1 > 0$ telle que*

$$1/(\log N)^{a_1} \ll \beta_N \ll 1/(\log_2 N)^2. \tag{1·26}$$

Étant donnés α_N, $t_{0,N}$ satisfaisant à

$$\alpha_N \geqslant 0, \qquad \log_2 N \ll \log_2 t_{0,N}, \qquad \big(t_{0,N}\big)^{\alpha_N} \ll 1, \tag{1·27}$$

on pose $s_N := \alpha_N + i\beta_N$, $\gamma_N := (1 - s_N)/\{\varrho_N(1 - \alpha_N)\}$ et l'on définit implicitement la quantité $\delta_N(t)$ par

$$H_N(t) = \frac{\gamma_N\, t^{1-\alpha_N}}{(\log 2t)^{s_N}}\big\{1 + \delta_N(t)t^{\alpha_N} \log 2t\big\} \qquad (1 \leqslant t \leqslant N). \tag{1·28}$$

On note encore $\sigma_N := E_N + |\beta_N| \log_2 N + \alpha_N(\log_2 N)^2$.

Pour tout $\vartheta_N > 0$ tel que

$$|\delta_N(t)| \ll \frac{\vartheta_N + 1/\sqrt{t}}{(\log 2t)^2} \qquad (1 \leqslant t \leqslant t_{0,N}), \tag{1·29}$$

on a

$$|\delta_N(t)| \ll \frac{\vartheta_N + \sigma_N}{(\log t_{0,N})^2} \qquad (t_{0,N} \leqslant t \leqslant N). \tag{1·30}$$

Il est à noter que les conditions (1·27) impliquent l'existence d'une constante absolue $a_2 > 0$ telle que $\alpha_N \ll 1/(\log N)^{a_2}$.

Nous démontrons le Théorème 1.5, au paragraphe 7, par une méthode indirecte, au sens défini par de Bruijn dans son livre *Asymptotic methods in analysis* [dB70]. En l'espèce, cela signifie qu'il est nécessaire de connaître, *préalablement* à toute mise en œuvre de l'analyse, une approximation suffisamment bonne de la solution pour montrer que la qualité de cette approximation s'auto-améliore, ou simplement ne se dégrade pas de manière rédhibitoire, au cours du processus itératif. Une méthode directe, au contraire, est soit non-itérative soit de nature à faire converger asymptotiquement toute approximation, aussi grossière soit-elle, de la solution. Sans entrer pour l'instant dans les détails techniques, il est à noter que le type d'équation fonctionnelle rencontrée impose de donner une forme particulière au terme résiduel à estimer. Ainsi, la présence du facteur $\log t$ dans (1·28) joue ici un rôle déterminant pour la validité de la récurrence.

Pour l'application à la répartition des valeurs des fonctions de $\mathcal{E}$, l'information nécessaire à l'estimation préliminaire (1·29) est fournie par une approximation des moments d'ordres 1 et 2 et une majoration des moments d'ordre 3 et 4 de f_0. Lorsque, par exemple, $n \leqslant t_{0,N} \ll N^{1/\tau^2}$, l'argument de l'exponentielle dans (1·24) est borné et un développement à l'ordre 3 fournit une évaluation suffisamment précise de la moyenne. Le Théorème 1.5 permet ensuite d'exploiter la structure de la fonction f_0 directement sur la fonction multiplicative h_N qui lui est associée par (1·24). Comme annoncé plus haut, cela fournit un gain quantitatif dans l'approximation (1·22). Nous établissons le résultat suivant.

Théorème 1.6. *Soit $f \in \mathcal{E} \smallsetminus \mathbb{C}\log$. On définit f_0 par (1·16), $F_N(z)$ par (1·22) et $h_N(n;\tau)$ par (1·24) pour $N \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$. On a alors les formules asymptotiques uniformes pour $N \geqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} h_N(n;\tau) = e^{-\tau^2/2} + O\Big((\tau+\tau^3)\frac{\log_2 N}{\sqrt{\log N}}\Big), \tag{1·31}$$

$$F_N(z) = \Phi(z) + O\Big(\frac{(\log_2 N)^{1/4}}{(\log N)^{1/8}}\Big). \tag{1·32}$$

Au vu des estimations des moments, il est naturel de conjecturer que le terme résiduel de (1·32) est en fait $\ll 1/(\log N)^{1/2-\varepsilon}$, où l'exposant $\frac{1}{2}$ est optimal.

2. Préliminaires

Lemme 2.1. *Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors $f(n) \ll \log n$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que cette majoration est optimale puisque, f étant complètement additive, on a nécessairement

$$\limsup_{p^\nu \to \infty} \big|f(p^\nu)\big|/\log p^\nu > 0$$

dès que f n'est pas identiquement nulle.

La formule (1·2) et l'estimation $\log(p_k/k) \asymp \log_2 2k$ $(k \geqslant 2)$, impliquent l'existence d'un nombre réel $M \geqslant |f(2)|/\log 2$ tel que

$$\big|b\log_2 k + a + r_k\big| \leqslant M\log(p_k/k) \qquad (k \geqslant 2). \tag{2·1}$$

Montrons par récurrence sur l'entier n que l'on a $|f(n)| \leqslant M\log n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette inégalité est trivialement vérifiée pour $n = 1, 2$. Supposons-la satisfaite pour $1 \leqslant n \leqslant N$. Si $N+1$ est premier, il existe $1 < k \leqslant N$ tel que $N+1 = p_k$. On déduit alors de l'hypothèse de récurrence et de (2·1) que

$$\begin{aligned}|f(N+1)| &= |f(p_k)|\\ &\leqslant |f(k)| + \big|b\log_2 k + a + r_k\big|\\ &\leqslant M\log k + M\log(p_k/k) \leqslant M\log p_k = M\log(N+1).\end{aligned}$$

La majoration souhaitée est donc encore valable. Si $N+1$ n'est pas premier, $N+1$ est le produit de deux entiers vérifiant l'hypothèse de récurrence et la complète additivité de f permet de conclure. □

Les deux lemmes suivants permettent d'expliciter la solution générale d'un modèle continu simplifié des équations fonctionnelles discrètes rencontrées dans cette étude. Nous utiliserons inductivement ce modèle pour construire des solutions discrètes approchées.

Pour tout sous-intervalle I de $\mathbb{R}$, nous notons $\mathcal{B}_c(I)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes mesurables sur I et bornées sur tout compact de I, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cet espace est complet pour la métrique canonique dont on peut le munir.

Lemme 2.2. *Soit $\mathcal{S} : \mathcal{B}_c([1,\infty[) \to \mathcal{B}_c([1,\infty[)$ l'opérateur défini par*

$$\mathcal{S}\psi(u) = \frac{1}{u}\int_1^u \psi(v)\,\mathrm{d}v.$$

Pour toute fonction $h \in \mathcal{B}_c([1,\infty[)$, l'équation

$$\psi(u) = \mathcal{S}\psi(u) + h(u) \tag{2·2}$$

admet dans $\mathcal{B}_c([1,\infty[)$ une unique solution ψ_h, définie par

$$\psi_h(u) := h(u) + \int_1^u h(v)\frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

Démonstration. Une récurrence facile permet de montrer que, pour tout $h \in \mathcal{B}_c([1,\infty[)$, on a

$$\mathfrak{S}^{n+1}h(u) = \frac{1}{u}\int_1^u \frac{1}{n!}\Big(\log\frac{u}{v}\Big)^n h(v)\,\mathrm{d}v \qquad (n \geqslant 0),$$

et donc

$$\big|\mathfrak{S}^{n+1}h(u)\big| \leqslant \frac{1}{n!}(\log u)^n \max_{t\in[1,u]}|h(t)| \qquad (n \geqslant 0). \tag{2·3}$$

Ainsi, la série $\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{S}^k h$ converge dans $\mathcal{B}_c([1,\infty[)$ et sa somme est égale à la fonction ψ_h définie dans l'énoncé. Cette fonction est par ailleurs bien solution de (2·2). Enfin, toute solution ψ de (2·2) dans $\mathcal{B}_c([1,\infty[)$ vérifie

$$\psi = \sum_{j=0}^{n}\mathfrak{S}^j h + \mathfrak{S}^{n+1}\psi \qquad (n \geqslant 0).$$

En appliquant (2·3) à ψ, on en déduit, en faisant tendre n vers l'infini, que $\psi = \psi_h$. □

Lemme 2.3. *Soit $\delta \in \mathcal{B}_c([\mathrm{e},\infty[)$. L'équation*

$$y(t)\log t = \int_{\mathrm{e}}^{t}\frac{y(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \delta(t)$$

admet une unique solution dans $\mathcal{B}_c([\mathrm{e},\infty[)$, définie par

$$y(t) = \mathfrak{T}\delta(t) = \delta(\mathrm{e}) + \int_{\mathrm{e}}^{t}\frac{\mathrm{d}\delta(u)}{\log u} = \frac{\delta(t)}{\log t} + \int_{\mathrm{e}}^{t}\frac{\delta(u)}{u(\log u)^2}\,\mathrm{d}u. \tag{2·4}$$

Démonstration. Le résultat est une simple reformulation du Lemme 2.2 via le changement de variable $v = \log u$. □

Nous rappelons la notation (1·10) pour les moments d'une fonction arithmétique. Nous désignons la partie fractionnaire d'un nombre réel t par

$$\langle t\rangle := t - [t].$$

Dans tout l'article, la lettre p, avec ou sans indice, désigne en règle générale un nombre premier.(4)

4. Toutefois, nous définissons au paragraphe 3 une fonction $t \mapsto p(t)$ qui est une interpolation approchée de la suite $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ de tous les nombres premiers.

Lemme 2.4. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction arithmétique complètement additive telle que $f(n) \ll \log n$. Posant*

$$a_k(f) := \sum_p \frac{f(p)^k}{p^2} \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{\nu^{k-1}}{p^{\nu-2}},$$

on a

$$R\big(x; f^k\big) = w_k(x) + y_k(x) + z_k(x) + a_k(f) + O\big((\log x)^{k-1}/\sqrt{x}\big) \tag{2·5}$$

avec

$$\begin{cases} w_k(x) = w_k(x; f) := \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \sum_{p^\nu \leqslant x} \nu^{k-1-j} f(p)^{k-j} M_j\Big(\frac{x}{p^\nu}; f\Big), \\ y_k(x) = y_k(x; f) := -\dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{p_m \leqslant x} \big\{f(p_m)^k - f(m)^k\big\} \Big\langle \frac{x}{p_m} \Big\rangle, \\ z_k(x) = z_k(x; f) := \displaystyle\sum_{p_m \leqslant x} \frac{f(p_m)^k - f(m)^k}{p_m}. \end{cases} \tag{2·6}$$

Démonstration. La complète additivité de la fonction f permet d'écrire

$$\begin{aligned} M_k(x; f) &= \sum_{n \leqslant x} f(n)^{k-1} \sum_{p^\nu \mid n} f(p) = \sum_{p^\nu \leqslant x} f(p) \sum_{n \leqslant x/p^\nu} \big(f(n) + f(p^\nu)\big)^{k-1} \\ &= \sum_{p \leqslant x} f(p)^k \Big[\frac{x}{p}\Big] + A_k(x; f) + x w_k(x), \end{aligned}$$

avec $A_k(x; f) := \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p^\nu \leqslant x} \nu^{k-1} f(p)^k \big[x/p^\nu\big]$. Il suit

$$R\big(x; f^k\big) = w_k(x) + y_k(x) + z_k(x) + A_k(x; f)/x.$$

De plus, l'hypothèse $f(n) \ll \log n$ implique, en faisant appel à l'estimation supérieure de Tchébychev,

$$\begin{aligned} A_k(x; f) &= x \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\nu^{k-1} f(p)^k}{p^\nu} + O((\log x)^{k-1}\sqrt{x}) \\ &= x \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p)^k \sum_{2 \leqslant \nu \leqslant \log x/\log p} \frac{\nu^{k-1}}{p^\nu} + O((\log x)^{k-1}\sqrt{x}) \\ &= x \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p)^k \Big\{ \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{\nu^{k-1}}{p^\nu} + O\Big(\frac{1}{x}\Big(\frac{\log x}{\log p}\Big)^{k-1}\Big)\Big\} + O((\log x)^{k-1}\sqrt{x}) \\ &= a_k(f) x + O((\log x)^{k-1}\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de (2·5).

Le résultat suivant est un corollaire immédiat du Lemme 2.4.

Lemme 2.5. *Soit f une fonction arithmétique complètement additive satisfaisant à $f(n) \ll \log n$. Posant $a_1(f) := \sum_p f(p)/p(p-1)$, on a*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\Big[\frac{x}{p}\Big] f(p) + a_1(f) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

3. Équations fonctionnelles approchées

Nous nous proposons dans ce paragraphe de démontrer le Théorème 1.1. Nous introduisons les notations suivantes relatives à une fonction arithmétique g satisfaisant (1·5)

$$v(x;g) := -\frac{1}{x}\sum_{k\leqslant \pi(x)} g(k)\Big\langle \frac{x}{p_k}\Big\rangle, \quad \varphi(x;g) := \frac{M_1(x;g)}{x\log x} \qquad (x>1). \tag{3·1}$$

Nous notons dès à présent que l'on peut déduire de (1·4) l'identité

$$\varphi(x;g)\log x = \sum_{p_k\leqslant x}\frac{g(k)}{p_k} + R(x;g) + v(x;g). \tag{3·2}$$

Le lemme général suivant, qui possède un intérêt intrinsèque, nous permettra de majorer $v(x;g)$.

Lemme 3.1. *Soient $x \geqslant 2$, $h = h_x$ une fonction arithmétique fortement additive et L un nombre réel vérifiant $L \geqslant \sup_{p\leqslant x}|h(p)|$. Pour tout nombre réel ϱ satisfaisant $1/\sqrt{x} \leqslant \varrho \leqslant \frac{1}{2}$ et*

$$S(t) := \sum_{p\leqslant t} h(p) \ll \varrho L\pi(t) \qquad (\varrho x \leqslant t \leqslant x),$$

on a

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) - x\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p} = -\sum_{p\leqslant x}\Big\langle\frac{x}{p}\Big\rangle h(p) \ll \varrho\log(1/\varrho)L\pi(x). \tag{3·3}$$

Démonstration. L'égalité de (3·3) résulte d'une simple interversion de sommations. Posons $y := \varrho x$. La contribution au membre de gauche de (3·3) des nombres premiers p n'excédant pas y est trivialement $\ll L\pi(y) \ll \varrho L\pi(x)$. La contribution complémentaire vaut

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leqslant x} h(p)\Big[\frac{x}{p}\Big] - x\sum_{y<p\leqslant x}\frac{h(p)}{p} &= \sum_{k\leqslant x/y}\Big\{S\Big(\frac{x}{k}\Big) - S(y)\Big\} - x\int_y^x \frac{\mathrm{d}S(t)}{t}\\ &= \sum_{k\leqslant x/y} S\Big(\frac{x}{k}\Big) - x\int_y^x S(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + O(\varrho L\pi(x))\\ &\ll \varrho L\pi(x)\Big\{\sum_{k\leqslant 1/\varrho}\frac{1}{k} + \int_{\varrho x}^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + 1\Big\}.\end{aligned}$$

Cela fournit bien la majoration annoncée. □

Nous utiliserons principalement le Lemme 3.1 sous la forme suivante.

Lemme 3.2. *Soit g une fonction arithmétique satisfaisant à (1·5). On a*

$$v(x;g) \ll \Big(\sup_{x^{3/4}\leqslant t\leqslant x}|\varphi(t;g)|\Big)\log_2 x + \frac{1}{\log x}. \tag{3·4}$$

Démonstration. On pose $h(p_k) := g(k)$, de sorte que

$$S(t) = \sum_{p\leqslant t} h(p) = \sum_{k\leqslant \pi(t)} g(k) = M_1(\pi(t);g) \asymp t\varphi(\pi(t);g).$$

Pour $L \asymp (\log x)^\alpha$, $\varrho_1 \asymp 1/\log x + (\log x)\sup_{x^{3/4}\leqslant t\leqslant x}|\varphi(t;g)|$ et $\varrho := \varrho_1/L$, on a donc $S(t) \ll \varrho L\pi(t)$ lorsque $\varrho x \leqslant t \leqslant x$. On déduit alors de (3·3) que

$$xv(x;g) = -\sum_{p\leqslant x} h(p)\Big\langle\frac{x}{p}\Big\rangle \ll L\varrho\log(1/\varrho)\pi(x) \ll \frac{\varrho_1 x\log_2 x}{\log x},$$

ce qui implique la majoration requise.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la phase finale de la démonstration du Théorème 1.1. Posons

$$K_0(t) := (t\log t)^2\frac{1+\log p(t)}{p(t)^2\log p(t)},\quad K_1(t) := \{1-K_0(t)\}\log t \quad (t\geqslant 3), \tag{3·5}$$

où $t \mapsto p(t)$ désigne la fonction réciproque de li : $t \mapsto \int_2^t \mathrm{d}u/\log u$,[5] de sorte que $p(\mathrm{li}(t)) = t$. Nous utiliserons par la suite les estimations

$$K_0(t) = 1 + O(\log_2 t/\log t),\quad K_1(t) = 2\log_2 t + O(1) \qquad (t\geqslant 3), \tag{3·6}$$

5. Cette fonction est donc indéfiniment dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[2,\infty[$.

qui sont des conséquences directes de la formule

$$p(t) = t\{\log t + \log_2 t + O(1)\} \qquad (t \geqslant 3). \tag{3·7}$$

La fonction $x \mapsto p(x)$, dont nous ferons plus loin un usage intensif, constitue la meilleure approximation régulière de $x \mapsto p_{[x]}$ issue du théorème des nombres premiers — dont une forme classique s'énonce

$$\pi(t) = \mathrm{li}(t) + O\Big(t\mathrm{e}^{-3\sqrt{\log t}}\Big). \tag{3·8}$$

Puisque $\pi(p_k) = k$ par définition de p_k, on en déduit que $\mathrm{li}(p_k) = k + O\big(k\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log k}}\big)$, d'où $p_k = p\Big(k + O\big(k\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log k}}\big)\Big)$, et finalement, grâce à la relation $p'(t) = \log p(t)$,

$$p_k = p(k) + O\Big(k\mathrm{e}^{-\sqrt{\log k}}\Big). \tag{3·9}$$

La première étape de la preuve du Théorème 1.1 consiste à établir, à partir de (3·2), que $\varphi(x;g)$ satisfait une équation fonctionnelle du type considéré au Lemme 2.3 — cf. (3·12), *infra.*

Il résulte d'une sommation d'Abel que l'on a

$$\sum_{p_k \leqslant x} \frac{g(k)}{p_k} = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\Big(\sum_{k\leqslant \pi(t)} g(k)\Big) = \frac{M_1(\pi(x);g)}{x} + \int_1^x \frac{M_1(\pi(t);g)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En approchant $M_1(\pi(t);g)$ par $M_1(t;g)/\log t = t\varphi(t;g)$, il suit

$$\sum_{p_k \leqslant x} \frac{g(k)}{p_k} = \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\varphi(t;g)}{t}\,\mathrm{d}t + V_1(x;g) + C_1(g), \tag{3·10}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(x;g) &:= \int_{\mathrm{e}}^x \Big(\frac{M_1(\pi(t);g)}{t^2} - \frac{M_1(t;g)}{t^2\log t}\Big)\,\mathrm{d}t + \frac{M_1(\pi(x);g)}{x}, \\ C_1(g) &:= \int_2^{\mathrm{e}} \frac{M_1(\pi(t);g)}{t^2}\,\mathrm{d}t = g(1)\{1/2 - 1/\mathrm{e}\}. \end{aligned} \tag{3·11}$$

Reportons maintenant (3·10) dans (3·2), et posons

$$V_2(x;g) := v(x;g) + C_1(g) + R(x;g).$$

Nous obtenons

$$\varphi(x;g)\log x = \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\varphi(t;g)}{t}\,\mathrm{d}t + V(x;g), \tag{3·12}$$

avec $V(x;g) := V_1(x;g) + V_2(x;g)$.

La seconde étape consiste à appliquer le Lemme 2.3 à l'équation (3·12), ce qui fournit

$$\begin{aligned}\varphi(x;g) &= \mathfrak{T}V(x;g) = \mathfrak{T}V_1(x;g) + \mathfrak{T}V_2(x;g)\\ &= \mathfrak{T}V_1(x;g) + \mathfrak{T}v(x;g) + C_1(g) + \mathfrak{T}R(x;g).\end{aligned}\tag{3·13}$$

Nous allons maintenant transformer $\mathfrak{T}V_1(x;g)$ en approchant cette quantité par une expression faisant intervenir $\varphi(t;g)$, ce qui nous permettra de traiter (3·13) comme une nouvelle équation fonctionnelle pour $\varphi(x;g)$.

On a d'après (1·7)

$$\mathfrak{T}V_1(x) = \frac{V_1(x)}{\log x} + \int_{\mathrm{e}}^x \frac{V_1(t;g)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Nous évaluons cette expression en y reportant la définition (3·11) et en intervertissant les sommations. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}V_1(x) &= \int_{\mathrm{e}}^x \frac{M_1(\pi(t);g)(1+\log t) - M_1(t;g)}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{M_1(\pi(x);g)}{x\log x}\\ &= \int_{\mathrm{e}}^x \frac{M_1(\mathrm{li}(t);g)(1+\log t) - M_1(t;g)}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{M_1(\pi(x);g)}{x\log x}\\ &\quad + C_2(g) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\big),\end{aligned}$$

avec

$$C_2(g) := \int_{\mathrm{e}}^\infty \big\{M_1(\pi(t);g) - M_1(\mathrm{li}(t);g)\big\}\frac{1+\log t}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a utilisé ici le fait que l'intégrande est $\ll t^{-1}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}$, ce qui résulte de la majoration (1·5) et d'une forme forte du théorème des nombres premiers. Le changement de variable $u = \mathrm{li}(t)$ fournit alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^x M_1(\mathrm{li}(t);g)&\frac{1+\log t}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{e}}^x \frac{M_1(t;g)}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathrm{li(e)}}^{\mathrm{li}(x)} M_1(u;g)\frac{1+\log p(u)}{p(u)^2\log p(u)}\,\mathrm{d}u - \int_{\mathrm{e}}^x \frac{M_1(t;g)}{t^2(\log t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathrm{li(e)}}^{\mathrm{li}(x)} \frac{\varphi(t;g)K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\varphi(t;g)}{t^2\log t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où K_0 est la fonction définie en (3·5). Remplaçons l'intervalle d'intégration $\big[\mathrm{li(e)}, \mathrm{li}(x)\big]$ par $[\mathrm{e}, x]$ en prenant en compte l'erreur ainsi commise. Il suit, en introduisant maintenant la fonction K_1 de (3·5),

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}V_1(x) = &-\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\varphi(t;g)K_1(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{li}(x)}^x \frac{\varphi(t;g)K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t + C_2'(g)\\ &+ \varphi(\pi(x);g)\frac{1+\varepsilon_1(x)}{\log x} + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\Big),\end{aligned}\tag{3·14}$$

où la quantité $\varepsilon_1(x)$ est implicitement définie par la relation $\pi(x)\log\pi(x) = \{1+\varepsilon_1(x)\}x$, et où l'on a posé

$$C_2'(g) := C_2(g) + \int_{\mathrm{li(e)}}^{\mathrm{e}} \frac{\varphi(t;g)K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t.$$

En reportant (3·14) dans (3·13), nous obtenons la forme finale de notre équation fonctionnelle approchée pour $\varphi(x;g)$, soit

$$\varphi(x;g) = C_3(g) + \boldsymbol{\mathcal{T}}R(x;g) + U(x;g) + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\Big) \tag{3·15}$$

avec $C_3(g) := C_1(g) + C_2'(g)$ et

$$\begin{aligned} U(x;g) := \boldsymbol{\mathcal{T}}v(x;g) &- \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\varphi(t;g)K_1(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &- \int_{\mathrm{li}(x)}^{x} \frac{\varphi(t;g)K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t + \varphi(\pi(x);g)\frac{1+\varepsilon_1(x)}{\log x}. \end{aligned} \tag{3·16}$$

Démonstration du Théorème 1.1(i).

Nous allons procéder en trois étapes, successivement dévolues à établir que $\varphi(x;g)$ est bornée, que

$$\varphi(x;g) = \Phi_1(g) + \overline{\boldsymbol{\mathcal{T}}R}(x;g) + O(\log_2 x/\log x),$$

puis enfin que

$$\begin{aligned} \varphi(x,g) = \Phi_1(g)\Big(1+\frac{\log_2 x}{\log x}\Big) &+ \overline{\boldsymbol{\mathcal{T}}R}(x;g) \\ &+ O\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\sup_{t\geqslant\sqrt{x}}|\overline{\boldsymbol{\mathcal{T}}R}(t;g)| + \frac{\log_2 x}{(\log x)^2}\Big), \end{aligned}$$

ce qui équivaut au résultat requis.

Posons

$$\beta^* := \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|\varphi(x;g)|}{\log_2 x}, \qquad \beta := \max(0,\beta^*).$$

Ces quantités sont bien finies et l'on a en fait $0 \leqslant \beta \leqslant \max(0,\alpha-1)$, d'après (1·5). On peut clairement écrire

$$\varphi(t;g) \ll (\log t)^{\beta+1/2} \qquad (t\geqslant 2). \tag{3·17}$$

Majorons maintenant $U(x;g)$ en tenant compte de (3·17). En employant successivement (3·4) et (1·7), nous obtenons d'abord

$$v(x;g) \ll (\log x)^{\beta+1/2}\log_2 x, \qquad \boldsymbol{\mathcal{T}}v(x;g) \ll 1 + (\log x)^{\beta-1/2}(\log_2 x)^2.$$

Ensuite, nous estimons les trois derniers termes du membre de gauche de (3·16) en faisant appel à (3·6) et (3·17). Il s'ensuit que

$$U(x;g) \ll 1 + (\log x)^{\beta-1/2}(\log_2 x)^2.$$

Reportons cette majoration dans (3·15) en tenant compte de l'hypothèse $R(x;g) \ll 1$. Il vient

$$\varphi(x;g) \ll 1 + (\log x)^{\beta-1/2}(\log_2 x)^2,$$

ce qui fournit successivement $\beta = 0$ et

$$\varphi(x;g) \ll 1. \tag{3·18}$$

Insérons maintenant (3·18) dans (3·4). Nous obtenons $v(x;g) \ll \log_2 x$, donc $\mathfrak{T}v(x;g)$ tend vers une limite à l'infini et, par (1·9),

$$\overline{\mathfrak{T}v}(x;g) \ll \log_2 x/\log x. \tag{3·19}$$

De (3·15), (3·16), (3·18) et (3·19), on déduit ensuite l'existence d'une constante $\Phi_1(g)$ telle que

$$\varphi(x;g) - \Phi_1(g) = \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + O(\log_2 x/\log x). \tag{3·20}$$

La dernière étape de la démonstration consiste à appliquer (3·20) à la fonction g_0 définie par

$$g_0(n) := g(n) - \Phi_1(g)\{\log n + \log_2 2n + 1\}. \tag{3·21}$$

On note d'emblée que l'on a par construction $\Phi_1(g_0) = 0$. Il nous faut une estimation de $\overline{\mathfrak{T}R}(x;g_0)$ et nous allons montrer, dans un premier temps, qu'il existe une constante $C(g)$ telle que l'on ait

$$R(x;g) - R(x;g_0) = C(g) + O(\log_2 x/\log x). \tag{3·22}$$

On a, d'après la définition (1·4),

$$R(x;g) - R(x;g_0) = \frac{\Phi_1(g)}{x}\big\{S_1(x) - S_2(x)\big\},$$

avec

$$S_1(x) := \sum_{n\leqslant x}(\log n + \log_2 2n + 1), \;\; S_2(x) := \sum_{p_k\leqslant x}\big(\log k + \log_2 2k + 1\big)\big[x/p_k\big].$$

Il est immédiat que

$$S_1(x) = x\log(x\log x) + O\big(x/\log x\big). \tag{3·23}$$

Posons $\pi_k := \log\{p_k/(k\log 2k)\}$, de sorte que (3·7) et (3·9) impliquent

$$\pi_k \ll \log_2 2k/\log 2k.$$

Posant $\sigma := \sum_{k\geqslant 1}\pi_k/p_k$, on a

$$\begin{aligned}S_2(x) &= \sum_{p\leqslant x}\log p\Big[\frac{x}{p}\Big] + x\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} - \sigma x + O\Big(x\frac{\log_2 x}{\log x}\Big)\\ &= \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big[\frac{x}{n}\Big] - x\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}}\frac{\log p}{p^\nu} + x\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} - \sigma x + O\Big(x\frac{\log_2 x}{\log x}\Big).\end{aligned}$$

En prenant en compte la relation

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big[\frac{x}{n}\Big] = \sum_{m\leqslant x}\log m = x\log x - x + O(\log x)$$

et la formule classique (voir, par exemple, [T95], théorème I.1.8)

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log_2 x + \gamma - \sum_p\Big\{\log\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big) - \frac{1}{p}\Big\} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big),$$

il suit

$$S_2(x) = x\log(x\log x) + C_4x + O\Big(x\frac{\log_2 x}{\log x}\Big), \tag{3·24}$$

avec $C_4 := \gamma - 1 - \sigma - \sum_p\Big\{\log\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big) - \frac{1}{p} + \frac{\log p}{p(p-1)}\Big\}.$

Les estimations (3·23) et (3·24) impliquent (3·22) et, *ipso facto*,

$$\overline{\mathfrak{T}R}(x;g_0) = \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + O(\log_2 x/(\log x)^2). \tag{3·25}$$

La formule (3·20) appliquée à g_0 fournit donc

$$\varphi(x;g_0) = \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + O(\log_2 x/\log x). \tag{3·26}$$

Insérons maintenant (3·26) dans la définition (3·16) appliquée à g_0. On déduit alors d'un calcul de routine reposant sur les estimations (3·4) et (3·6) que

$$\overline{U}(x;g_0) \ll \frac{\log_2 x}{\log x}\varepsilon_2(\sqrt{x};g) + \frac{\log_2 x}{(\log x)^2}, \tag{3·27}$$

avec $\varepsilon_2(z;g) := \sup_{t\geqslant z}|\overline{\mathfrak{T}R}(t;g)|$. Reportons (3·25) et (3·27) dans la formule (3·15) appliquée à g_0, où nous tenons compte du fait que $\varphi(x;g_0)$ tend vers 0 lorsque $x\to\infty$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi(x;g_0) &= \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + \overline{U}(x;g_0) + O\Big(\frac{\log_2 x}{(\log x)^2}\Big)\\ &= \overline{\mathfrak{T}R}(x;g) + O\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\varepsilon_2(\sqrt{x};g) + \frac{\log_2 x}{(\log x)^2}\Big).\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du point (i) puisqu'il découle immédiatement de la définition de g_0 que

$$M_1(x;g) = \Phi_1(g)x\log(x\log x) + \varphi(x;g_0)x\log x + O(x\log_2 x/\log x).$$

Démonstration du Théorème 1.1(ii) & (iii).

Commençons par établir une estimation de $v(x;g)$ qui servira de base commune aux preuves des deux assertions. À cette fin, nous majorons $\mathfrak{T}v(x;g)$ à l'aide de (3·4) et nous reportons dans (3·16) puis dans (3·15). Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante $B>0$ telle que

(3·28)
$$\begin{aligned}|\varphi(x;g)| \leqslant |\mathfrak{T}R(x;g)| + \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{|\varphi(t;g)K_1(t)|}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{li}(x)}^{x} \frac{|\varphi(t;g)|\,K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t \\ + |\varphi(\pi(x);g)|\frac{1+\varepsilon_1(x)}{\log x} + B\int_{\mathrm{e}}^{x} \sup_{\sqrt{t}\leqslant u\leqslant t} |\varphi(u;g)|\frac{\log_2 t}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + B\end{aligned}$$

Choisissons ensuite un nombre réel $x_0 \geqslant \mathrm{e}$ tel que

$$\int_{x_0}^{\infty} |K_1(t)|\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^2} \leqslant \frac{1}{3}, \qquad \int_{x_0}^{\infty} \frac{\log_2 t}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3B}.$$

Nous déduisons de (3·28), en tenant compte de (3·6), que

$$|\varphi(x;g)| \leqslant (\mathfrak{T}R)^{\dagger}(x;g) + \varphi^{\dagger}(x;g)\big\{\tfrac{2}{3} + O(\log_2 x/\log x)\big\} + O(1) \qquad (x \geqslant x_0).$$

Nous avons donc, pour $x \geqslant 3$,

(3·29)
$$\begin{aligned}\varphi^{\dagger}(x;g) &\ll (\mathfrak{T}R)^{\dagger}(x;g)\\ &\ll \sup_{\mathrm{e}\leqslant t\leqslant x} \Big\{\frac{R^{\dagger}(t;g)}{\log t} + \int_{\mathrm{e}}^{t} \frac{R^{\dagger}(u;g)}{u(\log u)^2}\,\mathrm{d}u\Big\}\\ &\ll \int_{\mathrm{e}}^{x^2} \frac{R^{\dagger}(t;g)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

d'après l'expression (1·7) de la transformation $\mathfrak{T}$. Grâce à (3·4), nous inférons que

(3·30)
$$v(x;g) \ll \log_2 x \int_{\mathrm{e}}^{x^2} \frac{R^{\dagger}(t;g)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons maintenant l'assertion (ii) du théorème. Sous l'hypothèse (1·12), la majoration (3·30) implique la réalisation des conditions (1·8) pour la convergence de $\mathfrak{T}v(x;g)$. En employant l'expression de $\overline{\mathfrak{T}v}(x;g)$ fournie par (1·9) il suit, après interversion de sommations,

$$\overline{\mathfrak{T}v}(x;g) \ll \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{R^{\dagger}(t;g)}{t(\log t)^2}\frac{\log_2(x+t)}{\log(x+t)}\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse (1·12) permet semblablement de déduire de (3·29), également par interversion de sommations, que $U(x;g)$ tend vers une limite quand x tend vers l'infini.

Les informations obtenues sur la convergence de $\mathfrak{T}v(x;g)$ et $U(x;g)$ nous permettent de réécrire (3·16) sous la forme

$$\begin{aligned}\overline{U}(x;g) = \overline{\mathfrak{T}v}(x;g) + \int_x^\infty \frac{\varphi(t;g)K_1(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{li}(x)}^x \frac{\varphi(t;g)K_0(t)}{t\log t}\,\mathrm{d}t \\ + \varphi(\pi(x);g)\frac{1+\varepsilon_1(x)}{\log x} \\ \ll \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{R^\dagger(t;g)}{t(\log t)^2}\frac{\log_2(x+t)}{\log(x+t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En insérant cette majoration dans (3·15), nous obtenons exactement l'estimation annoncée au point (ii) du théorème.

Pour établir l'assertion (iii), nous observons que (3·30) implique

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}v(x;g) &\ll \frac{\log_2 x}{\log x}\int_{\mathrm{e}}^{x^2}\frac{R^\dagger(t;g)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\log_2 t}{t(\log t)^2}\int_{\mathrm{e}}^{t^2}\frac{R^\dagger(u;g)}{u(\log u)^2}\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}t \\ &\ll \int_{\mathrm{e}}^{x^2}\frac{R^\dagger(u;g)\log_2 u}{u(\log u)^3}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Cela fournit une estimation acceptable pour le premier terme du membre de droite de (3·16). Les trois autres termes peuvent être majorés semblablement, grâce à (3·29). Nous obtenons ainsi

$$U(x;g) \ll \int_{\mathrm{e}}^{x^2}\frac{R^\dagger(t;g)\log_2 t}{t(\log t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de (3·15), cela fournit bien la conclusion requise au point (iii).

4. Valeur moyenne du produit de convolution de deux fonctions arithmétiques

Nous consacrons ce paragraphe à un résultat technique concernant la valeur moyenne d'un produit de convolution dont les facteurs satisfont certaines conditions de régularité. Ce résultat est utilisé de manière systématique pour les démonstrations des points (ii) et (iii) du Théorème 1.2.

Nous désignons par $\mathcal{CP}^1([0,y]$ l'espace des fonctions réelles f de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $[0,y]$ et qui satisfont en outre aux conditions de croissance polynomiale

$$\begin{cases} f(u) \gg 1 & (0\leqslant u\leqslant 1),\\ f(u)\asymp f(u/2), \quad (u+1)f'(u)\ll f(u) & (0\leqslant u\leqslant y).\end{cases}$$

Pour $f, g \in \mathcal{CP}^1([0,y])$, nous posons

$$\mathcal{I}f(y) := \int_0^y |f(u)| \mathrm{d}u, \quad [f,g]_y := |f(y)|\mathcal{I}g(y) + |g(y)|\mathcal{I}f(y).$$

Lemme 4.1. *Soient $x \geqslant 2$ et g_1, g_2 deux fonctions arithmétiques, définies sur $[1,x]$, dont les fonctions sommatoires $G_j(t) := \sum_{n \leqslant t} g_j(n)$ $(j = 1, 2)$ satisfont à*

$$G_j(t) = t\alpha_j(\log t) + O\big(t\varrho_j(\log t)\big) \qquad (j = 1, 2;\ 1 \leqslant t \leqslant x) \tag{4·1}$$

avec, pour $j = 1, 2$, α_j, $\varrho_j \in \mathcal{CP}^1([0, \log x])$, $\varrho_j \geqslant 0$. On suppose également que

$$G_j^*(t) := \sum_{n \leqslant t} |g_j(n)| \ll t\alpha_j^*(\log t) \qquad (j = 1, 2;\ 1 \leqslant t \leqslant x) \tag{4·2}$$

avec $\alpha_j^* \in \mathcal{CP}^1([0, \log x])$ et $\alpha_j(u) \ll \alpha_j^*(u)$ pour $0 \leqslant u \leqslant \log x$.

(i) *On a*

$$G(x) := \sum_{mn \leqslant x} g_1(m)g_2(n) = x\alpha(\log x) + O\big(x\varrho(\log x)\big) \tag{4·3}$$

avec

$$\alpha(y) := \int_0^y \alpha_1(y-u)\{\alpha_2(u) + \alpha_2'(u)\}\,\mathrm{d}u, \qquad \varrho(y) := \big[\alpha_1, \varrho_2\big]_y + \big[\varrho_1, \alpha_2^*\big]_y.$$

(ii) *Si l'on suppose de plus que $\alpha_2(u) \ll (u+1)\varrho_2(u)$ pour $0 \leqslant u \leqslant \log x$, on a encore, uniformément pour $1 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\log x$ et $y = \log x$,*

$$G(x) = x\alpha_3(y) + O\big(x\varrho(y,z)\big), \tag{4·4}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_3(y) &:= \int_0^y \{\alpha_2(y-u) - \alpha_2(y)\}\alpha_1(u)\,\mathrm{d}u + \alpha_2(y)\sum_{n \leqslant \mathrm{e}^y} \frac{g_1(n)}{n},\\
\varrho(y,z) &:= \big[\alpha_1, \varrho_2\big]_y + \varrho_1(y)\mathcal{I}\alpha_2^*(y) + \varrho^+(y,z) + \varrho^-(y,z),\\
\varrho^+(y,z) &:= \varrho_2(y)\mathcal{I}\alpha_1^*(z) + \frac{|\alpha_2(y)|}{y}\int_0^z u\varrho_1(u)\,\mathrm{d}u,\\
\varrho^-(y,z) &:= \alpha_2^*(y)\int_z^y \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

(iii) *Lorsque les hypothèses (4·1) et (4·2) sont réalisées pour tout* $x \geqslant 9$ *et si* $\int_0^\infty \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u < \infty$, *on a, uniformément pour* $1 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\log x$ *et* $y = \log x$,

$$G(x) = x\alpha(y) + Cx\alpha_2(y) + O\Big(x\varrho(y,z) + x|\alpha_2(y)|\int_y^\infty \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u\Big), \tag{4·5}$$

avec $C := \int_0^\infty \{G_1(\mathrm{e}^u)\mathrm{e}^{-u} - \alpha_1(u)\}\,\mathrm{d}u$.

Remarque. Le point (iii), qui est susceptible de servir dans d'autres contextes, n'est pas utilisé directement dans ce travail : même lorsque les hypothèses correspondantes sont remplies, la nature particulière des fonctions que nous considérons rend (4·4) plus maniable que (4·5).

Démonstration. Posons $R_j(u) := G_j(\mathrm{e}^u) - \mathrm{e}^u\alpha_j(u)$ $(j = 1, 2)$,[(6)] et $y := \log x$. Les trois assertions énoncées résultent de la formule

$$G(x) = x\alpha(y) + x\alpha_2(y)\int_0^y \frac{R_1(u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u + O(x\varrho(y,z)) \quad (1 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}y). \tag{4·6}$$

En effet, on déduit (4·3) de (4·6) en choisissant $z = 1$, et l'on obtient (4·5) en remarquant que la condition $\varrho_1 \in \mathcal{L}^1([0,\infty[)$ implique

$$\int_0^y R_1(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = C + O\Big(\int_y^\infty \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u\Big).$$

Enfin, on déduit (4·4) de (4·6) en observant que le terme principal de (4·6) vaut encore

$$\begin{aligned} &x\alpha_3(y) + x\int_0^y \alpha_1(y-u)\alpha_2'(u)\,\mathrm{d}u \\ &\qquad - x\alpha_2(y)\Big\{\sum_{n \leqslant \mathrm{e}^y} \frac{g_1(n)}{n} - \int_0^y \frac{G_1(u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u\Big\}. \end{aligned} \tag{4·7}$$

L'hypothèse supplémentaire effectuée en (ii) implique

$$\alpha_2'(u) \ll \alpha_2(u)/(u+1) \ll \varrho_2(u),$$

donc la première intégrale est $\ll \big[\alpha_1, \varrho_2\big]_y \ll \varrho(y,z)$. De plus, il résulte d'une sommation d'Abel que l'expression entre accolades vaut

$$G_1(x)/x \ll \alpha_1(y).$$

Cela montre que le dernier terme de (4·7) est

$$\ll x|\alpha_1(y)\alpha_2(y)| \ll x\varrho_2(y)\mathcal{I}\alpha_1(y) \ll x\big[\alpha_1, \varrho_2\big]_y \ll x\varrho(y,z)$$

pour tout $z \in \big[1, \frac{1}{2}y\big]$.

---

6. On a donc $R_j(u) \ll \mathrm{e}^u\varrho_j(u)$ pour $j = 1, 2$ et $0 \leqslant u \leqslant y$.

Pour établir (4·6), nous utilisons la méthode de sommation de l'hyperbole. Posant $w := y - z$, nous pouvons écrire

$$G(x) = \int_{1-}^{\exp z} G_2\Big(\frac{x}{t}\Big)\,\mathrm{d}G_1(t) + \int_{1-}^{\exp w} G_1\Big(\frac{x}{t}\Big)\,\mathrm{d}G_2(t) - G_1(\mathrm{e}^z)G_2(\mathrm{e}^w).$$

Effectuons le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$. Compte tenu de (4·1), il s'ensuit que

$$G(x) = x\sum_{k=1}^{5} J_k(z) + O\big(x\varrho(y,z)\big),$$

avec

$$\begin{aligned}
J_1(z) &:= \int_0^z \frac{\alpha_2(y-u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}\{\mathrm{e}^u\alpha_1(u)\} + \int_0^w \frac{\alpha_1(y-u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}\{\mathrm{e}^u\alpha_2(u)\}\\
&\quad - \alpha_1(z)\alpha_2(w)\\
J_2(z) &:= \int_{0-}^z \frac{\alpha_2(y-u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}R_1(u), \qquad J_3(z) := \int_{0-}^w \frac{\alpha_1(y-u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}R_2(u),\\
J_4(z) &:= \mathrm{e}^{-y}\int_{0-}^z R_2(y-u)\,\mathrm{d}G_1(\mathrm{e}^u), \quad J_5(z) := \mathrm{e}^{-y}\int_{0-}^w R_1(y-u)\,\mathrm{d}G_2(\mathrm{e}^u).
\end{aligned}$$

Un calcul de routine fournit d'abord

$$J_1(z) = \alpha(y) - \alpha_2(y)\alpha_1(0).$$

Ensuite, nous établissons l'estimation

$$J_2(z) - \bigg\{\int_0^y \frac{R_1(u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u + \alpha_1(0)\bigg\}\alpha_2(y) \ll \varrho(y,z). \tag{4·8}$$

Pour cela, nous effectuons en premier lieu une intégration par parties, soit

$$\begin{aligned}
J_2(z) = &\frac{R_1(z)}{\mathrm{e}^z}\alpha_2(w) - R_1(0-)\alpha_2(y)\\
&+ \int_0^z \frac{R_1(u)}{\mathrm{e}^u}\{\alpha_2(y-u) + \alpha_2'(y-u)\}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Comme $R_1(0-) = -\alpha_1(0)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
J_2(z) = &\bigg\{\int_0^z \frac{R_1(u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u + \alpha_1(0)\bigg\}\alpha_2(y) + \frac{R_1(z)}{\mathrm{e}^z}\alpha_2(w)\\
&+ \int_0^z \frac{R_1(u)}{\mathrm{e}^u}B_2(u,y)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $B_2(u,y) := \alpha_2(y-u) - \alpha_2(y) + \alpha_2'(y-u)$. L'hypothèse $\alpha_2 \in \mathcal{CP}^1([0,y])$ implique $B_2(u,y) \ll (u+1)\alpha_2(y)/y$ $(0 \leqslant u \leqslant z)$. Le membre de gauche de (4·8) est donc

$$\begin{aligned}
&\ll |\alpha_2(y)| \bigg\{ \int_z^y \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u + \varrho_1(z) + \frac{1}{y}\int_0^z (u+1)\varrho_1(u)\,\mathrm{d}u \bigg\} \\
&\ll |\alpha_2(y)| \bigg\{ \int_z^y \varrho_1(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{y}\int_0^z u\varrho_1(u)\,\mathrm{d}u \bigg\} \ll \varrho(y,z).
\end{aligned}$$

Nous obtenons similairement, grâce à une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
J_3(z) &= \alpha_1(z)\frac{R_2(w)}{\mathrm{e}^w} - \alpha_1(y)R_2(0-) \\
&\qquad + \int_0^w \{\alpha_1(y-u) + \alpha_1'(y-u)\}\frac{R_2(u)}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u \\
&\ll |\alpha_1(z)|\varrho_2(y) + \big[\alpha_1, \varrho_2\big]_y \ll \varrho(y,z).
\end{aligned}$$

Les quantités $J_4(z)$ et $J_5(z)$ sont estimées, par sommation d'Abel, en majorant les mesures $\big|\mathrm{d}G_j\big|$ par $\mathrm{d}G_j^*$ $(j=1,2)$ et en faisant appel à (4·2). On obtient, d'une part,

$$\begin{aligned}
J_4(z) &\ll \int_{0-}^z \mathrm{e}^{-u}\varrho_2(y-u)\,\mathrm{d}G_1^*(\mathrm{e}^u) \\
&\ll \alpha_1^*(z)\varrho_2(w) + \int_0^z \alpha_1^*(u)\varrho_2(y-u)\,\mathrm{d}u \\
&\ll \varrho_2(y)\mathcal{I}\alpha_1^*(z) \ll \varrho(y,z),
\end{aligned}$$

et, semblablement, de l'autre,

$$\begin{aligned}
J_5(z) &\ll \int_{0-}^w \mathrm{e}^{-u}\varrho_1(y-u)\,\mathrm{d}G_2^*(\mathrm{e}^u) \\
&\ll \varrho_1(z)\alpha_2^*(y) + \int_0^w \varrho_1(y-u)\alpha_2^*(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \varrho_1(z)\alpha_2^*(y) + \int_z^y \varrho_1(v)\alpha_2^*(y-v)\,\mathrm{d}v \\
&\ll \int_z^y \varrho_1(v)\alpha_2^*(y-v)\,\mathrm{d}v \\
&\ll \varrho_1(y)\mathcal{I}\alpha_2^*(y) + \alpha_2^*(y)\int_z^y \varrho_1(v)\,\mathrm{d}v \ll \varrho(y,z).
\end{aligned}$$

Cela achève la preuve du Lemme 4.1. □

L'énoncé suivant est dévolu à une spécialisation du Lemme 4.1, que nous explicitons de façon à le rendre directement exploitable dans les différents cas d'application envisagés dans ce travail. Étant donné un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$, nous posons

$$P(X,u):=P(X+\log u)\qquad(u>0).$$

Lemme 4.2. *Conservons les hypothèses et les notations du Lemme 4.1. Supposons de plus que, pour $j=1,2$, il existe des nombres réels e_j, $s_j\geqslant 0$, $q_j\in[0,1]$, $t_j\geqslant 0$, et des polynômes $P_j\in\mathbb{C}[X]$ tels que l'on ait*

$$\alpha_j(u)=u^{e_j}P_j(\log u),\ \ \varrho_j(u)=u^{e_j-q_j}(\log u)^{s_j},\ \ \alpha_j^*(u)=u^{e_j+t_j}\quad(u\geqslant 3).$$

Supposons encore que d_1 et d_2 sont des entiers naturels satisfaisant à $\deg(P_j)\leqslant d_j$ pour $j=1,2$, et posons $\eta_j:=\begin{cases}1 & \text{si } e_j-q_j=-1,\\ 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$

(i) *Si $e_j-q_j\geqslant -1$ ($j=1,\,2$), on a*

$$G(x)=x(\log x)^{e_1+e_2+1}\Big\{P_3(\log_2 x)+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{s_3}}{(\log x)^{q_3}}\Big)\Big\}\qquad(x\geqslant 3),\tag{4·9}$$

où $P_3(X)$ est le polynôme de degré $\deg(P_1)+\deg(P_2)$ défini par

$$P_3(X):=\int_0^1 P_1(X,u)P_2(X,1-u)\,u^{e_1}(1-u)^{e_2}\,\mathrm{d}u,$$

et où l'on a posé

$$q_3:=\min\{q_1-t_2,q_2\},$$
$$s_3:=\begin{cases}s_1+\eta_1 & \text{si } q_1<q_2+t_2,\\ \max\{s_1+\eta_1,d_1+s_2+\eta_2,d_1+d_2+\eta_2\} & \text{si } q_1=q_2+t_2,\\ d_1+s_2+\eta_2 & \text{si } q_1>q_2+t_2.\end{cases}$$

(ii) *Si $e_1=-1$, $d_1=0$, $q_1=1$, $s_1=1$, $t_1\in]0,1]$,*[7] *et si $e_2\in\mathbb{N}$, $e_2-q_2\geqslant -1$, on a pour $x\geqslant 3$*

$$G(x)=x(\log x)^{e_2}\Big\{P_2(\log_2 x)\sum_{m\leqslant x}\frac{g_1(m)}{m}+P_4(\log_2 x)+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{s_4}}{(\log x)^{q_4}}\Big)\Big\},\tag{4·10}$$

où $P_4(X)$ est le polynôme défini par

$$\begin{aligned}P_4(X)=P_1(0)\Big\{&-P_2(X)\sum_{1\leqslant j\leqslant e_2}\frac{1}{j}\\&+\int_0^1\big\{P_2(X,1-v)-P_2(X)\big\}\frac{(1-v)^{e_2}}{v}\,\mathrm{d}v\Big\},\end{aligned}\tag{4·11}$$

7. De sorte que $\alpha_1(u)=P_1(0)/u$, $\varrho_1(u)=(\log u)/u^2$, $\alpha_1^*(u)=u^{t_1-1}$ pour $u\geqslant 3$.

et où l'on a posé

$$q_4 := \min\Big\{\frac{q_2 - t_1 t_2}{1 + t_1}, 1 - t_2\Big\},$$
$$s_4 := \begin{cases} 1 & \textit{si } q_2 + t_2 > 1 + t_1, \\ \max\{1, s_2\} & \textit{si } q_2 + t_2 \leqslant 1 + t_1. \end{cases}$$

Démonstration. La première assertion résulte directement du Lemme 4.1(i). D'une part, la majoration $\alpha_2'(u) \ll (\log u)^{d_2}/u$ implique

$$\alpha(y) = y^{e_1+e_2+1}\Big\{P_3(\log y) + O\Big(\frac{(\log y)^{d_1+d_2+\eta_2}}{y}\Big)\Big\}.$$

D'autre part, on vérifie par un calcul de routine que

$$\varrho(y) \ll y^{e_1+e_2+1}\Big\{\frac{(\log y)^{d_1+s_2+\eta_2}}{y^{q_2}} + \frac{(\log y)^{s_1+\eta_1}}{y^{q_1-t_2}}\Big\}.$$

La réunion de ces deux évaluations fournit bien (4·9).

Dans le cas (ii), on a $\alpha_2(u)/u \ll 1/u^2 \ll \varrho_1(u)/u$, et l'on est en position d'appliquer (4·4). Un calcul standard permet de vérifier que le terme d'erreur de cette formule satisfait, avec $y := \log x$,

$$\varrho(y,z) \ll y^{e_2}\Big\{\frac{(\log y)^{s_2+1}}{y^{q_2}} + \frac{\log y}{y^{1-t_2}} + \frac{(\log y)^{s_2}}{y^{q_2}}z^{t_1} + \frac{(\log y)^{d_2+2}}{y} + \frac{y^{t_2}\log y}{z}\Big\}.$$

Pour le choix quasi-optimal $z = \frac{1}{2}y^{\min\{1,(q_2+t_2)/(1+t_1)\}}$,[8] on remarque, en utilisant notamment les inégalités $t_1 > 0$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, que les seuls termes susceptibles de dominer dans cette majoration sont le troisième et le cinquième. On obtient ainsi

$$\varrho(y,z) \ll y^{e_2-q_4}(\log y)^{s_4} \qquad (y \geqslant 2).$$

Il reste à évaluer le terme principal $\alpha_3(y)$ de (4·4). Il suffit de considérer l'intégrale apparaissant dans la définition de α_3, car l'autre terme a été reporté sans changement dans (4·10). Il résulte du changement de variable $v = u/y$ que

$$\int_0^y \alpha_1(u)\{\alpha_2(y-u) - \alpha_2(y)\}\,\mathrm{d}u = y^{e_2}P_4(\log y)\big\{1 + O(1/y)\big\}^{(9)} \tag{4·12}$$

8. Un choix optimal relativement aux puissances de y et à celles de $\log y$ serait
$$z = \tfrac{1}{2}\min\Big\{y, y^{(q_2+t_2)/(1+t_1)}(\log y)^{(1-s_2)/(1+t_1)}\Big\}.$$
Pour éviter de trop compliquer l'énoncé final, nous choisissons la puissance de $\log y$ égale à 0.

9. Le terme d'erreur prend en compte le fait que $\alpha_1(u)$ n'est connu que pour $u \geqslant 3$.

avec

$$\begin{aligned}P_4(X) &= P_1(0)\int_0^1 \big\{P_2(X,1-v)(1-v)^{e_2}-P_2(X)\big\}\frac{\mathrm{d}v}{v}\\ &= P_1(0)\Big\{-P_2(X)\sum_{1\leqslant j\leqslant e_2}\frac{1}{j}+\int_0^1\big\{P_2(X,1-v)-P_2(X)\big\}(1-v)^{e_2}\frac{\mathrm{d}v}{v}\Big\}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule $\int_0^1\big\{(1-v)^{e_2}-1\big\}\,\mathrm{d}v/v=-\sum_{1\leqslant j\leqslant e_2}1/j$. Cela achève la démonstration de (4·10). □

5. Moments d'ordres 1 et 2 des fonctions de $\mathcal{E}$

5.1. Valeurs moyennes : preuve du Théorème 1.2(i)

Nous allons estimer $M_1(x;f)$ grâce au Théorème 1.1(i), ce qui fournira évidemment une approximation de $M_1(x;f_0)$. Une voie naturelle consisterait à évaluer directement $R(x;f)$ à partir du Lemme 2.5. Cependant, l'introduction d'une fonction auxiliaire f_1, définie par

$$f_1(1)=0,\qquad f_1(n):=f(n)+b\log_2 n+b+a\qquad (n\geqslant 2),$$

et qui vérifie $f_1(k)=f(p_k)+b+O(\log_2 k/\log k)$, permet de gagner un peu de précision.

Un calcul de routine fournit

$$\sum_{n\leqslant x}f_1(n)=\sum_{n\leqslant x}f(n)+bx\log_2 x+(b+a)x+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big). \tag{5·1}$$

De plus, la majoration (1·2) pour $r_k(f)$, associée au théorème des nombres premiers sous la forme (3·9), permet aisément de montrer qu'il existe une constante $C_5=C_5(f)$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned}\sum_{p_k\leqslant x}f_1(k)\Big[\frac{x}{p_k}\Big]&=\sum_{p_k\leqslant x}f(p_k)\Big[\frac{x}{p_k}\Big]+bx\log_2 x+C_5(f)x\\ &\quad+O\Big(x\frac{\log_2 x}{\log x}\Big).\end{aligned} \tag{5·2}$$

En appliquant alors le Lemme 2.5 à f (ce qui est autorisé grâce au Lemme 2.1), on déduit, par différence, de (5·1) et (5·2) la formule asymptotique

$$R(x;f_1)=b+a+a_1(f)-C_5(f)+O(\log_2 x/\log x),$$

d'où

$$\overline{\mathfrak{T}R}(x;f_1)\ll\frac{\log_2 x}{(\log x)^2}.$$

Comme on a trivialement $f_1(n)\ll\log n$, on peut appliquer le Théorème 1.1(i) à f_1, ce qui fournit

$$M_1(x;f_1)=\Phi_1(f_1)x\log(x\log x)+O(\log_2 x/\log x).$$

En reportant dans (5·1), on obtient bien la relation annoncée en (i).

Remarque. Un calcul direct reposant sur la majoration (1·2) et le Lemme 2.5 fournit

$$\overline{\mathfrak{T}R}(x, f) = \frac{-b\log_2 x - a - b}{\log x} + O\Big(\frac{\log_2 x}{(\log x)^2}\Big).$$

Lorsque $b \neq 0$, la fonction $\varepsilon(x)$ associée à f définie dans l'énoncé du Théorème 1.1 est donc de l'ordre de $\log_2 x/\log x$. L'introduction de la fonction f_1, au lieu d'une application directe du Théorème 1.1(i) à f, permet donc, dans le cas général, le gain d'un facteur $\log_2 x$ dans le terme d'erreur de l'évaluation finale (1·19) pour $M_1(x; f_0)$.

5.2. Valeurs moyennes : preuve du Théorème 1.3

Le Théorème 1.2(i) implique en particulier que l'on a

$$M_1(x; g) \ll x\log_2 x/\log x = o(x)$$

pour toute fonction g de $\mathcal{E}(0, 0)$ telle que $\Phi_1(g) = 0$. Sous la condition supplémentaire $g \geqslant 0$, le Lemme 2.5 implique alors $a_1(g) = 0$ d'où $g = 0$. On peut donc énoncer que l'on a

$$M_1(x; g) \gg x\log x$$

pour toute fonction g de $\mathcal{E}(0, 0)$ satisfaisant à $g \geqslant 0$ et $M_1(x; g) \gg x$.

Cela nous permet de ramener la preuve du Théorème 1.3 à celle de l'existence, sous les hypothèses effectuées, d'une fonction g de $\mathcal{E}(0, 0)$ telle que $0 \leqslant g \leqslant f$ et $M_1(x; g) \gg x$. Nous allons construire explicitement une telle fonction minorante.

L'hypothèse $f(p_k) \geqslant f(k)$ implique immédiatement $f \geqslant 0$. Comme $f \neq 0$, il existe un entier $k_0 \geqslant 2$ tel que $f(k_0) > 0$. On définit alors $g \in \mathcal{E}(0, 0)$ par $g(2) := 0$ et

$$r_k(g) = g(p_k) - g(k) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k_0, \\ f(k_0) & \text{si } k = k_0. \end{cases}$$

Comme $r_k(g) \geqslant 0$ pour tout entier k, on a bien $g \geqslant 0$. De plus, $f(n) \geqslant g(n) = 0$ pour $n \leqslant k_0$, et $f(p_k) \geqslant f(k) = f(k) + g(p_k) - g(k)$ pour $k > k_0$. Cela implique $f(p_k) \geqslant g(p_k)$ pour $k \leqslant k_0$, donc, par additivité, $f(n) \geqslant g(n)$ pour $n \leqslant p_{k_0}$. En itérant le procédé, on obtient finalement que $f(n) \geqslant g(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Il reste à montrer que $M_1(x; g) \gg x$. Cela découle du Lemme 2.5 qui fournit, puisque $g(p_{k_0}) = f(k_0)$,

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \sum_{p\leqslant x} g(p)\Big[\frac{x}{p}\Big] + x\sum_p \frac{g(p)}{p(p-1)} + O(\sqrt{x}) \geqslant x\frac{f(k_0)}{p_{k_0}} + O(\sqrt{x}).$$

Cela achève la démonstration du Théorème 1.3.

5.3. Écart quadratique moyen : preuve du Théorème 1.2(ii)

La méthode consiste simplement à appliquer le Théorème 1.1 à f_0^2. Il nous faut donc une estimation de $R(x; f_0^2)$, et nous employons à cette fin le Lemme 2.4 avec $f = f_0$ et $k = 2$. Il reste à estimer les quantités $w_2(x; f_0)$, $y_2(x; f_0)$ et $z_2(x; f_0)$ apparaissant dans (2·6).

Considérons d'abord la quantité $w_2(x; f_0)$, et appliquons le Lemme 4.2 en choisissant

$$g_1(m) := \begin{cases} f_0(p) & \text{si } m = p^\nu, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases} \qquad g_2(n) := f_0(n),$$

de sorte que $w_2(x; f_0)$ est exactement égal à la fonction sommatoire $G(x)$ du produit de convolution de g_1 et g_2.

Il résulte du Théorème 1.2(i) que

$$G_2(x) = M_1(x; f_0) = xE_1(\log_2 x) + O\Big(\frac{x \log_2 x}{\log x}\Big) \qquad (x \geqslant 3).^{(10)} \tag{5·3}$$

De plus, pour tout $m \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} f_0(p_m) &= f(p_m) - \Phi_1(f) \log p_m \\ &= f_0(m) + a + b \log_2 m - \Phi_1(f) \log\Big(\frac{p_m}{m}\Big) + O\Big(\frac{\log_2 2m}{\log 2m}\Big) \\ &= f_0(m) - b_0 - E_1(\log_2 m) + O\Big(\frac{\log_2 2m}{\log 2m}\Big). \end{aligned} \tag{5·4}$$

d'après (1·2) et le théorème des nombres premiers. En tenant compte de (5·3), on en déduit que

$$G_1(x) = \sum_{p^\nu \leqslant x} f_0(p) = -b_0 \frac{x}{\log x} + O\Big(x \frac{\log_2 x}{(\log x)^2}\Big). \tag{5·5}$$

En adjoignant à (5·3) et (5·5) l'estimation triviale $|f_0(n)| \ll \log(3n)$, nous sommes donc en position d'appliquer le Lemme 4.2(ii) avec $e_2 = 0$, $q_2 = 1$, $t_1 = t_2 = 1$. On a $P_1(X) = -b_0$, $P_2(X) = E_1(X)$, et donc, par (4·11),

$$P_4(X) = b_0^2 \int_0^1 \log(1 - v) \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\tfrac{1}{6}\pi^2 b_0^2.$$

On a encore

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{g_1(n)}{n} = \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f_0(p)}{p^\nu} = \frac{M_1(x; f_0)}{x} + \frac{1}{x} \sum_{p^\nu \leqslant x} f_0(p) \Big\langle \frac{x}{p^\nu} \Big\rangle,$$

10. Rappelons que $E_1(X) := -b_0 X - b_0 - a$, $b_0 := b - \Phi_1(f)$.

où la seconde égalité résulte de la complète additivité de f_0. La contribution à la dernière somme en p des puissances p^ν avec $\nu \geqslant 2$ est clairement $O(\sqrt{x})$. Au vu de (5·5), celle qui correspond à $\nu = 1$ peut être estimée par le Lemme 3.1 avec $L := \log x$, $\varrho := 1/\log x$. Elle est donc $\ll (\log_2 x)/\log x$. En tenant compte de (5·3), nous obtenons finalement

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{g_1(n)}{n} = E_1(\log_2 x) + O\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\Big), \tag{5·6}$$

de sorte que le Lemme 4.2(ii) fournit

$$w_2(x; f_0) = B_2(\log_2 x) + b_0^2(1 - \tfrac{1}{6}\pi^2) + O\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{q_4}}\Big),^{(11)} \tag{5·7}$$

avec $q_4 = q_4(t_1, t_2) := \min\{(1-t_1t_2)/(t_1+1), 1-t_2\}$, pour toutes constantes $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$ telles que

$$\sum_{p^\nu\leqslant x} |f_0(p)| \ll x(\log x)^{t_1-1}, \quad \sum_{n\leqslant x} |f_0(n)| \ll x(\log x)^{t_2} \qquad (x \geqslant 2). \tag{5·8}$$

Ainsi qu'il a été mentionné plus haut, la majoration triviale de f_0 permet de choisir $t_1 = t_2 = 1$, et donc $q_4 = 0$. Nous réutiliserons (5·7) plus loin, avec des valeurs de t_1 et t_2 améliorées issues d'une première estimation de $M_1(x; f_0^2)$.

La formule (5·7) implique $w_2(x; f_0) \ll (\log_2 x)^2$, donc les conditions (1·8) pour la convergence de $\mathfrak{T}w_2(x; f_0)$ sont remplies. Il suit

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{T}w_2}(x; f_0) &= -\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}w_2(t; f_0)}{\log t} \\ &= -\int_x^\infty \frac{B_2'(\log_2 t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{1+q_4}}\Big). \end{aligned} \tag{5·9}$$

Tournons maintenant notre attention vers les quantités $y_2(x; f_0)$ et $z_2(x; f_0)$ apparaissant dans (2·6).[12] Nos estimations nécessitent le résultat auxiliaire

$$\begin{aligned} \Delta_2(x) &:= \sum_{p_k\leqslant x} \big\{f_0(p_k)^2 - f_0(k)^2\big\} \\ &= -x\frac{B_2(\log_2 x)}{\log x} + O\Big(x\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{q_5}}\Big), \end{aligned} \tag{5·10}$$

avec $q_5 := 2 - t_2$. Cette formule est obtenue, à partir de (5·4) et (5·8), par sommation d'Abel. Nous omettons les détails de la vérification.

11. On rappelle que $B_2(X) := E_1(X)^2 - b_0^2$.
12. Pour la commodité du lecteur, rappelons que

$$y_2(x; f_0) := -\frac{1}{x}\sum_{p_k\leqslant x} \{f(p_k)^2 - f(k)^2\}\Big\langle\frac{x}{p_k}\Big\rangle, \qquad z_2(x; f) := \sum_{p_k\leqslant x} \frac{f(p_k)^k - f(k)^2}{p_k}.$$

Nous pouvons maintenant estimer $y_2(x;f_0)$. On a $t_2 \leqslant 1$, donc $q_5 \geqslant 1$. La formule (5·10) fournit donc, au vu du Lemme 3.2,

$$y_2(x;f_0) \ll (\log_2 x)^3/\log x,$$

et par conséquent

$$\overline{\mathfrak{T}y_2}(x;f_0) \ll (\log_2 x)^3/(\log x)^2. \tag{5·11}$$

Semblablement, (5·10) nous permet d'estimer $\mathfrak{T}z_2(x;f_0)$. On a par (1·6)

$$\mathfrak{T}z_2(x;f_0) = \sum_{p_k\leqslant x} \frac{f_0(p_k)^2 - f_0(k)^2}{p_k \log p_k} - \frac{f_0(2)^2(1-\log 2)}{2\log 2},$$

donc (5·10) garantit la convergence de $\mathfrak{T}z_2(x;f_0)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par sommation d'Abel, il suit

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}z_2}(x;f_0) &= -\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}z_2(x;f_0)}{\log t} = -\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\Delta_2(t)}{t\log t}\\ &= \int_x^\infty \frac{B_2(\log_2 t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{q_5}}\Big).\end{aligned} \tag{5·12}$$

En reportant (5·9), (5·11) et (5·12) dans (2·5) et en observant que

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{B_2(\log_2 t)}{\log t} = \frac{B_2(\log_2 t) - B_2'(\log_2 t)}{t(\log t)^2},$$

nous obtenons

$$\overline{\mathfrak{T}R}(x;f_0^2) = \frac{B_2(\log_2 x)}{\log x} + O\Big(\frac{(\log_2 x)^3}{(\log x)^2} + \frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{1+q_4}}\Big), \tag{5·13}$$

puisque $q_5 \geqslant 1 + q_4$.

Comme $q_4 = 0$ est une valeur admissible, on a

$$\overline{\mathfrak{T}R}(x;f_0^2) \ll \frac{(\log_2 x)^2}{\log x}, \tag{5·14}$$

et le Théorème 1.1(i) nous permet d'en déduire l'existence d'une constante Φ_2 telle que

$$M_2(x;f_0) = M_1(x;f_0^2) = \Phi_2 x\log x + O(x(\log_2 x)^2).$$

Il résulte immédiatement de cette estimation, via l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$\sum_{m\leqslant x} |f_0(m)| \ll x\sqrt{\log x}, \qquad \sum_{p^\nu\leqslant x} |f_0(p)| \ll x/\sqrt{\log x} \qquad (x \geqslant 2),$$

où la seconde estimation découle de la première par (5·4). Cela signifie que (5·8) est valable avec $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$. On a donc (5·13) avec $q_4 = q_4(\frac12,\frac12) = \frac12$. Une nouvelle application du Théorème 1.1(i) fournit alors l'estimation requise (1·20) pour $M_2(x;f_0)$.

5.4. Preuve du Théorème 1.4

Supposons que $f \in \mathcal{E}$ vérifie $\Phi_2(f_0) = 0$. On déduit alors des formules (i) et (ii) du Théorème 1.2 que

$$\sum_{n \leqslant x} \{f_0(n) - E_1(x)\}^2 = -b_0^2 x + o(x).$$

Cela n'est possible que si $b_0 = 0$, et donc $E_1(X) = -a$. De plus, on a alors nécessairement $f_0(n) = a + o(1)$ pour presque tout entier n. Considérons alors un nombre premier p fixé. Il existe une suite $\mathcal{A}$ de densité unité telle que l'on ait, lorsque n tend vers l'infini en restant dans $\mathcal{A}$, simultanément $f_0(n) = a + o(1)$ et $f_0(pn) = a + o(1)$. Comme f_0 est complètement additive, il vient $f_0(p) = f_0(np) - f_0(n) = o(1)$, donc $f_0(p) = 0$. Puisque p est arbitraire, on obtient bien $f_0 = 0$ et finalement $f = \Phi_1(f) \log$.

6. Moments centrés d'ordre $k \geqslant 3$: preuve du Théorème 1.2(iii)

Nous nous proposons d'établir ici le Théorème 1.2(iii), soit

$$M_j(x; f_0) = \mu_r x (\Phi_2 \log x)^{r-s} \Big\{ E_j(\log_2 x) + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta_{j4}^+}}{(\log x)^{1-s/3}} \Big) \Big\}, \tag{6·1}$$

pour $j = 2r - s \geqslant 3$, $s = 0$ ou 1,[13] où nous employons la notation δ_{ji}^+ définie en (1·18). Nous procédons par récurrence sur $j \geqslant 3$. À chaque étape, l'argument-clef est fourni par le Théorème 1.1, avec une dichotomie relative à la parité de j. L'initialisation est fournie par les points (i) et (ii) du Théorème 1.2, qui impliquent (6·1) lorsque $j = 1$ ou $j = 2$.

La constante Φ_2 est non nulle d'après le Théorème 1.4. Nous pouvons donc supposer $\Phi_2 = 1$, quitte à considérer $f/\sqrt{\Phi_2}$ à la place de f.

Techniquement, la démonstration se réduit essentiellement à estimer, à l'aide de l'hypothèse de récurrence, les quantités $w_k(x; f_0)$, $y_k(x; f_0)$ et $z_k(x; f_0)$ définies au Lemme 2.4. Cela fournit une évaluation de $R(x; f_0^k)$ suffisante pour appliquer le Théorème 1.1 qui, à son tour, produit l'estimation recherchée pour alimenter la récurrence.

La quantité $w_k(x; f_0)$ est une combinaison linéaire des fonctions sommatoires des produits de convolution $f^j * \big(\chi f^{k-j}\big)$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ avec $\chi(1) := 0$ et $\chi(n) := \Lambda(n)/\log n$ pour $n \geqslant 2$. Elle relève donc du Lemme 4.2 : au vu de (5·4), la fonction sommatoire de chacun des termes du produit peut être estimée grâce à l'hypothèse de récurrence.

13. On rappelle que $E_j(X) := E_1(X) + (r-1)b_1$ pour $j = 2r - 1$, $E_j(X) := 1$ pour $j = 2r$.

Les comportements asymptotiques des expressions $y_k(x;f_0)$ et $z_k(x;f_0)$ sont directement liés à celui de la fonction auxiliaire

$$\Delta_k(x) := \sum_{p_m\leqslant x} \big\{f_0(p_m)^k - f_0(m)^k\big\}, \tag{6·2}$$

qui relève lui-même de l'hypothèse de récurrence via (5·4). Une évaluation de $\Delta_k(x)$ implique, par le Lemme 3.2, une estimation de $y_k(x;f_0)$, et, par sommation d'Abel, une estimation de $z_k(x;f_0)$.

Nous rassemblons dans le lemme suivant les approximations obtenues sous l'hypothèse de récurrence pour $w_k(x;f_0)$, $y_k(x;f_0)$ et $z_k(x;f_0)$. Nous écrivons systématiquement dans toute la suite de ce paragraphe

$$k = 2\ell + 2 - h$$

avec $\ell \geqslant 1$, $h = 0$ ou 1.

Lemme 6.1. *Soit $k = 2\ell + 2 - h$ avec $\ell \geqslant 1$, $h = 0$ ou 1. Si $\Phi_2(f) = 1$ et si l'estimation (6·1) est vraie pour tout indice $j \leqslant k-1$, alors on a*

$$\begin{cases} w_k(x;f_0) = \mu_{\ell+1}(\log x)^{\ell+1-h}\big\{E_{k-2}(\log_2 x) + b_{0h} + O\big(W_k(x)\big)\big\},\\ y_k(x;f_0) \ll (\log x)^{\ell-1}(\log_2 x)^3,\\ z_k(x;f_0) = -\dfrac{\mu_{\ell+1}}{\ell}(\log x)^{\ell}\Big\{hE_1(\log_2 x) + h\dfrac{b_0(\ell+1)}{\ell} + O\big(Z_k(x)\big)\Big\}, \end{cases} \tag{6·3}$$

où l'on a posé $b_{0h} := \dfrac{b_0 h}{\ell} - \dfrac{1-h}{\ell+1}$, *et*

$$W_k(x) := \frac{(\log_2 x)^{2+\delta_{k4}^+ + \delta_{k5}^+}}{(\log x)^{1-h/3}}, \quad Z_k(x) := \frac{(\log_2 x)^{2+5h}}{(\log x)^h}$$

Nous différons un instant la preuve du Lemme 6.1 et nous nous attachons d'abord à en déduire la preuve de la formule asymptotique (6·1).

Examinons en premier lieu le cas $h = 1$, c'est-à-dire $k = 2\ell + 1$. En reportant les estimations (6·3) dans (2·5), nous obtenons

$$R(x;f_0^{2\ell+1}) = \mu_{\ell+1}(\log x)^{\ell}\Big\{\frac{\ell-1}{\ell}E_k(\log_2 x) - \frac{b_0}{\ell^2} + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta_{\ell 2}^+}}{(\log x)^{2/3}}\Big)\Big\}. \tag{6·4}$$

Lorsque $\ell = 1$, les estimations (6·3) et (6·4) ne font pas intervenir la constante b_1 apparaissant dans la définition des polynômes $E_k(X)$. Nous allons en fait définir b_1 à partir de (6·4) pour $\ell = 1$, $h = 1$. En reportant (6·4) dans (1·7), nous obtenons l'existence d'une constante $K_1 = K_1(f)$ telle que

$$\mathfrak{T}R(x,f_0^3) = -b_0\mu_2\log_2 x + K_1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{2/3}}\Big).$$

Le Théorème 1.1(ii) implique alors l'existence d'une constante b_1[14] telle que

$$M_3(x;f_0)=\mu_2\,x\log x\Big\{E_1(\log_2 x)+b_1+O\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{2/3}}\Big)\Big\}.$$

Cette estimation coïncide bien avec (6·1) pour $j=3$.

Lorsque $\ell>1$, un calcul routinier, dont nous omettons les détails, permet de déduire de (6·4) que

$$\mathfrak{T}R(x;f_0^{2\ell+1})=\mu_{\ell+1}(\log x)^{\ell-1}\Big\{E_{2\ell+1}(\log_2 x)+O\Big(\frac{(\log_2 x)^4}{(\log x)^{2/3}}\Big)\Big\}.$$

L'estimation requise de $M_k(x;f_0)$ en découle par application du Théorème 1.1(iii).

Considérons ensuite le cas $h=0$, soit $k=2\ell+2$. Nous obtenons comme précédemment par (2·5) et (6·3) que

$$R(x;f_0^{2\ell+2})=\frac{\ell}{\ell+1}\mu_{\ell+1}(\log x)^{\ell+1}\Big\{1+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{3+\delta_{\ell 2}^+}}{\log x}\Big)\Big\}.$$

Le Théorème 1.1(iii) fournit alors

$$M_{2\ell+2}(x;f_0)=\mu_{\ell+1}x(\log x)^{\ell+1}\Big\{1+O\Big(\frac{(\log_2 x)^4}{\log x}\Big)\Big\},$$

c'est-à-dire (6·1) pour $j=k=2(\ell+1)$.

Cela achève la preuve inductive de (6·1).

Démonstration du Lemme 6.1. Nous devons établir (6·3) en supposant (6·1) valide pour tout $j\leqslant k-1=2\ell+1-h$.

Estimation de $w_k(x;f_0)$. On a par (2·6)

$$w_k(x;f_0)=\sum_{j=1}^{k-1}Q_{j,k}(x),\tag{6·5}$$

avec, pour $1\leqslant j\leqslant k-1$,

$$Q_{j,k}(x):=\frac{1}{x}\binom{k-1}{j}\sum_{p^\nu n\leqslant x}\nu^{k-j-1}f_0(p)^{k-j}f_0(n)^j.\tag{6·6}$$

L'estimation de ces quantités relève du Lemme 4.2, sous réserve de disposer de formules asymptotiques pour

$$N_i(x):=\sum_{p^\nu\leqslant x}\nu^{i-1}f_0(p)^i$$

14. Précisément définie par $b_1=a+b_0+\frac{1}{3}\{K_1+K(f_0^3)\}$, avec la notation du Théorème 1.1(ii).

lorsque $1 \leqslant i \leqslant k-1$. De telles formules peuvent être déduites de (6·1) et (5·4) par sommation d'Abel. Nous omettons les détails techniques de cette déduction, mais nous rassemblons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant. Afin d'en faciliter l'écriture, nous posons

$$b_{2\ell-1}^* = (\ell-1)b_1 - b_0, \qquad b_{2\ell}^* = 1 \qquad (\ell \geqslant 1).$$

Lemme 6.2. *Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\Phi_2 = 1$. Soit $k \geqslant 2$. Si l'estimation (6·1) est vérifiée pour $j \leqslant k$, alors on a, lorsque $s \in \{0,1\}$ et $2 \leqslant j = 2r - s \leqslant k$,*

$$N_j(x) = \mu_r x(\log x)^{r-1-s}\Big\{b_j^* + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta_{j4}^+}}{(\log x)^{1-s/3}}\Big)\Big\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{6·7}$$

Nous ferons également usage de la formule classique, relative à la fonction Bêta d'Euler,

$$\binom{a+b}{a}(a+b+1)\int_0^1 u^a(1-u)^b \,\mathrm{d}u = 1 \qquad (a \in \mathbb{N},\, b \in \mathbb{N}). \tag{6·8}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer les $Q_{j,k}(x)$. Lorsque j est pair ou lorsque $(j,k) = (2\ell+1, 2\ell+2)$, nous choisissons dans le Lemme 4.2

$$g_1(m) := \begin{cases} \nu^{k-j-1} f_0(p)^{k-j} & \text{si } m = p^\nu, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$
$$g_2(n) := \binom{k-1}{j} f_0(n)^j.$$

Cependant, à cause de la dissymétrie des rôles de g_1 et g_2 dans la définition de $\varrho(y,z)$ au Lemme 4.1, il est nécessaire d'intervertir ces définitions dans les autres cas.

Les approximations de G_1 et G_2 sont données par l'hypothèse de récurrence (6·1) et le Lemme 6.2. Il reste donc à déterminer des majorations de $M_j^*(x; f_0)$ et $N_i^*(x)$ pour $i, j \leqslant k-1$.[15] Seul le cas des indices impairs est évidemment à considérer. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse de récurrence relative aux indices pairs impliquent d'abord, lorsque $2i + 1 \leqslant k - 2$,

$$\begin{aligned} M_{2i+1}^*(x; f_0) &\ll \sqrt{M_{2i}(x; f_0) M_{2i+2}(x; f_0)} \ll x(\log x)^{i+1/2}, \\ N_{2i+1}^*(x) &\ll \sqrt{N_{2i}(x) N_{2i+2}(x)} \ll x(\log x)^{i-1/2}, \end{aligned} \tag{6·9}$$

où, l'on a fait appel à (6·7) pour la seconde majoration. Lorsque $(2i+1, k) = (2\ell+1, 2\ell+2)$, cette technique est inopérante car nous ne disposons pas

15. En accord avec la notation introduite au Lemme 4.1, nous posons systématiquement, ici et dans la suite, $G^*(x) := \sum_{n \leqslant x} |g_n|$ lorsque $G(x) = \sum_{n \leqslant x} g_n$.

d'une majoration suffisante pour $M^*_{2\ell+2}(x;f_0)$ ou $N^*_{2\ell+2}(x)$. Nous avons alors recours aux majorations triviales

$$\begin{aligned} M^*_{2\ell+1}(x;f_0) &\ll (\log x)M^*_{2\ell}(x;f_0) \ll x(\log x)^{\ell+1}, \\ N^*_{2\ell+1}(x) &\ll (\log x)N^*_{2\ell}(x) \ll x(\log x)^{\ell}. \end{aligned} \tag{6·10}$$

Les estimations (5·5), (6·1), (6·7), (6·9) et (6·10) fournissent l'ensemble des informations nécessaires pour évaluer $Q_{j,k}(x)$ pour $j \leqslant k-1$ en appliquant le Lemme 4.2. Nous rassemblons au Tableau 1 les valeurs spécifiques qui en résultent pour les différents paramètres apparaissant dans les hypothèses de cet énoncé.(16)

(j,h)	$(2i,h)$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell-h)$	$(2\ell,1)$	$(2i+1,1)$ $(0 \leqslant i \leqslant \ell-1)$	$(2i+1,0)$ $(0 \leqslant i \leqslant \ell-1)$	$(2\ell+1,0)$	$(1,0)$
e_1	$\ell-i-h$	-1	i	i	-1	0
d_1	0	0	1	1	0	1
q_1	$1-h/3$	1	$(2+\delta_{0i})/3$	$(2+\delta_{0i})/3$	1	1
s_1	$2+2\delta^+_{k-2i,4}$	1	$1+\delta^+_{i1}+2\delta^+_{i2}$	$1+\delta^+_{i1}+2\delta^+_{i2}$	1	1
t_1	$h/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
e_2	i	ℓ	$\ell-i-1$	$\ell-i-1$	ℓ	$\ell-1$
d_2	0	0	0	0	1	0
q_2	1	1	1	$2/3$	1	$2/3$
s_2	$2+2\delta^+_{i2}$	$2+2\delta^+_{\ell 2}$	$2+2\delta^+_{\ell,i+2}$	$2+2\delta^+_{\ell,i+2}$	$2+2\delta^+_{\ell 2}$	$2+2\delta^+_{\ell 2}$
t_2	0	0	0	$1/2$	1	1

Tableau 1. — *Paramètres du Lemme 4.2 pour l'estimation de $Q_{j,k}(x)$ avec $k = 2\ell+2-h$, $j \leqslant k-1$.*

Considérons d'abord les cas où l'indice j est pair, disons $j = 2i$ avec $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Lorsque $1 \leqslant i \leqslant \ell-h$, nous appliquons (4·9) avec $G_1(x) = N_{k-2i}(x)$ et $G_2(x) = \binom{k-1}{2i}M_{2i}(x;f_0)$. Nous obtenons

$$Q_{2i,k}(x) = (\log x)^{\ell+1-h}\Big\{C_{2i,k} + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+\delta^+_{k4}+\delta^+_{k5}}}{(\log x)^{1-h/3}}\Big)\Big\}, \tag{6·11}$$

16. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici ces hypothèses sous forme condensée : on a pour $j = 1, 2$ et x assez grand
$G_j(x) = x(\log x)^{e_j}\{P_j(\log_2 x) + O((\log_2 x)^{s_j}/(\log x)^{q_j})\}$ $\quad (P_j \in \mathbb{C}[X],\ \deg P_j \leqslant d_j)$
$G^*_j(x) \ll x(\log x)^{e_j+t_j}$.

et

$$C_{2i,k} := b^*_{k-2i}\,\mu_i\,\mu_{\ell+1-i}\int_0^1 u^{\ell-i-h}(1-u)^i\,\mathrm{d}u = b^*_{k-2i}\,\mu_\ell\Big(2+\frac{h}{\ell-i}+\frac{h-1}{\ell+1}\Big).$$

Le seul cas exclu est $i=\ell$, $h=1$, soit $(j,k)=(2\ell,2\ell+1)$. Nous appliquons alors le Lemme 4.2(ii) avec $G_1(x)=N_1(x)$, $G_2(x)=M_{2\ell}(x;f_0)$. En tenant compte de (5·5), (5·6) et (6·1), nous obtenons
(6·12)

$$Q_{2\ell,2\ell+1}(x)=\mu_\ell\,(\log x)^\ell\Big\{E_1(\log_2 x)+b_0\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i}+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta^+_{k5}}}{(\log x)^{2/3}}\Big)\Big\}.$$

Portons maintenant notre attention sur le cas des indices j impairs, disons $j=2i+1$ avec $0\leqslant i\leqslant \ell-h$. On ne peut avoir $i=\ell$ que si $h=0$, c'est-à-dire $(j,k)=(2\ell+1,2\ell+2)$. Nous appliquons alors le Lemme 4.2(ii) avec $G_1(x)=N_1(x)$, $G_2(x)=M_{2\ell+1}(x;f_0)$. On a $t_1=1/2$ par (6·9), $t_2=1$ par (6·10) et $q_2=2/3$, $s_2=2+2\delta^+_{\ell 2}$ par (6·1). En particulier $q_4\geqslant 0$. Il suit

$$Q_{2\ell+1,2\ell+2}(x)\ll(\log x)^\ell(\log_2 x)^{2+2\delta^+_{k6}}. \tag{6·13}$$

Nous pouvons maintenant restreindre l'étude au cas $j=2i+1$ avec $0\leqslant i\leqslant \ell-1$.

Lorsque $h=0$, soit $(j,k)=(2i{+}1,2\ell{+}2)$, nous appliquons le Lemme 4.2(i) avec $G_1(x)=M_{2i+1}(x;f_0)$ et $G_2(x)=\binom{2\ell+1}{2i+1}N_{2\ell-2i+1}(x)$. On a $q_1=2/3$, $t_2=1/2$ si $i\geqslant 1$ et $q_1=1$, $t_2=1$ si $i=0$,[17] on peut donc minorer q_3 par 0 dans tous les cas. De plus, $q_1=\frac13(2+\delta_{0i})<q_2+t_2=\frac23+\frac12$, donc, compte tenu de (1·19) et (6·1), $s_3=s_1=1+\delta^+_{i1}+2\delta^+_{i2}$. Le second membre de (4·9) est alors dominé par le terme d'erreur et l'on obtient

$$Q_{2i+1,2\ell+2}(x)\ll(\log x)^\ell(\log_2 x)^{2+2\delta^+_{k6}}\qquad(0\leqslant i\leqslant \ell), \tag{6·14}$$

où nous avons inclus l'estimation (6·13).

Lorsque $h=1$, soit $(j,k)=(2i+1,2\ell+1)$, et donc $0\leqslant i\leqslant \ell-1$, nous appliquons le Lemme 4.2(i) avec $G_1(x)=M_{2i+1}(x;f_0)$ et $G_2(x)=\binom{2\ell}{2i+1}N_{2\ell-2i}(x)$. On a, par (1·19), $s_1=\eta_1=1$ si $i=0$, et, par (6·1), $s_1=2+2\delta^+_{i2}$, $\eta_1=0$ si $1\leqslant i\leqslant \ell-1$. Ainsi $s_1+\eta_1\leqslant 2+2\delta^+_{k7}$ dans tous les cas. Il suit

$$Q_{2i+1,2\ell+1}(x)=(\log x)^\ell\Big\{P_{2i+1,k}(\log_2 x)+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+\delta^+_{k7}+2\delta_{1\ell}}}{(\log x)^{(2+\delta_{1\ell})/3}}\Big)\Big\}, \tag{6·15}$$

avec

$$P_{2i+1,k}(X):=\binom{2\ell}{2i+1}\mu_{i+1}\mu_{\ell-i}\int_0^1 E_{2i+1}(X,u)u^i(1-u)^{\ell-i-1}\,\mathrm{d}u.$$

17. L'égalité $q_1=1$ résulte de (1·19), $t_2=1$ de (6·10).

En remarquant que $\binom{2\ell}{2i+1}\mu_{i+1}\mu_{\ell-i} = 2\ell\mu_\ell\binom{\ell-1}{i}$ et en utilisant (6·8), nous obtenons
$$P_{2i+1,k}(X) = 2\mu_\ell\{E_1(X) + b_i^{**}\}$$
avec $b_i^{**} := ib_1 - b_0\ell\binom{\ell-1}{i}\int_0^1(1-u)^{\ell-i-1}u^i(\log u)\,\mathrm{d}u$.

Nous pouvons finalement rassembler (6·14) et (6·15) en une formule unique valable indépendamment de la parité de k, soit

$$Q_{2i+1,k}(x) = 2\mu_\ell(\log x)^\ell\Big\{E_1(X) + b_i^{**} + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta_{k5}^+}}{(\log x)^{2h/3}}\Big)\Big\}. \tag{6·16}$$

Reportons dans (6·5) les estimations (6·11), (6·12) et (6·16). Nous obtenons d'abord, lorsque $h = 0$,

$$\begin{aligned} w_{2\ell+2}(x; f_0) &= \sum_{i=1}^{\ell} Q_{2i,k}(x) + O\big((\log_2 x)^{2+2\delta_{k5}^+}(\log x)^\ell\big) \\ &= (\log x)^{\ell+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant \ell} C_{2i,2\ell+2} + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{3+\delta_{k5}^+}}{\log x}\Big)\Big\} \\ &= \frac{\ell\mu_{\ell+1}}{\ell+1}(\log x)^{\ell+1}\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{3+\delta_{k5}^+}}{\log x}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Cette estimation correspond bien à (6·3) avec $h = 0$. Ensuite, lorsque $h = 1$, i.e. $k = 2\ell+1$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant i\leqslant \ell-1} C_{2i,k} &= \mu_\ell \sum_{1\leqslant i\leqslant \ell-1}\Big\{(2\ell-2i+1)b_1 - b_0\Big(2 + \frac{1}{\ell-i}\Big)\Big\} \\ &= \mu_\ell\Big\{(\ell^2-1)b_1 - (2\ell-2)b_0 - b_0\sum_{1\leqslant i\leqslant \ell-1}\frac{1}{i}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{0\leqslant i\leqslant \ell-1} P_{2i+1,k}(X) \\ &\qquad = \ell\mu_\ell\Big\{2E_1(X) + (\ell-1)b_1 - 2b_0\int_0^1(1-u+u)^{\ell-1}\log u\,\mathrm{d}u\Big\} \\ &\qquad = \ell\mu_\ell\big\{2E_1(X) + (\ell-1)b_1 + 2b_0\big\}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (6·11), (6·12) et (6·16), il suit

$$\begin{aligned} w_{2\ell+1}(x; f_0) &= \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} Q_{j,k}(x) \\ &= (2\ell+1)\mu_\ell(\log x)^\ell\Big\{E_1(\log_2 x) + (\ell-1)b_1 + \frac{b_0}{\ell} \\ &\qquad + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+2\delta_{\ell 2}^+}}{(\log x)^{2/3}}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Comme $\mu_{\ell+1} = (2\ell+1)\mu_\ell$, nous obtenons bien la formule requise (6·3) lorsque $w_k(x)$ avec $h = 0$.

Estimations de $y_k(x;f_0)$ et de $z_k(x;f_0)$. Nous estimons d'abord la différence $\Delta_k(x)$ définie en (6·2). Le principe des calculs consiste à exprimer $\Delta_k(x)$, grâce à (5·4), en fonction des moments d'ordre inférieur à k, pour lesquels l'hypothèse de récurrence est disponible. En faisant appel à (6·1), (6·9) et (6·10) sous la forme

$$\begin{aligned} M_j^*(\pi(x);f_0) &\ll x(\log x)^{j/2-1} \qquad (j\leqslant k-2),\\ M_{k-1}^*(\pi(x);f_0) &\ll x(\log x)^{\ell-h}, \end{aligned} \tag{6·17}$$

on peut écrire

$$\Delta_k(x)=-\Delta_{k1}(x)+\Delta_{k2}(x)+O(x(\log x)^{\ell-(h+3)/2}(\log_2 x)^3), \tag{6·18}$$

avec

$$\Delta_{ki}(x):=\binom{k}{i}\sum_{p_m\leqslant x} f_0(m)^{k-i}\big\{E_1(\log_2 m)+b_0\big\}^i \qquad (i=1,2).$$

De plus, il est facile de déduire de (6·17) que l'erreur commise en remplaçant $E_1(\log_2 m)$ par $E_1(\log_2 x)$ dans $\Delta_{ki}(x)$ est

$$\ll x(\log x)^{\ell-1-h}(\log_2 x)^i.$$

On infère grâce à (6·1)

$$\begin{aligned} \Delta_{k1}(x) &= k\mu_{\ell+1-h}x(\log x)^{\ell-1}\Big\{E_{2\ell+1-h}(\log_2 x)\big\{E_1(\log_2 x)+b_0\big\}\\ &\quad +O\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{(\log x)^{(2+h)/3}}\Big)\Big\}\\ \Delta_{k2}(x) &= \binom{k}{2}\mu_\ell x(\log x)^{\ell-1-h}\Big\{E_{2\ell-h}(\log_2 x)\big\{E_1(\log_2 x)+b_0\big\}^2\\ &\quad +O\Big(\frac{(\log_2 x)^6}{(\log x)^{1-h/3}}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

En reportant dans (6·18), nous obtenons

$$\Delta_k(x)=-\mu_{\ell+1}x(\log x)^{\ell-1}\Big\{hE_1(\log_2 x)+hb_0+O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+4h}}{(\log x)^h}\Big)\Big\}.$$

Cela implique d'une part, grâce au Lemme 3.2, la majoration annoncée en (6·3) pour $y_k(x;f_0)$. D'autre part, nous en déduisons, par sommation d'Abel,

$$\begin{aligned} z_k(x;f_0) &= \frac{\Delta_k(x)}{x}+\int_1^x\frac{\Delta_k(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -h\mu_{\ell+1}\int_1^x(\log t)^{\ell-1}\{E_1(\log_2 t)+b_0\}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\quad +O\big((\log x)^{\ell-h}(\log_2 x)^{2+5h}\big)\\ &= -\frac{\mu_{\ell+1}}{\ell}(\log x)^\ell\Big\{hE_1(\log_2 x)+h\frac{b_0(\ell+1)}{\ell}\\ &\quad +O\Big(\frac{(\log_2 x)^{2+5h}}{(\log x)^h}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

ce qui fournit l'estimation (6·3) pour $z_k(x; f_0)$ et termine ainsi la démonstration du Lemme 6.1.

7. Valeur moyenne de certaines fonctions multiplicatives : preuve du Théorème 1.5

7.1. Méthode

Le schéma de la démonstration est le suivant. La relation (1·28), soit pour mémoire

$$H_N(t) = \frac{\gamma_N t^{1-\alpha_N}}{(\log 2t)^s}\big\{1 + \delta_N(t)t^{\alpha_N}\log 2t\big\} \qquad (1 \leqslant t \leqslant N), \tag{7·1}$$

suppose connus les paramètres α_N, β_N et γ_N intervenant dans l'expression du terme principal potentiel de l'approximation de $H_N(t)$. Nous disposons de plus d'une majoration initiale, soit (1·29), pour le terme d'erreur, qui est valable pour $t \leqslant t_{0,N}$. L'équation fonctionnelle (1·25) et la multiplicativité de h_N vont nous permettre d'étendre inductivement le domaine de validité de la majoration (1·30) pour $\delta_N(t)$. Posons $t_0 := t_{0,N}$. L'étape de récurrence consiste à déduire de la majoration valable pour $t \leqslant t_n$ une majoration presque identique valable pour $t \leqslant t_{n+1} := t_n^2$. La valeur 2 de l'exposant est ici purement contingente : le succès de la méthode repose sur la seule possibilité de progresser d'une puissance de t à chaque étape.

On note que l'on a

$$\delta_N(t) \ll \frac{\vartheta_N + 1/\sqrt{t}}{(\log 2t)^2}\ (1 \leqslant t \leqslant t_{0,N}), \quad \delta_N(t) \ll \frac{1}{\log 2t}\ (t \geqslant t_{0,N}) \tag{7·2}$$

où la première majoration coïncide avec (1·29), alors que la seconde résulte trivialement des inégalités $\alpha_N \geqslant 0$, $|H_N(t)| \leqslant t$.

Il est commode d'introduire la fonctions $\delta_N^+(t)$ définie par

$$\delta_N^+(t) := \sup_{t_{0,N} \leqslant u \leqslant t} |\,\delta_N(u)|. \tag{7·3}$$

Les équations fonctionnelles du problème conduisent à exprimer $\delta_N(t)$ comme une moyenne convenable de valeurs de la même fonction — voir le Lemme 7.1 *infra*. Cela induit un effet régularisant, suffisamment exploitable pour obtenir l'estimation requise. Une fois opérées diverses simplifications et approximations techniques, l'équation fonctionnelle de $\delta_N(t)$ fournit en fait une inéquation de récurrence[18] pour $\delta_N^+(t)$ qui permet de conclure facilement.

Nous allons démontrer que

$$|\delta_N^+(N)| \ll \frac{\lambda_N}{(\log t_{0,N})^2}, \tag{7·4}$$

avec $\lambda_N := \vartheta_N + \sigma_N$, ce qui équivaut à (1·30).

18. Voir (7·29) *infra*.

La formule de base, qui nous permettra d'obtenir une équation fonctionnelle pour la valeur moyenne de h à partir de l'équation de récurrence (1·25), fait l'objet du résultat suivant. Nous posons dans toute la suite de cette démonstration

$$R_N^+(t) := t\lambda_N + t\delta_N^+(t)\log t.$$

Lemme 7.1. *Il existe une constante $c_0(N)$ telle que, pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$, on ait*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant t} h_N(n)\log n &= H_N(t)\log t - \int_1^t \frac{H_N(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{m\leqslant t} h_N(m) \sum_{p\leqslant t/m} h_N(p)\log p + c_0(N)t^{1-\alpha_N} + O(R_N^+(t)).\end{aligned} \tag{7·5}$$

Démonstration. Nous calculons la somme $\sum_{n\leqslant t} h_N(n)\log n$ de deux manières différentes. D'une part, une sommation d'Abel fournit

$$\sum_{n\leqslant t} h_N(n)\log n = H_N(t)\log t - \int_1^t \frac{H_N(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

D'autre part, puisque h_N est complètement multiplicative, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant t} h_N(n)\log n = \sum_{n\leqslant t} h_N(n)\sum_{p^\nu|n}\log p &= \sum_{p^\nu m\leqslant t} h_N(m)h_N(p)^\nu\log p \\ &= \sum_{m\leqslant t} h_N(m)\sum_{p\leqslant t/m} h_N(p)\log p + J(t),\end{aligned}$$

avec

$$J(t) := \sum_{\substack{p^\nu\leqslant t\\ \nu\geqslant 2}} (\log p)\,h_N(p)^\nu H_N\Big(\frac{t}{p^\nu}\Big).$$

Pour évaluer $J(t)$, nous insérons l'estimation

$$H_N(u) = \gamma_N u^{1-\alpha_N} + \gamma_N u\delta_N(u)\log 2u + O(|s_N|u\log_2 2u)$$

qui résulte immédiatement de (7·1). Il suit

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) + O(t\lambda_N), \tag{7·6}$$

avec

$$J_1(t) := \gamma_N t^{1-\alpha_N}\sum_{\substack{p^\nu\leqslant t\\ \nu\geqslant 2}} \frac{h_N(p)^\nu\log p}{p^{\nu(1-\alpha_N)}},$$

$$|J_2(t)| \leqslant |\gamma_N| t\sum_{\substack{p^\nu\leqslant t\\ \nu\geqslant 2}} \frac{(\log p)\log(t/p^\nu)}{p^\nu}\Big|\delta_N\Big(\frac{t}{p^\nu}\Big)\Big|.$$

On a $\alpha_N \leqslant \frac{1}{4}$ pour N assez grand, donc pour $t \geqslant t_{0,N}$

$$J_1(t) = c_0(N)t^{1-\alpha_N} + O(t^{1-\alpha_N-1/4}) = c_0(N)t^{1-\alpha_N} + O(t\lambda_N)$$

avec

$$c_0(N) := \gamma_N \sum_p \frac{h_N(p)^2 \log p}{p^{1-\alpha_N}\{p^{1-\alpha_N} - h_N(p)\}}.$$

De plus, la définition (7·3) de δ_N^+ et la première majoration de (7·2) fournissent pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$

$$\begin{aligned} J_2(t) &\ll t \sum_{\substack{\sqrt{t} \leqslant p^\nu \leqslant t \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\log p}{p^\nu} + t \log t \sup_{\sqrt{t} \leqslant u \leqslant t} |\delta_N(t)| \\ &\ll t\big\{t_{0,N}^{-1/4} + \vartheta_N + \delta_N^+(t) \log t\big\} \ll R_N^+(t). \end{aligned}$$

Cela établit bien le résultat annoncé.

7.2. Réduction préliminaire

L'inégalité fonctionnelle (7·29) pour $\delta_N^+(t)$ annoncée plus haut est obtenue au paragraphe 7.6 en exprimant la somme double figurant au membre de droite de (7·5) en fonction de $\delta_N(t)$. Nous effectuons ici une décomposition technique de cette somme double.

Posons

$$\psi_{k,N} := h_N(k)(\log p_k)(\log 2k)^{i\beta_N}. \tag{7·7}$$

La relation (1·25) permet d'écrire

$$\sum_{p \leqslant y} h_N(p) \log p = \varrho_N\{A(y) + B(y)\} \qquad (y \geqslant 2), \tag{7·8}$$

avec

$$A(y) := \sum_{p_k \leqslant y} \psi_{k,N}, \qquad B(y) := \sum_{p_k \leqslant y} \varepsilon_{k,N}\psi_{k,N}. \tag{7·9}$$

Nous spécialisons $y = t/m$ et reportons dans la somme double, disons $D(t)$, de (7·5). Nous obtenons

$$D(t) := \sum_{m \leqslant t} h_N(m) \sum_{p \leqslant t/m} h_N(p) \log p = \varrho_N\{D_1(t) + D_2(t)\} \tag{7·10}$$

avec

$$D_1(t) := \sum_{m \leqslant t} h_N(m)A(t/m), \qquad D_2(t) := \sum_{m \leqslant t} h_N(m)B(t/m).$$

Une simple interversion de sommation permet de majorer $D_2(t)$. On a en effet

$$D_2(t)=\sum_{m\leqslant t}h_N(m)\sum_{p_k\leqslant t/m}\varepsilon_{k,N}\psi_{k,N}=\sum_{p_k\leqslant t}\varepsilon_{k,N}\psi_{k,N}H_N\Big(\frac{t}{p_k}\Big),$$

d'où, au vu des majorations triviales $|\psi_{k,N}|\leqslant\log p_k$ et $|H_N(u)|\leqslant u$,

$$|D_2(t)|\leqslant t\sum_{p_k\leqslant t}|\varepsilon_{k,N}|\frac{\log p_k}{p_k}\ll tE_N\ll t\lambda_N, \tag{7·11}$$

où l'avant-dernière estimation résulte de l'évaluation de Tchébychev $p_k\asymp k\log k$.

En reportant dans (7·5), nous pouvons donc écrire

$$\sum_{n\leqslant t}h_N(n)\log n=\varrho_N\,D_1(t)+c_0(N)t^{1-\alpha_N}+O\big(R_N^+(t)\big). \tag{7·12}$$

Nous employons la méthode de l'hyperbole pour évaluer $D_1(t)$: on a

$$D_1(t)=\sum_{j=1}^{3}D_{1j}(t) \tag{7·13}$$

avec

$$\begin{cases} D_{11}(t):=\displaystyle\sum_{m\leqslant\sqrt{t}}h_N(m)A\Big(\frac{t}{m}\Big),\\ D_{12}(t):=\displaystyle\sum_{p_k\leqslant\sqrt{t}}\psi_{k,N}\,H_N\Big(\frac{t}{p_k}\Big),\\ D_{13}(t):=-H_N(\sqrt{t})A(\sqrt{t}). \end{cases} \tag{7·14}$$

Les trois paragraphes qui suivent sont dévolus à l'estimation des quantités $D_{1j}(t)$.

7.3. Évaluation de $D_{11}(t)$

Lemme 7.2. *Il existe une constante $c_{11}(N)$ telle que l'on ait pour $t_{0,N}\leqslant t\leqslant N$, $b_N:=1/\log_2 N$,*

$$\begin{aligned}&\Big|\varrho_N D_{11}(t)-\gamma_N t^{1-\alpha_N}(\log 2\sqrt{t})^{1-s}-c_{11}(N)t^{1-\alpha_N}\Big|\\ &\qquad\leqslant\big\{\tfrac18\delta_N^+(\sqrt{t})+\tfrac38\delta_N^+(t)\big\}\{1+O(b_N)\}t(\log t)^2+O\big(R_N^+(t)\big).\end{aligned} \tag{7·15}$$

Démonstration. Commençons par transformer $A(y)$ par sommation d'Abel. Cela nécessite de recourir à l'approximation régulière $p(k)$ de p_k introduite au paragraphe 3.

Posons $A_1(y) := \sum_{1\leqslant k\leqslant \mathrm{li}(y)} h_N(k)(\log 2k)^{i\beta_N}\log p(k)$, de sorte que, d'après (3·8),

$$A(y) = A_1(y) + O\Big(y\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\Big) \qquad (2\leqslant y\leqslant N). \tag{7·16}$$

Il suit

$$D_{11}(t) = \sum_{m\leqslant\sqrt{t}} h_N(m)A_1\Big(\frac{t}{m}\Big) + O(t\lambda_N) \qquad (t_{0,N}\leqslant t\leqslant N), \tag{7·17}$$

où nous avons utilisé les estimations

$$\exp\big\{-\tfrac12\sqrt{\log t_{0,N}}\big\} \ll \exp\{-(\log N)^{a_3}\} \ll \lambda_N/(\log N)^2, \tag{7·18}$$

qui découlent, pour une constante absolue convenable $a_3 > 0$, de (1·26) et (1·27).

Soit $Y := \mathrm{li}(y)$. On a

$$A_1(y) = \int_{1-}^{Y} (\log 2k)^{i\beta_N}\log p(k)\,\mathrm{d}H_N(k) = A_{11}(y) + A_{12}(y), \tag{7·19}$$

où $A_{11}(y)$ est la contribution du terme principal de (7·1), et $A_{12}(y)$ celle du terme résiduel. On a d'abord, pour $2\leqslant y\leqslant N$,

$$\begin{aligned} A_{11}(y) &= \gamma_N\int_1^Y (\log 2u)^{i\beta_N}\log p(u)\,\mathrm{d}\Big(\frac{u^{1-\alpha_N}}{(\log 2u)^{s_N}}\Big)\\ &= \gamma_N\int_1^Y \frac{\log p(u)}{(u\log 2u)^{\alpha_N}}\Big(1-\alpha_N-\frac{s_N}{\log 2u}\Big)\,\mathrm{d}u\\ &= \gamma_N(1-\alpha_N)\int_1^Y \frac{\log p(u)}{(u\log 2u)^{\alpha_N}}\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{y|s_N|}{\log y}\Big)\\ &= \gamma_N(1-\alpha_N)\int_1^y \frac{\mathrm{d}v}{\big\{\mathrm{li}(v)\log(2\,\mathrm{li}(v))\big\}^{\alpha_N}} + O\Big(\frac{y|s_N|}{\log y}\Big)\\ &= \gamma_N y^{1-\alpha_N} + O\Big(\frac{y\{\alpha_N\log_2 y + |\beta_N|\}}{\log y}\Big), \end{aligned} \tag{7·20}$$

où l'on a effectué le changement de variable $v = p(u)$ et utilisé les relations $p'(u) = \log p(u)$ et $p(\mathrm{li}(u)) = u$. Ensuite, on peut écrire, par sommation d'Abel,

$$\begin{aligned} &A_{12}(y)\\ &\quad= \gamma_N\frac{Y\delta_N(Y)\log y}{(\log 2Y)^{\alpha_N-1}} - \gamma_N\int_1^Y \frac{u(\log p(u))\delta_N(u)}{p(u)(\log 2u)^{\alpha_N-1}}\Big\{1 + i\frac{\beta_N p(u)}{u\log 2u}\Big\}\,\mathrm{d}u\\ &\quad= \gamma_N\frac{y\delta_N(Y)}{(\log 2Y)^{\alpha_N-1}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} + O\Big(\int_1^Y |\delta_N(u)|(\log 2u)\,\mathrm{d}u\Big). \end{aligned}$$

Les majorations (7·2) et (7·18) impliquent immédiatement que, pour $y \geqslant \sqrt{t_{0,N}}$, la dernière intégrale en u est

$$\ll \frac{y\vartheta_N + y^{2/3}}{(\log y)^2} + y\delta_N^+(y) \ll y\Big\{\delta_N^+(y) + \frac{\lambda_N}{(\log y)^2}\Big\}$$

et que la même majoration vaut pour $y\delta_N(Y)$. On a donc

$$A_{12}(y) = \gamma_N \frac{y\delta_N(Y)}{(\log Y)^{\alpha_N - 1}} + O\Big(y\delta_N^+(y) + \frac{y\lambda_N}{(\log y)^2}\Big) \qquad (\sqrt{t_{0,N}} \leqslant y \leqslant N),$$

d'où, en tenant compte de (7·20),

$$A_1(y) = \gamma_N\, y^{1-\alpha_N} + \gamma_N \frac{y\delta_N(Y)}{(\log Y)^{\alpha_N-1}} + O\Big(y\delta_N^+(y) + \frac{y\lambda_N}{\log y}\Big), \tag{7·21}$$

pour $\sqrt{t_{0,N}} \leqslant y \leqslant N$.

Reportons cette estimation, avec $y = t/m$, dans la somme en m de (7·17). Nous obtenons pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$

$$D_{11}(t) = \gamma_N\, t^{1-\alpha_N} d_1(t) + \gamma_N\, t d_2(t) + O\big(R_N^+(t)\big) \tag{7·22}$$

avec

$$d_1(t) := \sum_{m \leqslant \sqrt{t}} \frac{h_N(m)}{m^{1-\alpha_N}}, \qquad d_2(t) := \sum_{m \leqslant \sqrt{t}} \frac{h_N(m)\delta_N(Y_m)}{m(\log Y_m)^{\alpha_N-1}},$$

où l'on a posé $Y_m = \mathrm{li}(t/m)$.

Évaluons maintenant $d_1(t)$ et $d_2(t)$. Soit

$$d_{11}(t) := (1-\alpha_N)\gamma_N \int_1^{\sqrt{t}} \frac{(\log 2u)^{1-s_N}\delta_N(u)}{u^{1-\alpha_N}}\,\mathrm{d}u.$$

Une sommation d'Abel permet d'abord d'écrire

$$\begin{aligned}
d_1(t) &= (1-\alpha_N)\int_1^{\sqrt{t}} \frac{H_N(u)}{u^{2-\alpha_N}}\,\mathrm{d}u + \frac{H_N(\sqrt{t})}{t^{(1-\alpha_N)/2}} \\
&= (1-\alpha_N)\gamma_N \int_1^{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{d}u}{u(\log 2u)^{s_N}} + d_{11}(t) + \frac{\gamma_N}{\big(\log 2\sqrt{t}\big)^{s_N}} \\
&\quad + O\left(t^{\alpha_N/2}\delta_N^+(\sqrt{t})\log t\right) \\
&= \frac{(\log 2\sqrt{t})^{1-s_N} - (\log 2)^{1-s_N}}{\varrho_N} + d_{11}(t) + \frac{\gamma_N}{\big(\log 2\sqrt{t}\big)^{s_N}} \\
&\quad + O\left(t^{\alpha_N/2-1}R_N^+(t)\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $(1-\alpha_N)\gamma_N\varrho_N = 1-s_N$. En remarquant de plus que

$$(\log 2)^{-s_N} = 1 + O\big(\lambda_N\big), \qquad \gamma_N/\big(\log 2\sqrt{t}\big)^{s_N} = 1/\varrho_N + O\big(\lambda_N\big),$$

il suit

$$\varrho_N d_1(t) = (\log 2\sqrt{t})^{1-s_N} + 1 - \log 2 + \varrho_N d_{11}(t) + O\big(t^{\alpha_N/2-1}R_N^+(t)\big).$$

Maintenant, nous observons que

$$\begin{aligned}|\varrho_N d_{11}(t) - \varrho_N d_{11}(t_{0,N})| &\leqslant |1-s_N| t^{\alpha_N/2}\int_{\sqrt{t_{0,N}}}^{\sqrt{t}} |\delta_N(u)|(\log 2u)\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &\leqslant \tfrac{1}{8}\delta_N^+(\sqrt{t})t^{\alpha_N/2}(\log t)^2\big\{1+O(b_N)\big\} + O\big(\lambda_N t^{\alpha_N/2}\big).\end{aligned}$$

Ainsi, posant $c_{11}(N) := \gamma_N(1-\log 2) + \gamma_N\varrho_N d_{11}(t_{0,N})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\Big|\gamma_N\varrho_N d_1(t) - c_{11}(N) - \frac{\gamma_N}{\big(\log 2\sqrt{t}\big)^{s_N-1}}\Big|\\ &\qquad \leqslant \tfrac{1}{8}\delta_N^+(\sqrt{t})t^{\alpha_N/2}(\log t)^2\big\{1+O(b_N)\big\} + O\big(t^{\alpha_N/2-1}R_N^+(t)\big).\end{aligned} \tag{7·23}$$

On a de plus, grâce à (7·2) et à la croissance de δ_N^+,

$$\begin{aligned}|d_2(t)| &\leqslant \delta_N^+(t)\sum_{m\leqslant\sqrt{t}}\frac{\log(t/m)}{m} + O\Bigg(\sum_{t/t_{0,N}<m\leqslant\sqrt{t}}\frac{\vartheta_N+\sqrt{m/t}}{m\log(t/m)}\Bigg)\\ &\leqslant \big\{\tfrac{3}{8}+O(b_N)\big\}\delta_N^+(t)(\log t)^2 + O\big(\lambda_N\big)\end{aligned}$$

où la somme en m a été estimée en employant (7·18). En reportant dans (7·22), tout en tenant compte de (7·23) nous obtenons bien (7·15).

7.4. Évaluation de $D_{12}(t)$

Lemme 7.3. *Il existe une constante $c_{12}(N)$ telle que l'on ait pour $t_{0,N}\leqslant t\leqslant N$, $b_N := 1/\log_2 N$,*

$$\begin{aligned}&\Big|\varrho_N D_{12}(t) - \gamma_N t^{1-\alpha_N}\big\{(\log 2t)^{1-s} - (\log 2\sqrt{t})^{1-s}\big\} - c_{12}(N)t^{1-\alpha_N}\Big|\\ &\qquad \leqslant \big\{\tfrac{1}{8}\delta_N^+(\sqrt{t}) + \tfrac{3}{8}\delta_N^+(t)\big\}\{1+O(b_N)\}t(\log t)^2 + O\big(R_N^+(t)\big).\end{aligned} \tag{7·24}$$

Démonstration. On a d'après (7·1)

$$D_{12}(t) = \sum_{p_k\leqslant\sqrt{t}}\psi_{k,N}H_N\Big(\frac{t}{p_k}\Big) = \gamma_N t^{1-\alpha_N}S_{12}(t) + \gamma_N tR_{12}(t) \tag{7·25}$$

avec

$$S_{12}(t) := \sum_{p_k \leqslant \sqrt{t}} \frac{\psi_{k,N}}{p_k^{1-\alpha_N}\big(\log 2t/p_k\big)^s}, \quad R_{12}(t) := \sum_{p_k \leqslant \sqrt{t}} \frac{\psi_{k,N}\delta_N(t/p_k)}{p_k\big(\log 2t/p_k\big)^{s-1}}.$$

Nous allons estimer $S_{12}(t)$ et majorer $|R_{12}(t)|$. Posons

$$w(u) := \frac{\log p(u)\big(\log 2u\big)^{i\beta_N}}{p(u)^{1-\alpha_N}\big(\log 2t/p(u)\big)^{s_N}} \qquad \big(1 \leqslant u \leqslant \mathrm{li}(t)\big).$$

L'approximation (3·9) de p_k par $p(k)$ et la majoration $w'(u) \ll u^{\alpha_N - 2}$ permettent d'obtenir l'existence d'une constante $c_1(N)$ telle que l'on ait pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$

$$S_{12}(t) = \sum_{k \leqslant T} h_N(k)w(k) + c_1(N) + O\big(T^{\alpha_N}\lambda_N\big)$$

avec $T := \mathrm{li}\,\big(\sqrt{t}\big)$. La somme en k vaut encore $\int_{1-}^{T} w(u)\,\mathrm{d}H_N(u)$. Substituons à $H_N(u)$ son expression issue de (7·1) et intégrons par parties le terme d'erreur. Il suit

$$\sum_{k \leqslant T} h_N(k)w(k) = I_1(t) - I_2(t) + O(T^{\alpha_N}|s|\log_2 t + T^{\alpha_N}\delta_N(T)\log T), \tag{7·26}$$

avec

$$I_1(t) := \gamma_N(1-\alpha_N)\int_1^T \frac{w(u)}{u^{\alpha_N}(\log 2u)^{s_N}}\,\mathrm{d}u,$$
$$I_2(t) := \gamma_N\int_1^T \frac{w'(u)u\,\delta_N(u)}{(\log 2u)^{s_N-1}}\,\mathrm{d}u.$$

Nous estimons $I_1(t)$ en effectuant le changement de variable $u = \mathrm{li}(v)$. On vérifie aisément que

$$\frac{w(u)}{u^{\alpha_N}(\log 2u)^{s_N}} = \frac{\log v + O(\alpha_N\log_2 v)}{v(\log 2t/v)^{s_N}}, \qquad (1 \leqslant u \leqslant p(t))$$

et il vient

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \gamma_N(1-\alpha_N)\int_1^{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{d}v}{v(\log 2t/v)^{s_N}} + O(\alpha_N(\log_2 N)^2) \\ &= \varrho_N^{-1}\big\{(\log 2t)^{1-s_N} - (\log 2\sqrt{t})^{1-s_N}\big\} + O(\lambda_N). \end{aligned}$$

Par ailleurs, le calcul explicite de $w'(u)$ fournit, grâce à quelques estimations de routine,

$$|w'(u)| \leqslant \frac{1 + O(|s_N|\log_2 t + 1/(\log 2u))}{u^{2-\alpha_N}} \qquad (1 \leqslant u \leqslant p(t)),$$

d'où nous déduisons, compte tenu de l'estimation $|\gamma_N| \leqslant 1 + O(b_N)$ et de (7·2),

$$\begin{aligned}|I_2(t) - I_2(t_{0,N})| &\leqslant \delta_N^+(\sqrt{t}) \int_1^T \frac{\log 2u}{u^{1-\alpha_N}} \big\{1 + O(b_N)\big\}\,\mathrm{d}u + \vartheta_N \\ &\leqslant \{\tfrac18 + O(b_N)\}t^{\alpha_N/2}\delta_N^+\big(\sqrt{t}\big)(\log t)^2 + O(t^{\alpha_N/2}\lambda_N).\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu jusqu'ici

$$\begin{aligned}\big|\gamma_N\varrho_N S_{12}(t) - \gamma_N\big\{(\log 2t)^{1-s_N} - (\log 2\sqrt{t})^{1-s_N}\big\} - c_{12}(N)\big| \\ \leqslant \{\tfrac18 + O(b_N)\}t^{\alpha_N}\delta_N^+\big(\sqrt{t}\big)(\log t)^2 + O(\lambda_N),\end{aligned} \tag{7·27}$$

avec $c_{12}(N) := \gamma_N\varrho_N\big\{c_1(N) - I_2\big(t_{0,N}\big)\big\}$.

Il reste à majorer $R_{12}(t)$. En utilisant l'estimation triviale $|\psi_{k,N}| \leqslant \log p_k$ et (7·2), on peut écrire lorsque $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$

$$\begin{aligned}|R_{12}(t)| &\leqslant \delta_N^+(t) \sum_{p \leqslant t^{1/2}} \frac{\log p}{p} \log(2t/p) + O(\lambda_N) \\ &\leqslant \big\{\tfrac38 + O(b_N)\big\}\delta_N^+(t)(\log t)^2 + O(\lambda_N).\end{aligned}$$

Compte tenu de (7·27), cela fournit le résultat requis en reportant dans (7·25).

7.5. Évaluation de $D_{13}(t)$

Lemme 7.4. *On a pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$*

$$\big|\varrho_N D_{13}(t) + \gamma_N t^{1-\alpha_N}\big| \ll R_N^+(t).$$

Démonstration. On a $D_{13}(t) = -H_N\big(\sqrt{t}\big)A\big(\sqrt{t}\big)$. Or, d'après (7·1) et (7·2),

$$H_N\big(\sqrt{t}\big) = \gamma_N t^{(1-\alpha_N)/2} + O\big(R_N^+(t)/\sqrt{t}\big),$$

alors que, d'après (7·16) et (7·21), la même estimation est valable pour $A\big(\sqrt{t}\big)$. En tenant compte des estimations triviales

$$H_N\big(\sqrt{t}\big) \ll \sqrt{t}, \qquad A\big(\sqrt{t}\big) \ll \sqrt{t}, \qquad \gamma_N\varrho_N - 1 = \frac{-i\beta_N}{1-\alpha_N} \ll \lambda_N,$$

nous obtenons bien la formule annoncée.

7.6. *Conclusion*

Estimons d'abord l'intégrale de (7·5) en utilisant (7·1), (7·2) et (7·3). Nous obtenons

$$\int_1^N \frac{H_N(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\gamma_N}{1-\alpha_N}t^{1-\alpha_N} + O(R_N^+(t)).$$

La formule (7·5) peut donc être réécrite sous la forme

$$H_N(t)\log 2t = D(t) + c_2(N)t^{1-\alpha_N} + O\big(R_N^+(t)\big), \tag{7·28}$$

où $D(t)$ est définie en (7·10) et avec $c_2(N) := c_0(N)+\gamma_N/(1-\alpha_N)+\gamma_N\log 2$. La relation (7·11) et les estimations des Lemmes 7.2, 7.3 et 7.4 fournissent alors

$$\begin{aligned}&\big|D(t)-\gamma_N t^{1-\alpha_N}(\log 2t)^{1-s_N} - c_3(N)t^{1-\alpha_N}\big|\\ &\qquad\leqslant \{1+O(b_N)\}\big\{\tfrac14\delta_N^+(\sqrt{t})+\tfrac34\delta_N^+(t)\big\}t(\log t)^2 + O(t\lambda_N),\end{aligned}$$

avec $c_3(N) := c_{11}(N)+c_{12}(N)-\gamma_N$ Remplaçons, dans (7·28), $H_N(t)$ par son expression (7·1). Il s'ensuit, après simplification par t,

$$\begin{aligned}&\big|\gamma_N\delta_N(t)(\log 2t)^{2-s_N} - C_N t^{-\alpha_N}\big|\\ &\qquad\leqslant \{1+O(b_N)\}\big\{\tfrac14\delta_N^+(\sqrt{t})+\tfrac34\delta_N^+(t)\big\}(\log t)^2 + O(\lambda_N)\end{aligned}$$

où $C_N := c_2(N)+c_3(N)$ est une constante indépendante de t. Choisissons $t = t_{0,N}$ dans cette dernière relation. La majoration (7·2) implique alors $C_N \ll \lambda_N$. En divisant par $(\log 2t)^2$ et en notant que

$$1/(\log 2t)^{s_N} = 1+O(b_N), \quad |\gamma_N| = 1+O(b_N),$$

nous obtenons finalement l'existence d'une constante absolue K telle que

$$\big|\delta_N(t)\big| \leqslant \{1+Kb_N\}\big\{\tfrac14\delta_N^+(\sqrt{t})+\tfrac34\delta_N^+(t)\big\} + \frac{K\lambda_N}{(\log t)^2} \tag{7·29}$$

pour $t_{0,N} \leqslant t \leqslant N$. Posons $t_n := \big(t_{0,N}\big)^{2^n}$ et $\Delta_n := \delta_N^+(t_n)$. Grâce à la croissance de δ_N^+, on déduit de ce qui précède que

$$\Delta_n \leqslant \frac{1+Kb_N}{1-3Kb_N}\Delta_{n-1} + 2^{-2n}\frac{8K\lambda_N}{(\log t_{0,N})^2} \qquad (n\geqslant 1).$$

Une récurrence facile fournit alors (7·4) et achève ainsi la démonstration du Théorème 1.5.

8. Fonction de répartition de f_0

Nous nous proposons ici de prouver le Théorème 1.6.

Commençons par établir la formule (1·31) relative à la transformée de Fourier–Stieltjes de $F_N(z)$.

Dans toute la suite de cette démonstration, nous posons

$$\tau_N := \tau/\sqrt{\Phi_2(f)\log N}.$$

Lorsque $|\tau_N| \leqslant (\log_2 N)/\log N$, un développement à l'ordre 2 de l'exponentielle

$$h_N(n;\tau) = \mathrm{e}^{i\tau_N f_0(n)}$$

est suffisant. On obtient, grâce aux points (i) et (ii) du Théorème 1.2, lorsque $|\tau_N| \leqslant (\log_2 N)/\log N$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant N} h_N(n;\tau) &= N + O\big(|\tau_N M_1(N;f_0)| + \tau_N^2 M_2(N;f_0)\big)\\ &= N\mathrm{e}^{-\tau^2/2} + O\big(|\tau_N| N \log_2 N\big).\end{aligned}$$

La relation (1·31) est triviale pour $|\tau_N| > (\log N)^{-1/3}$. Il reste donc seulement à l'établir dans le domaine $(\log_2 N)/\log N < |\tau_N| \leqslant (\log N)^{-1/3}$. Nous appliquons à cette fin le Théorème 1.5 à la fonction $n \mapsto h_N(n;\tau)$. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $f \in \boldsymbol{\mathcal{E}}(a,b)$. Alors la fonction f_0 définie par (1·16) est un élément de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(a,b_0)$ avec $b_0 := b - \Phi_1(f)$ et h_N satisfait les hypothèses du Théorème 1.5 avec

$$(8{\cdot}1) \qquad \varrho_N := \mathrm{e}^{ia\tau_N}, \quad \beta_N := b_0\tau_N, \quad \varepsilon_{k,N} \ll \tau_N \log_2 3k/\log 2k \ (k \geqslant 1).$$

Nous choisissons $\alpha_N := \frac{1}{2}\Phi_2\tau_N^2 = \frac{1}{2}\tau^2/\log N$, et en déduisons les valeurs des paramètres complémentaires

$$\begin{aligned} s_N &= \alpha_N + i\beta_N = \Phi_2\tau_N^2 + ib_0\tau_N,\\ \gamma_N &= \frac{1-s_N}{\varrho_N(1-\alpha_N)} = \mathrm{e}^{-i(a+b_0)\tau_N}\big\{1 + O\big(\tau_N^2\big)\big\}.\end{aligned}$$

Le terme principal fourni par le Théorème 1.5 pour la valeur moyenne de h_N vaut

$$\gamma_N N^{-\alpha_N}(\log N)^{-s_N} = \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\big\{1 + O(|\tau_N|\log_2 N)\big\}.$$

Nous pouvons donc nous limiter à montrer que l'on a, avec les notations du Théorème 1.5,

$$(8{\cdot}2) \qquad \delta_N(N) \ll |\tau_N|^3 \log_2 N \qquad \Big(\frac{\log_2 N}{\log N} < |\tau_N| \leqslant \frac{1}{(\log N)^{1/3}}\Big).$$

L'application du Théorème 1.5 nécessite encore la donnée d'un paramètre $t_{0,N}$ vérifiant

$$t_{0,N} \ll \mathrm{e}^{1/\alpha_N}, \qquad \log_2 t_{0,N} \gg \log_2 N$$

et d'une estimation initiale de $H_N(t,\tau) := \sum_{n \leqslant t} h_N(n;\tau)$, valable pour $t \leqslant t_{0,N}$. Nous différons le choix de $t_{0,N}$, que nous opérerons optimalement en fin de calcul, mais imposons d'emblée la condition $\log t_{0,N} \gg 1/\{|\tau_N|(\log_2 N)^2\}$ de sorte que

$$\sigma_N \asymp |\tau_N|(\log_2 N)^2.$$

L'estimation initiale de $H_N(t,\tau)$ résulte des formules asymptotiques établies au Théorème 1.2 pour les moments d'ordre 1 à 4. Grâce au développement asymptotique $\mathrm{e}^{iu} = 1 + iu - \frac{1}{2}u^2 - i\frac{1}{6}u^3 + O(u^4)$, uniforme en $u \in \mathbb{R}$, on déduit en effet du Théorème 1.2 que l'on a, pour $t \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} H_N(t,\tau) &= [t] + i\tau_N M_1(t;f_0) - \tfrac{1}{2}\tau_N^2 M_2(t;f_0) \\ &\quad + O\big(|\tau_N|^3 |M_3(t;f_0)| + |\tau_N|^4 M_4(t;f_0)\big). \\ &= t\big\{1 - i\tau_N E_1(\log_2 t) - \tfrac{1}{2}\Phi_2\tau_N^2 \log(t\log t)\big\} \\ &\quad + O\big(tB_N(t) + 1\big), \end{aligned} \tag{8·3}$$

avec

$$B_N(t) \ll |\tau_N|\frac{\log_2 t}{\log t} + \tau_N^2(\log_2 t)^2 + \tau_N^4(\log t)^2.^{(19)}$$

On a de plus, pour $t \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_N t^{1-\alpha_N}}{(\log 2t)^{s_N}} &= t\big\{1 - i(a+b_0)\tau_N - \alpha_N \log t - s_N \log_2 t + O(D_N)\big\} \\ &= t\big\{1 - \tfrac{1}{2}\Phi_2\tau_N^2 \log(t\log t) - i\tau_N E_1(\log_2 t) + O\big(D_N(t)\big)\big\}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_N(t) &:= \frac{|s_N|}{\log t} + \alpha_N^2(\log t)^2 + |s_N|^2\log_2 t \\ &\ll \frac{|\tau_N|}{\log t} + \tau_N^2(\log_2 t)^2 + \tau_N^4(\log t)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que l'hypothèse (1·29) du Théorème 1.5 est satisfaite pour $H_N(t,\tau)$ avec

$$\begin{aligned} \vartheta_N &:= \sup_{3 \leqslant t \leqslant t_{0,N}} \{B_N(t) + D_N(t)\}\log t \\ &\ll |\tau_N|\log_2 t_{0,N} + \tau_N^2(\log_2 t_{0,N})^2 \log t_{0,N} + \tau_N^4(\log t_{0,N})^3. \end{aligned}$$

19. Le terme $|\tau_N|^3 \log t \log_2 t$, issu de l'estimation du moment d'ordre 3, a été omis dans membre de droite car son ordre de grandeur n'excède pas celui de la somme des deux derniers termes.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le Théorème 1.5, qui fournit

$$\begin{aligned}\delta_N(N) &\ll \frac{\vartheta_N+\sigma_N}{(\log t_{0,N})^2}\\ &\ll |\tau_N|\frac{(\log_2 N)^2}{(\log t_{0,N})^2}+\tau_N^2\frac{(\log_2 N)^2}{\log t_{0,N}}+\tau_N^4\log t_{0,N}.\end{aligned}$$

Le choix quasi-optimal défini par $\log t_{0,N}=(\log_2 N)/\tau_N$ fournit bien (8·2), ce qui achève la preuve de (1·31).

Remarque. On peut mesurer précisément sur cette application la quantité d'information que Théorème 1.5 est susceptible d'apporter : l'estimation $\delta_N(t)\log 2t \ll B_N(t)+1/t$ a été transportée, avec une perte en ligne négligeable, du domaine $t\leqslant t_{0,N}$ à la valeur $t=N$. On peut toutefois déplorer un relatif manque à gagner dans ce processus itératif puisque le terme d'erreur de (1·31) n'est pas une fonction bornée de τ. On verra plus loin que, si le facteur $|\tau|+|\tau|^3$ pouvait être remplacé par $\tau g(\tau)$ avec $g\in L^1(\mathbb{R})$, le reste de (1·32) deviendrait essentiellement de l'ordre de grandeur attendu.

Nous pouvons maintenant établir la seconde assertion du Théorème 1.6. Nous avons montré que la fonction caractéristique $\varphi_N(\tau):=H_N(N;\tau)/N$ de la fonction de répartition $F_N(z)$ converge simplement vers la fonction caractéristique

$$\varphi(\tau):=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau z}\,\mathrm{d}\Phi(z)=\mathrm{e}^{-\tau^2/2}$$

de la fonction de répartition Φ de la loi normale. Nous disposons également d'une majoration uniforme de la vitesse de convergence.

L'inégalité de Berry-Esseen (voir, par exemple, [T95], théorème II.7.14) implique alors pour tout $T\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\|F_N-\Phi\|_\infty &\ll \frac{1}{T}+\int_{-T}^{T}\Big|\frac{\varphi_N(\tau)-\varphi(\tau)}{\tau}\Big|\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \frac{1}{T}+T^3\frac{\log_2 N}{\sqrt{\log N}}.\end{aligned}$$

Le choix optimal $T:=(\log N)^{1/4}/(\log_2 N)^{1/4}$ fournit

$$\| F_N-\Phi \|_\infty \ll (\log_2 N)^{1/4}/(\log N)^{1/8},$$

ce qui coïncide avec l'estimation requise (2·1).

Bibliographie

[dB70] N.G de Bruijn, *Asymptotic methods in Analysis*, North Holland (Amsterdam), troisième édition ; réimpression : Dover (New York), 1981.

[E89] S.B. Elk, A problem with the application of Matula's method of prime numbers and rooted trees for canonical nomenclatures of alkanes, *Graph theory notes (New York)* **18** (1989), 40–43.

[E90] S.B. Elk, A canonical ordering of polybenzenes and polyadamantanes using a prime factorization technique, *J. Math. Chem.* **4** (1990), 55–68.

[GIE93] I. Gutman, A. Ivić et S.B. Elk, Matula numbers for coding chemical structures and some of their properties, *J. Serb. Chem. Soc.* **58** , nos. 3-4, (1993), 193-201.

[GI94] I. Gutman, A. Ivić, Graphs with maximal et minimal Matula numbers, *Bulletin de l'académie Serbe des Sciences et des Arts, Sér. Math.* **18** (1994), 65-74.

[GI96] I. Gutman, A. Ivić, On Matula numbers, *Discrete Mathematics* **150** (1996), no. 1–3, 131–142.

[GY93] I. Gutman et Y.-N. Yeh, Deducing properties of trees from their Matula numbers, *Publ. Inst. Math. Belgrade*, **53** (1993), 17–22.

[M68] D.W. Matula, A Natural Root Tree Enumeration by Prime Factorization, *SIAM rev.* **10** (1968), 273.

[T95] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* seconde édition, Cours Spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995).

Régis de la Bretèche
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris XI-Orsay
91405 Orsay cedex
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France