

# Remarques sur les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives<sup>\*†</sup>

Gérald Tenenbaum

**Abstract.** By a self-contained approach, we show that a real valued multiplicative function whose square has a mean-value must itself have a mean value, and we provide a sufficient condition for the vanishing of the latter. This partially extends a theorem of Elliott.

## 1. Introduction

La valeur moyenne d'une fonction arithmétique réelle  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est définie, lorsqu'elle existe, comme la limite

$$M(f) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n).$$

Pour  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , désignons par  $\mathcal{M}(I)$  la classe des fonctions arithmétiques multiplicatives à valeurs dans  $I$ , par  $\mathcal{L}^\alpha(I)$  la sous-classe de  $\mathcal{M}(I)$  constituée des fonctions  $f$  telles que

$$\|f\|_\alpha := \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n)|^\alpha \right)^{1/\alpha} < \infty,$$

et notons  $\mathcal{R}^k(I)$  la sous-classe de  $\mathcal{M}(I)$  comprenant les fonctions  $f$  telles que  $f^k$  possède une valeur moyenne.

Un cas particulier, représentatif du cas général, d'un très élégant résultat d'Elliott [5] peut être énoncé comme suit. Ici et dans toute la suite, la lettre  $p$  désigne un nombre premier.

**Théorème A (Elliott).** *On a  $\mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{R}^1(\mathbb{R}^+)$ . De plus, si  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  et si la série*

$$(1.1) \quad \sum_p \frac{(f(p) - 1)^2}{p}$$

*diverge, alors  $M(f) = 0$ .*

---

\* 2000 AMS Subject Classification : 11N37.

† Nous incluons ici certaines corrections par rapport à la version publiée.

Le théorème principal d'un récent travail de Mauclaire [13] énonce que, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ , si (a) toutes les fonctions  $n \mapsto f(dn)$  ( $d \geq 1$ ) appartiennent à  $\mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$ , si l'on a

$$(b) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} < \infty,$$

et si (c) la série (1.1) diverge, alors il existe un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{N}^*$  de densité 1 tel que la fonction  $\mathbf{1}_E f^2$  soit de valeur moyenne nulle. En fait, ce résultat découle immédiatement du Théorème A, même en élargissant l'hypothèse (a) au seul cas  $d = 1$  et en supprimant la condition (b). En effet, si  $f \geq 0$  et  $M(f) = 0$ , l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $f(n) > \varepsilon$  est de densité nulle pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Elliott donne dans [6] (th. 19.1) une nouvelle démonstration du Théorème A. Les approches de [5] et [6] présentent des différences significatives mais s'appuient essentiellement toutes deux sur la caractérisation donnée par Elliott dans [3] des fonctions de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  possédant une valeur moyenne supérieure<sup>(1)</sup> non nulle — un critère dont la condition nécessaire a été retrouvée par une autre méthode dans un travail subséquent de Daboussi et Delange [2]. Un autre élément essentiel des deux preuves réside dans l'obtention d'une propriété de régularité locale pour la fonction sommatoire de  $f$ , soit

$$(1.2) \quad M(x; f) := \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) \quad (x \geq 0).$$

Dans [5], le résultat est issu d'un lemme de [4] reposant sur un théorème de théorie probabiliste des nombres dû à Levin, Timofeev et Tuljaganov [12]. Dans [6], Elliott a recours, via un principe de dualité, à la résolution d'une équation fonctionnelle approchée — voir notamment les chapitres 6 et 10 de [6]. Enfin, dans tous les cas, la forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius joue un rôle essentiel.

Nous nous proposons ici de donner une version plus générale du Théorème A, dans laquelle l'hypothèse de positivité pour  $f$  est relâchée. Notre énoncé pourrait probablement être retrouvé comme conséquence des résultats exposés dans [6]. Nous nous sommes principalement attaché ici à présenter une démonstration simple et autonome où l'existence d'une valeur moyenne pour  $f^2$  est exploitée directement dans le calcul de la valeur moyenne de  $f$  — ce qui a constitué notre motif initial de curiosité.

Comme dans toutes les approches, le point le plus difficile consiste à établir la nécessité de la convergence de la série (b). À cette fin, nous mettons en évidence, par une méthode directe adaptée de [9], une nouvelle propriété de régularité locale pour les fonctions  $x \mapsto M(x; f)$  lorsque  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  : l'évaluation est moins précise que celles de [4] ou [6], mais valable dans un domaine plus vaste. Ce résultat, d'intérêt propre, fait l'objet du Lemme 2.1 *infra*.

---

1. Cette notion est définie en (2.1) *infra*. Voir le théorème 17.1 de [6].

Bien que certains éléments de notre démonstration soient, inévitablement, analogues à leurs pendants dans la preuve du critère de [3], nous ne faisons pas directement appel à ce résultat. Les simplifications apportées ici sont essentiellement dues au Lemme 2.1 et au résultat taubérien énoncé au Lemme 2.4, qui dispense, dans le cas d'une fonction positive ou nulle, d'un nouvel appel à un résultat de régularité locale, pour lequel le Lemme 2.1 serait d'ailleurs inadapté — voir, par exemple, le chapitre 10 de [6]. Lorsque  $f$  prend des valeurs des deux signes, nous exploitons le résultat obtenu pour  $|f|$ , mais une seconde estimation relative au comportement local des moyennes demeure nécessaire. Nous pouvons alors nous contenter de faire appel à la technique légère de Hildebrand dans [10], qui fournit, dans un cadre moins général mais avec des détails techniques beaucoup plus simples, une estimation analogue à celles d'Elliott dans [6].

**Théorème 1.1.** *On a  $\mathcal{R}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ . De plus, si  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R})$  et si la série (1.1) diverge, alors  $M(f) = 0$ .*

Sous des conditions sensiblement plus fortes, nous obtenons une forme effective du résultat.

**Théorème 1.2.** *Soit  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  telle que  $M(f^2) \neq 0$ . On suppose en outre que  $\sum_p f(p)^4/p^2 < \infty$  et*

$$(1.3) \quad \sum_{p \leq x} f(p) \log p \ll x \quad (x \geq 1).$$

Alors on a

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll x \exp \left\{ - \sum_{p \leq x} \frac{(f(p) - 1)^2}{2p} \right\} \quad (x \geq 1).$$

Posons  $\tau_0(n) := |\tau(n)|/n^{11/2}$  où  $\tau$  désigne la fonction de Ramanujan. Nos deux théorèmes s'appliquent au cas  $f = \tau_0$ , qui constituait la motivation initiale d'Elliott dans [5]. Nous retrouvons ainsi l'estimation effective donnée dans [7] pour la fonction sommatoire de  $\tau_0$ . L'existence de  $M(\tau_0^2) \neq 0$  résulte d'un célèbre théorème de Rankin [15]; la convergence de  $\sum_p \tau_0(p)^4/p^2$  et la validité de (1.3) découlent des inégalités de Deligne [1]

$$(1.4) \quad 0 \leq \tau_0(p) \leq 2 \quad (p \geq 2).$$

Pour établir la divergence de la série (1.1) lorsque  $f = \tau_0$ , nous notons, ainsi qu'il est établi par exemple dans [6] à partir du théorème de Rankin et d'un résultat de Moreno et Shahidi [14] concernant la valeur moyenne de  $\tau(n)^4$ , que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\{\tau_0(p)^2 - 1\}^2}{p} = \log_2 x + O(1).$$

Compte tenu de (1.4), nous obtenons immédiatement la majoration de [7]

$$(1.5) \quad \sum_{n \leq x} \tau_0(n) \ll \frac{x}{(\log x)^{1/18}} \quad (x \geq 2).$$

Ainsi qu'il est souligné dans [7], un cas particulier de la conjecture de Sato-Tate implique

$$\sum_{p \leq x} \frac{\tau_0(p)}{p} \sim \frac{8}{3\pi} \log_2 x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Il est donc cohérent de conjecturer que l'exposant  $\frac{1}{18}$  de (1.5) peut être remplacé par  $1 - 8/(3\pi) \approx 0,15117$  et que cette valeur est optimale. Dans [16], Rankin montre que l'on peut choisir pour exposant  $r := \frac{4}{5} - \frac{9}{10} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,06517$ . Notons qu'il s'agit du meilleur résultat déductible de la seule donnée des moments logarithmiques d'ordre 2 et 4 de  $\tau_0(p)$ , respectivement égaux à 1 et 2. En effet, si  $\delta_a$  désigne la mesure de Dirac au point  $a$ , la mesure de probabilité  $d\mu = \frac{9}{10} \delta_{\sqrt{2/3}} + \frac{1}{10} \delta_2$  vérifie  $\int x^2 d\mu = 1$ ,  $\int x^4 d\mu = 2$  et  $\int x d\mu = 1 - r$ .

Nous pouvons améliorer cette estimation en tenant compte des résultats de Kim et Shahidi [11] (voir page 194), selon lesquels les moments logarithmiques d'ordre 6 et 8 de  $\tau_0(p)$  valent respectivement 5 et 14. Nous montrons au paragraphe 4 que cela implique

$$(1.6) \quad \sum_{p \leq x} \frac{\tau_0(p)}{p} \leq \{1 - s\} \log_2 x + O(1)$$

avec

$$(1.7) \quad s = \frac{33}{35} - \frac{102 - 7\sqrt{21}}{210} \sqrt{\frac{1}{5}(6 + \sqrt{21})} - \frac{102 + 7\sqrt{21}}{210} \sqrt{\frac{1}{5}(6 - \sqrt{21})} \approx 0,11852.$$

De plus, cette majoration est optimale sous la seule donnée des moments d'ordre 2, 4, 6 et 8. Elle fournit immédiatement le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** *Avec la notation (1.7), on a*

$$(1.8) \quad \sum_{n \leq x} \tau_0(n) \ll \frac{x}{(\log x)^s} \quad (x \geq 2).$$

## 2. Démonstration du Théorème 1.1

### 2.1. Lemmes

Pour chaque fonction arithmétique  $f$ , nous posons, avec la notation (1.2),

$$(2.1) \quad \overline{M}(f) := \limsup_{x \rightarrow \infty} M(x; f)/x.$$

La partie la plus difficile de la démonstration consiste à établir que, si  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  et  $\overline{M}(f) \neq 0$ , on a nécessairement

$$(2.2) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} < \infty.$$

Ainsi qu'il a été noté dans l'introduction, nous obtenons (2.2) grâce à un argument de régularité locale pour les moyennes  $M(x; f)$  différent de ceux qui sont employés dans [4] ou [6].

**Lemme 2.1.** *Soient  $A > 0$  et  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$ . Si  $\overline{M}(f) > 0$ , il existe des constantes  $B > 0$ ,  $c_1 > 0$  et  $c_2 > c_1$  telles que*

$$M(x; f) \geq Ax \Rightarrow \min_{x^{c_1} \leq z \leq x^{c_2}} \frac{M(z; f)}{z} \geq B \quad (x \geq 1).$$

*Démonstration.* Comme  $\|f\|_2 < \infty$ , on a d'une part  $f(n) \ll \sqrt{n}$  ( $n \geq 1$ ) et d'autre part, pour  $\sigma \in ]1, 2]$ ,

$$(2.3) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)^2}{n^\sigma} = \sigma \int_1^\infty \frac{M(t; f^2)}{t^{1+\sigma}} dt \ll \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Notons, à fins de référence ultérieure, que, par une application convenable de l'inégalité de Hölder, cela implique, pour tout  $\alpha \in ]0, 2]$ ,

$$(2.4) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)^\alpha}{p^\nu} < \infty.$$

Posons  $S(x; f) := \sum_{p \leq x} \{f(p) - 1\}/p$ . Nous établissons dans un premier temps que, pour tout  $\alpha \in [1, 2[$  et  $L = L(\alpha) \geq 0$  convenablement choisi, on a

$$(2.5) \quad S(x; f^\alpha) \leq L \quad (x \geq 2).$$

Notons  $P^+(n)$  le plus grand facteur premier d'un entier  $n$  avec la convention  $P^+(1) = 1$ . Pour prouver (2.5), nous observons d'abord que, pour tout entier  $k \geq 0$  et tout nombre réel  $x \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x^k \leq n < x^{k+1} \\ P^+(n) \leq x}} \frac{f(n)^\alpha}{n} &\leq \left\{ \sum_{n \leq x^{k+1}} \frac{f(n)^2}{n} \right\}^{\alpha/2} \left\{ \sum_{P^+(n) \leq x} \frac{e^{-k}}{n^{1-1/\log x}} \right\}^{1-\alpha/2} \\ &\ll \{(k+1) \log x\}^{\alpha/2} \exp \left\{ - (1 - \alpha/2)k + (1 - \alpha/2) \sum_{p \leq x} p^{-1+1/\log x} \right\} \\ &\ll (k+1)^{\alpha/2} e^{-(1-\alpha/2)k} \log x. \end{aligned}$$

En sommant sur  $k \in \mathbb{N}$ , il vient

$$\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)^\alpha}{p}\right) \ll \log x.$$

Cela implique bien (2.5) en prenant les logarithmes et en utilisant la convergence de la série  $\sum_p f(p)^{2\alpha}/p^2$ , dont le terme général est  $\ll f(p)^2/p^{3-\alpha}$ .

Ensuite, nous montrons que toute fonction  $f$  de  $\mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  telle que  $M(f^2) \neq 0$  satisfait une forme faible d'une estimation classique de Halberstam et Richert [8], soit

$$(2.6) \quad M(x; f) \ll x e^{S(x; f)/2} \quad (x \geq 2).$$

À cette fin, nous écrivons

$$M(x; f) \log x \leq \sum_{n \leq x} f(n) \left\{ \log n + \frac{x}{n} \right\} \leq \sum_{mp^\nu \leq x} f(m) f(p^\nu) \log(p^\nu) + x \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}.$$

Au vu de (2.4), la dernière somme est  $\ll e^{S(x; f)} \log x$ . Pour majorer la première, nous introduisons un paramètre  $H \gg 1$  et scindons la sommation selon que l'on a ou non  $f(p^\nu) \leq H$ . Grâce aux estimations  $\sum_{p^\nu \leq z} \log(p^\nu) \ll z$ ,  $M(z; f) \ll z$  ( $z \geq 1$ ), il suit

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sum_{mp^\nu \leq x} f(m) f(p^\nu) \log(p^\nu) &\ll Hx \sum_{m \leq x} \frac{f(m)}{m} + x \sum_{\substack{p^\nu \leq x \\ f(p^\nu) > H}} \frac{f(p^\nu) \log(p^\nu)}{p^\nu} \\ &\ll Hx e^{S(x; f)} \log x + x \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) > H}} \frac{f(p) \log p}{p}, \end{aligned}$$

où nous avons traité la contribution des  $p^\nu$  avec  $\nu \geq 2$  par l'inégalité de Hölder en appliquant (2.4).

À ce stade, nous utilisons l'hypothèse  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$  sous la forme

$$z \gg M(z; f^2) \geq \sum_{\sqrt{z} < p \leq z} f(p)^2 M\left(\frac{z}{p}; f^2\right) \gg z \sum_{\sqrt{z} < p \leq z} \frac{f(p)^2}{p} \quad (z \geq 1).$$

D'où

$$\sum_{\substack{\sqrt{z} < p \leq z \\ f(p) > H}} \frac{f(p)}{p} \ll \frac{1}{H},$$

et donc, en multipliant par  $\log z$ , en spécialisant  $z := x^{1/2^k}$  ( $k \geq 0$ ) et en sommant sur  $k$ ,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) > H}} \frac{f(p) \log p}{p} \ll \frac{\log x}{H} \quad (x \geq 1).$$

Cela implique (2.6) en reportant dans (2.7) et en choisissant  $H := e^{-S(x;f)/2}$ .

Nous obtenons donc, sous l'hypothèse  $M(x; f) \geq Ax$ ,

$$(2.8) \quad S(x; f) \geq -K$$

où  $K$  est une constante positive dépendant *a priori* de  $f$  et  $A$ .

Donnons-nous alors un paramètre  $a > 0$  et posons  $\varphi_a(t) := \frac{2}{3}a(t^{3/2} - 1) + a(1 - t)$ . Ainsi,  $\varphi_a$  est décroissante sur  $[0, 1]$ , croissante sur  $[1, \infty[$  et  $\varphi_a(1) = 0$ . Choisissons alors  $a := 6(1 + \sqrt{2})$ , de sorte que  $\varphi_a(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $\varphi_a(2) = 2(3 - \sqrt{2}) > 1$ . On vérifie également que  $\varphi_a(t) - t + 1$  est croissante pour  $t \geq 2$ . Il suit

$$\mathbf{1}_{[0, 1/2]}(t) + (t - 1)\mathbf{1}_{[2, \infty]}(t) \leq \varphi_a(t) \quad (t \geq 0).$$

Nous déduisons donc de (2.8) et (2.5) que, sous l'hypothèse  $M(x; f) \geq Ax$ , nous avons

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) \leq 1/2}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) \geq 2}} \frac{f(p) - 1}{p} \leq \sum_{p \leq x} \frac{\varphi_a(f(p))}{p} \leq \frac{2}{3}aL(\frac{3}{2}) + aK.$$

Comme  $x$  peut être pris arbitrairement grand, nous obtenons

$$(2.9) \quad \sum_{f(p) \leq 1/2} \frac{1}{p} + \sum_{f(p) \geq 2} \frac{f(p)}{p} < \infty.$$

Nous sommes à présent en mesure d'aborder la phase essentielle de la preuve. Étant donné  $x \geq 1$  tel que  $M(x; f) \geq Ax$ , nous introduisons une nouvelle fonction multiplicative  $f_x$  définie par

$$f_x(p^\nu) := \begin{cases} 0 & \text{si } p > x \text{ ou } \nu \geq 2 \text{ ou } f(p) \notin [\frac{1}{2}, 2], \\ f(p) & \text{si } \nu = 1, p \leq x, \frac{1}{2} \leq f(p) \leq 2. \end{cases}$$

Il est clair que  $0 \leq f_x \leq f$ .

Nous avons

$$\int_1^\infty \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{f_x(n)}{n} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f_x(p)}{p}\right)$$

et, grâce à l'encadrement  $u - \frac{1}{2}u^2 \leq \log(1+u) \leq u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ), nous en déduisons, en vertu de (2.3), (2.5), (2.8) et (2.9),

$$\int_1^\infty \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt \asymp \log x.$$

Montrons que cette estimation persiste lorsque l'intégrale est restreinte à un domaine du type  $x^\eta \leq t \leq x^{1/\eta}$  pour une constante convenable  $\eta \in ]0, 1[$ . À cette fin, nous utilisons d'une part la majoration  $M(t; f_x) \ll t$ , qui fournit

$$\int_1^{x^\eta} \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt \ll \eta \log x,$$

et d'autre part l'inégalité

$$M(t; f_x) \leq M(t; f_x^2)^{1/2} \Psi(t, x)^{1/2}$$

où  $\Psi(t, x)$  désigne le nombre des entiers  $x$ -friables n'excédant pas  $t$ . En insérant la majoration uniforme

$$\Psi(t, x) \ll t^{1-1/(2 \log x)} \quad (t \geq 1, x \geq 2),$$

établie dans [17] (th. III.5.1), nous obtenons

$$\int_{x^{1/\eta}}^\infty \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt \ll e^{-1/(4\eta)} \log x.$$

Cela implique bien, pour un choix convenable du paramètre  $\eta$ ,

$$(2.10) \quad \int_{x^\eta}^{x^{1/\eta}} \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt \asymp \log x.$$

Pour  $\delta > 0$ , désignons par  $E(\delta; x)$  l'ensemble des nombres réels  $t$  de  $[x^\eta, x^{1/\eta}]$  tels que  $M(t; f_x) > \delta t$ . Il découle de (2.10) que l'on a, pour une constante convenable  $C > 0$ ,

$$\log x \ll \int_{x^\eta}^{x^{1/\eta}} \frac{M(t; f_x)}{t^2} dt \leq \frac{\delta \log x}{\eta} + C \int_{E(\delta; x)} \frac{dt}{t}.$$

Ainsi, lorsque  $\delta$  est suffisamment petit,

$$\int_{E(\delta; x)} \frac{dt}{t \log t} \gg \frac{1}{\log x} \int_{E(\delta; x)} \frac{dt}{t} \gg 1.$$

En vertu de la majoration

$$M(w; f) - M(v; f) \leq \sqrt{(1+w-v)M(w; f^2)} \ll \sqrt{w(1+w-v)} \quad (w \geq v \geq 1),$$

nous avons, pour  $x$  assez grand,

$$t \in E(\delta; x) \text{ et } t \leq \frac{1}{2}x^{1/\eta} \Rightarrow [t, t + t/\log x] \subset E(\delta/2; x).$$

Il existe donc au moins  $r \gg (\log x)^2$  intervalles disjoints  $[t_j, t_j + t_j/\log x]$  dont la réunion est incluse dans  $E(\delta/2; x)$ . Une forme forte du théorème des nombres premiers nous permet d'en déduire que, pour tout  $z \in [x^{2/\eta}, x^{3/\eta}]$ , nous avons

$$\sum_{z/p \in E(\delta/2; x)} \frac{1}{p} \gg 1,$$

et donc, compte tenu de (2.9),

$$\sum_{z/p \in E(\delta/2; x)} \frac{f(p)}{p} \gg 1.$$

Or, nous avons trivialement

$$\begin{aligned} M(z; f) &\geq \sum_{\substack{mp \leq z \\ m < p}} f_x(m)f(p) \geq \sum_{z/p \in E(\delta/2; x)} f(p)M(z/p; f_x) \\ &\geq \sum_{z/p \in E(\delta/2; x)} f(p) \frac{\delta z}{p} \gg z. \end{aligned}$$

Nous avons donc établi le résultat annoncé avec  $c_1 := 2/\eta$ ,  $c_2 := 3/\eta$ .  $\square$

**Lemme 2.2.** Soit  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$ . Si  $\overline{M}(f) > 0$ , alors

$$(2.11) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} < \infty.$$

*Démonstration.* Comme dans [4], nous faisons appel à la forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius (voir par exemple [17], th. III.3.2). Notant  $f_{[p]}$  la fonction multiplicative définie par

$$f_{[p]}(n) := \begin{cases} f(n) & \text{si } p \nmid n, \\ 0 & \text{si } p \mid n, \end{cases}$$

nous avons

$$(2.12) \quad \sum_{p^\nu \leq x} p^\nu \left| f(p^\nu) M\left(\frac{x}{p^\nu}; f_{[p]}\right) - \frac{1-1/p}{p^\nu} M(x; f) \right|^2 \ll x^2 \quad (x \geq 1).$$

Or, pour tout  $z \geq 1$ , nous pouvons écrire

$$M(z; f_{[p]}) = M(z; f) - \sum_{\substack{n \leq z \\ n \equiv 0 \pmod{p}}} f(n) \geq M(z; f) - \frac{Bz}{\sqrt{p}}$$

où, la somme en  $n$  ayant été majorée par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,  $B$  est une constante convenable. D'après le Lemme 2.1, il existe une suite infinie  $\mathcal{X}$  de valeurs de  $x$  et une constante  $\varepsilon > 0$ , telles que

$$M(x/p^\nu; f) \asymp x/p^\nu \quad (x \in \mathcal{X}, p^\nu \leq x^\varepsilon).$$

La même évaluation est donc valable pour  $M(x/p^\nu; f_{[p]})$  dès que  $p > p_0$  si  $p_0$  est choisi assez grand. Il s'ensuit que

$$\sum_{p > p_0} \sum_{\substack{\nu \geq 2 \\ p^\nu \leq x^\varepsilon}} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \ll \sum_{p > p_0} \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{p^\nu} + 1 \ll 1 \quad (x \in \mathcal{X}).$$

En faisant tendre  $x$  vers l'infini tout en restant dans  $\mathcal{X}$ , nous obtenons la convergence de la sous-série de (2.11) correspondant à  $p > p_0$ .

Lorsque  $p \leq p_0$ , nous observons que, pour  $x \in \mathcal{X}$ ,  $x^{c_1} \leq z \leq x^{c_2}$ ,

$$\begin{aligned} z &\ll M(z, f) = \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu) M\left(\frac{z}{p^\nu}; f_{[p]}\right) \\ &\ll z^{2/3} M(z; f_{[p]})^{1/3} \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{2\nu/3}} \ll z^{2/3} M(z; f_{[p]})^{1/3} \ll z^{5/6} M(z; f_{[p]}^2)^{1/6}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $z := x^{(c_1+c_2)/2}$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit, il suit

$$z \sum_{p^\nu \leq x^\varepsilon} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \ll \sum_{p^\nu \leq x^\varepsilon} f(p^\nu)^2 M\left(\frac{z}{p^\nu}; f_{[p]}^2\right) \ll M(z; f^2) \ll z.$$

Cela montre que chacune des sommes intérieures de (2.11) est convergente et achève ainsi la démonstration.  $\square$

Désignons par  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier d'un entier naturel  $n$ , avec la convention  $P^-(1) = \infty$ .

**Lemme 2.3.** Soit  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R}^+)$ . Si  $\overline{M}(f) \neq 0$ , il existe un nombre réel  $y_0$  tel que, pour tout entier  $D$  fixé satisfaisant à  $P^-(D) > y_0$  et  $x$  assez grand, on ait

$$(2.13) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,D)=1}} f(n) \ll x \prod_{p|D} \left( \frac{1 - 1/p}{1 + f(p)^2/p} \right)^{1/2}.$$

*Démonstration.* On a  $M(f^2) \geq \overline{M}(f)^2 > 0$  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La relation

$$\sum_{n \leq x} f(n)^2 = M(f^2)x + o(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

implique immédiatement  $f(n)^2 = o(n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . D'après le Lemme 2.2, il existe donc un nombre réel  $y_0$  tel que

$$(2.14) \quad \sup_{p > y_0} \sum_{\nu \geq 1} f(p^\nu)^2/p^\nu \leq \frac{1}{2}.$$

Définissons une nouvelle fonction multiplicative  $h_D$  par

$$h_D(p^\nu) := \begin{cases} f(p^\nu)^2 & \text{si } p \nmid D, \\ 0 & \text{si } p \mid D. \end{cases}$$

Écrivons alors la relation de convolution  $h_D = f^2 * g_D$  où  $g_D$  est la fonction multiplicative définie par les identités formelles

$$(2.15) \quad \sum_{\nu \geq 0} g_D(p^\nu) z^\nu := \begin{cases} \left( \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)^2 z^\nu \right)^{-1} & \text{si } p \nmid D, \\ 1 & \text{si } p \mid D. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout diviseur premier  $p$  de  $D$ , la série de gauche admet pour série majorante la série à coefficients positifs ou nuls

$$\frac{1}{1 - \sum_{\nu \geq 1} f(p^\nu)^2 z^\nu} = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{\nu \geq 1} f(p^\nu)^2 z^\nu \right)^k.$$

Il résulte donc de (2.14) que

$$(2.16) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|g_D(n)|}{n} = \prod_{p|D} \sum_{\nu \geq 0} \frac{|g_D(p^\nu)|}{p^\nu} < \infty.$$

Désignons par  $\Phi_D(x)$  le nombre des entiers premiers à  $D$  n'excédant pas  $x$  et notons  $H_D$  la fonction sommatoire de  $h_D$ . Nous avons

$$(2.17) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,D)=1}} f(n) \leq \sqrt{\Phi_D(x) H_D(x)} \quad (x \geq 1).$$

Il résulte immédiatement de (2.16) que

$$(2.18) \quad H_D(x) = \sum_{k \leq x} g_D(k) \sum_{m \leq x/k} f(m)^2 \sim M(f^2)G(D)x \quad (x \rightarrow \infty)$$

avec la notation

$$G(D) := \sum_{n \geq 1} \frac{g_D(n)}{n} = \prod_{p|D} \frac{1}{\sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)^2/p^\nu}.$$

Nous avons par ailleurs, d'après un résultat classique de crible (voir par exemple [17] th. I.4.3),

$$(2.19) \quad \Phi_D(x) \ll x \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (x \geq D).$$

Cela implique bien l'évaluation annoncée.  $\square$

Nous utilisons également le résultat taubérien suivant, dont une version plus faible suffirait d'ailleurs à notre application. Nous donnons la courte démonstration pour la commodité du lecteur.

**Lemme 2.4.** *Soit  $\{a_p\}_p$  une suite indexée par les nombres premiers, à valeurs réelles positives ou nulles, et telle que  $a_p = o(p)$  ( $p \rightarrow \infty$ ). Si le produit*

$$A(\sigma) := \prod_p \left(1 + \frac{a_p}{p^\sigma}\right)$$

*converge pour tout  $\sigma > 1$  et si la limite  $a := \lim_{\sigma \rightarrow 1+} A(\sigma)/\zeta(\sigma)$  existe et est non nulle, alors le produit infini  $\prod_p (1 + a_p/p)(1 - 1/p)$  converge vers  $a$ .*

*Démonstration.* On a  $a_p \leq \frac{1}{2}p$  pour  $p$  assez grand. Comme nous pouvons traiter trivialement toute partie finie du produit, nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette inégalité est réalisée pour tout  $p$ . Posant  $b_1 := -\log a$ ,  $b_n := \{(-1)^{\nu-1} a_p^\nu - 1\}/\nu$  si  $n = p^\nu$  avec  $\nu \geq 1$  et  $b_n := 0$  si  $n$  n'est pas une puissance de nombre premier, nous déduisons alors des hypothèses effectuées que la série

$$B(\sigma) := \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^\sigma} = -\log a + \sum_p \log \left\{ \left(1 + \frac{a_p}{p^\sigma}\right) \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \right\}$$

converge pour tout  $\sigma > 1$  et vérifie

$$(2.20) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 1} B(\sigma) = 0.$$

On a

$$B''(\sigma) = \sum_p \frac{a_p (\log p)^2 p^\sigma}{(p^\sigma + a_p)^2} - \sum_p \frac{p^\sigma (\log p)^2}{(p^\sigma - 1)^2} \geq \frac{\zeta'(\sigma)^2 - \zeta(\sigma)\zeta''(\sigma)}{\zeta(\sigma)^2} \geq \frac{-K}{(\sigma - 1)^2}$$

pour une constante convenable  $K$ . D'après un théorème de Landau (voir par exemple [17], th. II.7.6), nous obtenons

$$-B'(\sigma) = \sum_p \left\{ \frac{a_p \log p}{a_p + p^\sigma} - \frac{\log p}{p^\sigma - 1} \right\} = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \quad (\sigma \rightarrow 1+),$$

et donc

$$(2.21) \quad \sum_p \frac{a_p \log p}{a_p + p^\sigma} \sim \frac{1}{\sigma - 1} \quad (\sigma \rightarrow 1+).$$

Cette dernière relation implique à son tour

$$\sum_p \frac{a_p^2 \log p}{p^\sigma (a_p + p^\sigma)} = \sum_p \frac{o(a_p \log p)}{a_p + p^\sigma} = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \quad (\sigma \rightarrow 1+),$$

et donc, grâce à (2.21),

$$\sum_p \frac{a_p \log p}{p^\sigma} \sim \frac{1}{\sigma - 1} \quad (\sigma \rightarrow 1+).$$

Nous pouvons alors déduire du théorème de Karamata que l'on a

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_p - 1}{p} \log p = o(\log x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

et, de nouveau grâce à la relation  $a_p = o(p)$ ,

$$(2.22) \quad \sum_{n \leq x} \frac{b_n \log n}{n} = \sum_{\nu \geq 1} \sum_{p \leq x^{1/\nu}} \frac{(-1)^{\nu-1} a_p^\nu - 1}{p^\nu} \log p = o(\log x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Or, le théorème de Tauber sous forme intégrale (voir par exemple [17], th. II.7.4) stipule que, sous l'hypothèse (2.20), la relation (2.22) équivaut à

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n} = 0.$$

□

*Remarque.* Le théorème taubérien de Hardy–Littlewood–Karamata implique facilement que, pour toute suite  $\{c_p\}_p$  majorée ou minorée, la relation

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1+} \sum_p \frac{c_p}{p^\sigma} = b$$

implique la convergence vers  $b$  de la série  $\sum_p c_p/p$ . Ce résultat, qui aurait été suffisant pour notre application, est, par exemple, établi dans [18] (Exercice II.7.8) lorsque la suite est bornée et la même technique fonctionne sans changement sous une hypothèse unilatérale. Au vu de la relation

$$\log \left\{ \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \left(1 - \frac{a_p}{p^\sigma}\right) \right\} = \frac{a_p - 1}{p^\sigma} + O\left(\frac{a_p + (a_p - 1)^2}{p^{2\sigma}}\right)$$

nous voyons donc que la conclusion du Lemme 2.4 est acquise si nous disposons de l'information supplémentaire que la série  $\sum_p (a_p - 1)^2/p^2$  converge. Notre énoncé permet de s'affranchir de cette dernière condition.

## 2.2. Complétion de l'argument

Soit  $f \in \mathcal{R}^2(\mathbb{R})$ . Si  $\overline{M}(|f|) = 0$ , alors  $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$  et  $M(f) = 0$ . Nous pouvons donc supposer dans la suite que l'on a

$$(2.23) \quad \overline{M}(|f|) > 0.$$

Par une simple application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz cela implique que  $c := M(f^2) > 0$ .

Une sommation d'Abel standard permet d'écrire

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)^2}{n^\sigma} \sim \frac{c}{\sigma - 1} \quad (\sigma \rightarrow 1+).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1+} \frac{1}{\zeta(\sigma)} \prod_p \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)^2/p^{\nu\sigma} = c,$$

et donc, en vertu du Lemme 2.2,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1+} \frac{1}{\zeta(\sigma)} \prod_p \left(1 + f(p)^2/p^\sigma\right) = a := c \prod_p \left\{1 + \frac{\sum_{\nu \geq 2} f(p^\nu)^2/p^\nu}{1 + f(p)^2/p}\right\}^{-1} > 0.$$

De plus, la relation

$$\sum_{n \leq x} f(n)^2 = cx + o(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

implique immédiatement  $f(n)^2 = o(n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Nous pouvons donc appliquer le Lemme 2.4 à la suite  $\{f(p)^2\}_p$ , d'où

$$(2.24) \quad \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)^2}{p}\right) \sim a \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Établissons d'abord l'existence d'une valeur moyenne pour  $f$  lorsque la série (1.1) converge.

Sous cette hypothèse supplémentaire, nous déduisons de (2.24) et de l'estimation

$$(2.25) \quad \log \left\{ \left(1 + \frac{f(p)^2}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\} = \frac{f(p)^2 - 1}{p} + O\left(\frac{\{f(p)^2 - 1\}^2 + f(p)^2}{p^2}\right),$$

la convergence de la série

$$(2.26) \quad \sum_p \frac{f(p)^2 - 1}{p}.$$

Pour chaque  $y \geq 2$ , introduisons alors la fonction multiplicative  $f_y$  définie par

$$(2.27) \quad f_y(n) := \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq y}} f(p^\nu).$$

On a  $f_y = g_y * \mathbf{1}$  où  $g_y$  est la fonction multiplicative définie par

$$g_y(p^\nu) := \begin{cases} f(p^\nu) - f(p^{\nu-1}) & \text{si } p \leq y, \\ 0 & \text{si } p > y. \end{cases}$$

Comme la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|g_y(n)|}{n} = \prod_{p \leq y} \left(1 + \sum_{\nu \geq 1} \frac{|f(p^\nu) - f(p^{\nu-1})|}{p^\nu}\right)$$

est convergente,  $f_y$  possède, pour chaque  $y$  fixé, une valeur moyenne

$$(2.28) \quad M(f_y) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_y(n)}{n} = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}.$$

L'identité  $f(p) - 1 = \frac{1}{2}\{f(p)^2 - 1\} - \frac{1}{2}(f(p) - 1)^2$  montre alors que la série

$$(2.29) \quad \sum_p \frac{f(p) - 1}{p}$$

est également convergente, ce qui implique à son tour la convergence de  $M(f_y)$  vers une limite non nulle lorsque  $y \rightarrow \infty$ .

Il reste à majorer  $|M(x; f) - M(x; f_y)|$ . À cette fin, nous introduisons la fonction multiplicative  $\varphi_y$ , duale de  $f_y$ , définie par

$$\varphi_y(p^\nu) := \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq y, \\ f(p^\nu) & \text{si } p > y. \end{cases}$$

La fonction  $f_y$  est dans  $\mathcal{R}^2(\mathbb{R})$  pour chaque  $y$  fixé, et vérifie

$$M(f_y^2) = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \ll 1,$$

en vertu des diverses convergences établies plus haut. En notant que l'on a

$$f_y(n)|\varphi_y(n) - 1|^{1/2} \ll \sqrt{|f(n)f_y(n)|} + |f_y(n)| \ll |f(n)| + |f_y(n)|$$

uniformément pour  $n \geq 1$ ,  $y \geq 2$ , d'où

$$|f(n) - f_y(n)| \leq (|f(n)| + |f_y(n)|)|\varphi_y(n) - 1|^{1/2},$$

et, en appliquant l'inégalité de Hölder avec exposants  $\frac{3}{2}$  et 3,

$$\begin{aligned} (2.30) \quad |M(x; f) - M(x; f_y)| &\leq M(x; |f - f_y|) \\ &\ll M(x; |f|^{3/2} + |f_y|^{3/2})^{2/3} M(x; |\varphi_y - 1|^{3/2})^{1/3} \\ &\ll x^{2/3} M(x; |\varphi_y - 1|^{3/2})^{1/3}. \end{aligned}$$

Considérons alors les fonctions additives

$$\vartheta_y(n) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p > y}} \{f(p^\nu) - 1\}^2, \quad \psi_y(n) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n, p > y \\ |f(p^\nu)| > 1/2}} \log f(p^\nu),$$

avec une détermination quelconque du logarithme complexe définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Si  $\vartheta_y(n) < \frac{1}{4}$ , alors  $\exp \psi_y(n) = \varphi_y(n)$ . Il est donc clair que, pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a

$$\vartheta_y(n) < \frac{1}{4} \text{ et } |\psi_y(n)| \leq \varepsilon \Rightarrow |\varphi_y(n) - 1| \ll \varepsilon.$$

Nous pouvons donc écrire, pour tous  $y \geq 2$  et  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$(2.31) \quad M(x; |\varphi_y - 1|^{3/2}) \ll \varepsilon^{3/2} x + \left\{ M(x; \vartheta_y) + \frac{M(x; \psi_y^2)}{\varepsilon^2} \right\}^{1/4} M(x; |\varphi_y - 1|^2)^{3/4},$$

où nous avons majoré la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $|\varphi_y(n) - 1| > \varepsilon$  par  $\ll \vartheta_y(n)^{1/4} + \sqrt{|\psi_y(n)|/\varepsilon}$  et appliqué l'inégalité de Hölder avec exposants 4 et  $\frac{4}{3}$ . Une simple application de (2.18) avec  $D := \prod_{y_0 < p \leq y} p$  fournit, pour  $y$  fixé et  $x \rightarrow \infty$ ,

$$(2.32) \quad M(x; |\varphi_y - 1|^2) \ll \sum_{\substack{m \leq x \\ p|m \Rightarrow p \leq y}} \frac{x}{m} \prod_{p \leq y} \frac{1}{1 + f(p)^2/p} \ll x \prod_{p \leq y} \frac{1 + 1/p}{1 + f(p)^2/p} \ll x$$

où la constante implicite est indépendante de  $y$ . De plus, en utilisant systématiquement l'approximation  $\log z = z - 1 + O(|z - 1|^2)$  lorsque  $z \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et en tenant compte des convergences des séries (1.1), (2.11) et (2.26), nous déduisons de l'inégalité de Turán–Kubilius que

$$(2.33) \quad \begin{aligned} M(x; \psi_y^2) &\ll x \left\{ \sum_{\substack{p > y \\ \nu \geq 1}} \frac{|\log f(p^\nu)|^2}{p^\nu} + \left( \sum_{\substack{p > y \\ p^\nu \leq x}} \frac{\log f(p^\nu)}{p^\nu} \right)^2 \right\} \\ &\ll x \left\{ \sum_{\substack{p > y \\ \nu \geq 1}} \frac{(f(p^\nu) - 1)^2}{p^\nu} + \left( \sum_{y < p \leq x} \frac{f(p) - 1}{p} \right)^2 \right\} \ll x \varepsilon_y \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_y = o(1)$  lorsque  $y \rightarrow \infty$ . On a clairement  $M(\vartheta_y) \ll \varepsilon_y$  pour tout  $y$ . En faisant tendre  $x$ , puis  $y$  vers l'infini et ensuite  $\varepsilon$  vers 0 dans (2.31), nous obtenons bien l'existence d'une valeur moyenne pour  $f$ .

Supposons à présent que la série (1.1) diverge. Nous devons montrer que  $f$  est de valeur moyenne nulle.

Considérons d'abord le cas  $f \geq 0$ . Nous raisonnons par l'absurde et établissons que l'hypothèse (2.23), i.e.  $\overline{M}(f) > 0$ , conduit à une impossibilité.

Soit  $D = D_y := \prod_{y_0 < p \leq y} p$ . Notons  $S_D(x)$  l'ensemble des entiers n'excédant pas  $x$  dont tous les facteurs premiers divisent  $D$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &= \sum_{m \in S_D(x)} f(m) \sum_{\substack{n \leq x/m \\ (n, D)=1}} f(n) \\ &\ll x \sum_{m \in S_D(x)} \frac{f(m)}{m} \prod_{y_0 < p \leq y} \left( \frac{1 - 1/p}{1 + f(p)^2/p} \right)^{1/2} + o(x), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.3. Il suit

$$\begin{aligned} \overline{M}(f) &\ll \prod_{y_0 < p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \left( \frac{1 - 1/p}{1 + f(p)^2/p} \right)^{1/2} \\ &\ll \prod_{y_0 < p \leq y} \left( 1 + \frac{f(p)}{p} \right) \left( \frac{1 - 1/p}{1 + f(p)^2/p} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Considérons alors la fonction

$$\lambda_p(w) := \log \left( 1 + \frac{w}{p} \right) + \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{w^2}{p} \right) + \frac{(w-1)^2}{8p}.$$

On a

$$\lambda'_p(w) = \frac{(w-1)\{(p+w)(p+w^2) - 4p^2\}}{4p(p+w)(p+w^2)},$$

donc  $\lambda'_p(w)$  est du signe de  $1 - w$  sur l'intervalle  $[0, \sqrt{p}]$ . En particulier,  $\lambda_p(w) \leq \lambda_p(1) < 0$  pour  $0 \leq w \leq \sqrt{p}$ . En appliquant cette inégalité avec  $w = f(p)$ , nous obtenons

$$\overline{M}(f) \ll \exp\left(-\sum_{y_0 < p \leq y} \frac{\{f(p) - 1\}^2}{8p}\right).$$

Le résultat annoncé découle de cette majoration en faisant tendre  $y$  vers l'infini.

Nous sommes à présent en mesure de traiter le cas général.

Si l'on a

$$(2.34) \quad \sum_p \frac{(|f(p)| - 1)^2}{p} = \infty,$$

il s'ensuit, d'après ce qui précède, que  $M(|f|) = 0$  et donc  $M(f) = 0$ . Nous pouvons donc supposer dorénavant que la série (2.34) converge. L'inégalité de Turán-Kubilius (2.12) implique alors

$$(2.35) \quad \sum_{p \leq x} p \left| f(p) M\left(\frac{x}{p}; f\right) - \frac{M(x; f)}{p} \right|^2 \ll x^2 \quad (x \geq 1),$$

puisque l'on a  $M(x/p; f_{[p]}) = M(x/p; f) + O(x/p^{3/2})$  pour tout  $p \leq x$ .

Supposons momentanément que, pour chaque  $\alpha > 0$  et chaque  $y \geq 2$ , il existe un  $x_0 = x_0(\alpha, y)$  tel que

$$(2.36) \quad (|M(x; f)| > \alpha x \text{ et } x > x_0(\alpha, y)) \Rightarrow \min_{p \leq y} M(x/p; f) M(x; f) > 0.$$

Nous déduisons alors de (2.35) que l'on a, pour  $x > x_0(y)$  et  $|M(x; f)| > \alpha x$ ,

$$(2.37) \quad \begin{aligned} & \sum_{p \leq y} p \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) - \frac{M(x; f)}{p} \right|^2 \\ & \leq 2 \sum_{p \leq y} p \left| f(p) M\left(\frac{x}{p}; f\right) - \frac{M(x; f)}{p} \right|^2 + 2 \sum_{p \leq y} p \left| (|f(p)| - 1) M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right|^2 \\ & \ll x^2 + x^2 \sum_{p \leq y} \frac{(|f(p)| - 1)^2}{p} \ll x^2. \end{aligned}$$

D'où, dans les mêmes conditions,

$$\begin{aligned}
M(x; f)^2 &\sum_{p \leq y} \frac{(f(p) - 1)^2}{p} \\
&= \sum_{p \leq y} p \left| \{f(p) - 1\} \frac{M(x; f)}{p} - f(p)M\left(\frac{x}{p}; f\right) + f(p)M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right|^2 \\
&\leq 2 \sum_{p \leq y} p f(p)^2 \left| \frac{M(x; f)}{p} - M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right|^2 + 2 \sum_{p \leq y} p \left| f(p)M\left(\frac{x}{p}; f\right) - \frac{M(x; f)}{p} \right|^2 \\
&\ll x^2 + x^2 \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| > 2}} \frac{f(p)^2}{p} \ll x^2,
\end{aligned}$$

où la dernière estimation résulte de la convergence de la série (2.34). Comme la série (1.1) diverge, cela implique immédiatement  $\limsup |M(x; f)|/x = 0$  et donc  $M(f) = 0$ .

Il reste à établir (2.36). Comme annoncé dans l'introduction, nous utilisons à cette fin un argument très simple dû à Hildebrand [10].

Nous allons en fait montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a, pour  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  convenable et  $x$  assez grand,

$$(2.38) \quad \sup_{x^{1-\delta} \leq z \leq x} \left| |M(x; f)|/x - |M(z; f)|/z \right| \leq \varepsilon.$$

Cela implique bien le résultat souhaité puisque les moyennes locales  $M(t; f)/t$  varient d'au plus  $|f(n)|/n \ll 1/\sqrt{n}$  dans chaque intervalle  $[n, n+1[$ .

Pour montrer (2.38), nous commençons par observer que, par une manipulation analogue à (2.37), nous avons pour tout  $x \geq 1$

$$\sum_{p \leq x} p \left| \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right| - \frac{|M(x; f)|}{p} \right|^2 \ll x^2,$$

d'où, pour tout  $\xi \in [1, x]$ , par une application standard de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|M(x; f)| \sum_{\xi < p \leq x} \frac{1}{p} &= \sum_{\xi < p \leq x} \left| \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right| + \frac{|M(x; f)|}{p} - \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right| \right| \\
&= \sum_{\xi < p \leq x} \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right| + O\left(x \sqrt{\sum_{\xi < p \leq x} \frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Choisissons  $\xi := x^{\exp(-\vartheta)}$  où  $\vartheta$  est un paramètre de  $[1, \frac{1}{2} \log_2 x]$  qui sera précisé plus loin. Nous avons classiquement  $\sum_{\xi < p \leq x} 1/p = \vartheta + O(1/\sqrt{\log x})$ . Nous pouvons donc

déduire de ce qui précède que

$$(2.39) \quad |M(x; f)| = \frac{1}{\vartheta} \sum_{\xi < p \leq x} \left| M\left(\frac{x}{p}; f\right) \right| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Écrivons la somme en  $p$  sous la forme

$$\sum_{1 \leq n < x/\xi} |M(n; f)| \left\{ \int_{x/(n+1)}^{x/n} \frac{dt}{\log t} + R_n \right\} = \int_{\xi}^x \frac{|M(x/t; f)|}{\log t} dt + R$$

où  $R_n = \sum_{x/n < p \leq x/(n+1)} 1 - \int_{x/(n+1)}^{x/n} dt/\log t$  ( $n \geq 1$ ) et

$$R \ll \frac{x}{\xi} + \left| \sum_{1 \leq n < x/\xi} |M(n; f)| R_n \right|.$$

La dernière somme peut être évaluée par sommation d'Abel en notant d'une part que  $||M(n+1; f)| - |M(n; f)|| \leq |f(n)|$  et d'autre part que

$$\sum_{N \leq n < x/\xi} R_n \ll \frac{x}{N} e^{-\sqrt{\log x}} \quad (1 \leq N \leq x/\xi),$$

d'après le théorème des nombres premiers. Nous obtenons

$$R \ll x e^{-\sqrt{\log x}} \sum_{1 \leq n \leq x/\xi} \frac{|f(n)|}{n} \ll x,$$

et donc, en reportant dans (2.39),

$$(2.40) \quad |M(x; f)| = \frac{x}{\vartheta} \int_1^{x/\xi} \frac{|M(s; f)|}{s^2 \log(x/s)} ds + O\left(\frac{x}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Soit alors  $z \in [x^{1-\delta}, x]$ . Choisissons  $\xi_1$  de sorte que  $z/\xi_1 = x/\xi$  et appliquons (2.40) avec  $z$  et  $\xi_1$  à la place de  $x$  et  $\xi$ . Si  $\vartheta_1$  est défini par  $\xi_1 = z^{\exp(-\vartheta_1)}$ , nous avons  $\vartheta_1 = \vartheta - \log(1 + \delta e^\vartheta - \delta)$ . Pour le choix  $\vartheta := \frac{1}{2} \log(1/\delta)$ , nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |M(z; f)| &= \frac{z}{\vartheta + O(\sqrt{\delta})} \int_1^{x/\xi} \frac{|M(s; f)|}{s^2 \log(z/s)} ds + O\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right) \\ &= \frac{z}{\vartheta} \int_1^{x/\xi} \frac{|M(s; f)|}{s^2 \log(z/s)} ds + O\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right). \end{aligned}$$

En soustrayant cette formule de (2.40), il vient

$$\begin{aligned} \frac{|M(x; f)|}{x} - \frac{|M(z; f)|}{z} &\ll \frac{1}{\vartheta} \int_1^{x/\xi} \frac{\log(x/z) ds}{s \log(x/s) \log(z/s)} + \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \\ &\ll \frac{\delta \log x}{\vartheta \log \xi} + \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \ll \frac{1}{\sqrt{\log 1/\delta}}. \end{aligned}$$

Cela implique bien (2.38) et achève ainsi la démonstration.

### 3. Démonstration du Théorème 1.2

D'après l'estimation classique, déjà mentionnée plus haut, de Halberstam et Richert [8] (la forme simplifiée du th. III.3.5 de [17] suffit ici), nous déduisons de l'hypothèse (1.3) et de la relation (2.11) la majoration

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll x e^{S(x;f)} \quad (x \geq 1)$$

avec

$$S(x;f) := \sum_{p \leq x} \frac{f(p) - 1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)^2 - 1 - \{f(p) - 1\}^2}{2p}.$$

Le résultat annoncé découle donc de la convergence de la série (2.26), qui, sous nos hypothèses, est conséquence de (2.25) et (2.24).

### 4. Démonstration du Corollaire 1.3

Soit  $d\mu$  une mesure de probabilité générique sur  $[0, 2]$  et  $\{\sigma_j\}_{j \geq 0}$  la suite de ses moments. Posons  $s_0 = s_2 = 1$ ,  $s_4 = 2$ ,  $s_6 = 5$ ,  $s_8 = 14$ . Dans un premier temps, montrons que, le nombre  $s$  étant défini par (1.7), on a

$$(4.1) \quad \sup_{\sigma_{2k} = s_k \quad (1 \leq k \leq 4)} \sigma_1 = 1 - s.$$

À cette fin, nous recherchons une mesure extrémale sous la forme

$$d\mu^* = \alpha \delta_a + \beta \delta_b + \gamma \delta_2$$

avec les contraintes  $0 \leq a, b \leq 2$ ,  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Une résolution par calcul formel (effectuée par Mario Sigalotti et Paolo Mason, que l'auteur prend plaisir à remercier ici) montre qu'une solution du système

$$\int_0^2 y^{2k} d\mu^*(y) = s_{2k} \quad (0 \leq k \leq 4)$$

est donnée par

$$\alpha = \frac{102 + 7\sqrt{21}}{210}, \quad \beta = \frac{102 - 7\sqrt{21}}{210}, \quad \gamma = \frac{1}{35}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{5}(6 - \sqrt{21})}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{5}(6 + \sqrt{21})}.$$

En résolvant alors un système linéaire  $5 \times 5$ , nous obtenons l'existence d'un polynôme réel  $P(y) = \sum_{0 \leq j \leq 4} \lambda_j y^j$  tel que

$$P(a^2) = a, \quad P(b^2) = b, \quad P(4) = 2, \quad 2aP'(a^2) = 2bP'(b^2) = 1.$$

Un examen de la concavité permet d'établir aisément que l'on a

$$(4.2) \quad y \leq P(y^2) \quad (0 \leq y \leq 2).$$

Par intégration sur  $[0, 2]$ , nous obtenons, pour toute mesure  $\mu$ ,

$$\sigma_1 \leq \sum_{0 \leq j \leq 4} \lambda_j s_{2j} = \alpha a + \beta b + 2\gamma = 1 - s,$$

où l'égalité découle du fait que la relation  $P(y^2) = y$  a lieu  $d\mu^*$ -presque partout.

Cette estimation implique bien (4.1) puisque le membre de droite est égal au premier moment de  $d\mu^*$ . La majoration (1.6) est, quant à elle, obtenue en intégrant (4.2) relativement à la mesure de répartition logarithmique normalisée des  $\tau_0(p)$  ( $p \leq x$ ) sur  $[0, 2]$  et en exploitant les estimations de [11] sous la forme

$$\sum_{p \leq x} \frac{\tau_0(p)^{2k}}{p} = s_{2k} \log_2 x + O(1) \quad (0 \leq k \leq 4, x \rightarrow \infty).$$

Le fait que de telles formules asymptotiques résultent de la seule connaissance de l'ordre du pôle des séries de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} \tau_0(n)^{2k}/n^s$  en  $s = 1$  peut, par exemple, être établi en faisant appel au Lemme 2.4. Nous omettons les détails.

**Remerciements.** L'auteur tient à exprimer sa gratitude envers Jean-Pierre Ferrer, Guillaume Hanrot, Anne de Roton, Patrick Sargos, Mark Watkins et Jie Wu pour leur aide lors de la préparation de cet article.

## Bibliographie

- [1] P. Deligne, La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 273–307.
- [2] H. Daboussi & H. Delange, On a theorem of P.D.T.A. Elliott on multiplicative functions, *J. London Math. Soc. (2)* **14**, 2 (1976), 345–356.
- [3] P.D.T.A. Elliott, A mean-value theorem for multiplicative functions, *Proc. London Math. Soc. (3)* **31**, 4 (1975), 418–438.
- [4] P.D.T.A. Elliott, Mean value theorems for multiplicative functions bounded in mean  $\alpha$ -power,  $\alpha > 1$ . *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **29**, 2 (1980), 177–205.
- [5] P.D.T.A. Elliott, Multiplicative functions and Ramanujan's  $\tau$ -function, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **30**, 4 (1980/81), 461–468.
- [6] P.D.T.A. Elliott, *Duality in analytic number theory*, Cambridge Tracts in Mathematics 122, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] P.D.T.A. Elliott, C.J. Moreno & F. Shahidi, On the absolute value of Ramanujan's  $\tau$ -function, *Math. Ann.* **266**, 4 (1984), 507–511.
- [8] H. Halberstam & H.-E. Richert, On a result of R. R. Hall, *J. Number Theory* **11**, n° 1 (1979), 76–89.
- [9] R.R. Hall & G. Tenenbaum, Effective mean value estimates for complex multiplicative functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110** (1991), 337–351.
- [10] A. Hildebrand, On Wirsing's mean value theorem for multiplicative functions, *Bull. London Math. Soc.* **18**, 2 (1986), 147–152.

- [11] H.H. Kim & F. Shahidi, Cuspidality of symmetric powers with applications, *Duke Math. J.* **112**, 1 (2002), 177–197.
- [12] B.V. Levin, N.M. Timofeev, & S.T. Tuljaganov, Distribution of the values of multiplicative functions (en russe), *Litovsk. Mat. Sb.* **13**, 1 (1973), 87–100, 232.
- [13] J.-L. Maucilaire, On some arithmetical functions, *Functiones et Approximatio* **35** (2006), 219–233.
- [14] C.J. Moreno, & F. Shahidi, The fourth moment of Ramanujan  $\tau$ -function, *Math. Ann.* **266**, 2 (1983), 233–239.
- [15] R.A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan’s function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$  on the line  $\Re s = 13/2$ . II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **35** (1939), 351–372.
- [16] R.A. Rankin, Sums of powers of cusp form coefficients, II, *Math. Ann.* **272**, 4 (1985), 593–600.
- [17] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.
- [18] G. Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres* Cours spécialisés, 2, Société Mathématique de France (1996), xiv + 251 pp.

Gérald Tenenbaum  
Institut Élie Cartan  
Université de Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex  
France  
[gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr](mailto:gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr)