

# Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde

À *Eduard Wirsing, en témoignage d'amicale admiration.*

## Sommaire

<b>1</b>	Introduction .....	1
1.1	Historique et motivation.....	1
1.2	Notations .....	2
1.3	Résultats .....	3
<b>2</b>	Estimation intégrale de $\lambda(s)$ .....	4
<b>3</b>	Démonstration du Théorème 1.1.....	6
3.1	Dérivées de $\lambda_0(s)$ .....	6
3.2	Complétion de l'argument .....	6
<b>4</b>	Démonstration du Théorème 1.2.....	8
4.1	Lemmes relatifs à la fonction $\Gamma$ d'Euler .....	8
4.2	Développement asymptotique de $\log \lambda_0(s)$ .....	10
4.3	Développement asymptotique de $\lambda_0(s)$ .....	12
4.4	Développement asymptotique de $1 - G(1 - 1/\sigma)$ .....	14

## 1. Introduction

### 1.1. Historique et motivation

Soit  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler. Le premier exemple historique de loi de répartition limite pour une fonction arithmétique est dû à Schoenberg, qui, en 1928 [6], établit la formule

$$(1.1) \quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ \varphi(n)/n \leq t}} 1 = G(t) + o(1) \quad (0 \leq t \leq 1, N \rightarrow \infty)$$

où  $G(t)$  dépend continûment de  $t$  et vérifie  $G(0) = 0$ ,  $G(1) = 1$ .

Il est remarquable que, près de quatre-vingts ans plus tard, ce problème recèle encore bien des questions ouvertes. Ainsi, alors qu'Erdős a remarqué dans [5] que la borne supérieure, pour  $0 \leq t \leq 1$ , du terme d'erreur de (1.1) est  $\gg 1/\log N$ , on conjecture que cette valeur est effectivement admissible. Dans cette direction, le meilleur résultat connu, dû à Elliott ([3], th. 5.6), fournit seulement la majoration

$$\ll \frac{\log_2 N}{\log_3 N \log N}.$$

Ici et dans la suite, nous notons  $\log_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme.

L'étude du comportement local de la loi limite  $G$  est également inachevée. Schoenberg a établi dans [7] que  $G$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et Erdős [4] a montré que la mesure  $dG$  est purement singulière, ce qui implique en particulier que  $G'(t) = 0$  pour presque tout  $t$ . Enfin, Erdős [5] a prouvé en 1974 la majoration

$$(1.2) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \{G(t) - G(t - \varepsilon t)\} \ll \frac{1}{\log(1/\varepsilon)} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

et son optimalité sous la forme indiquée. Diamond & Rhoads [1] ont obtenu en 1984 une nouvelle preuve de cette estimation par des techniques spécifiques de la théorie des fonctions à valeur moyenne bornée.

Dans son récent travail de thèse [9], dont les résultats principaux font l'objet des publications [10] et [11], le second auteur affine la majoration (1.2) en établissant, d'une part, que le maximum du membre de gauche est essentiellement atteint lorsque  $t$  est un nombre rationnel de la forme  $\varphi(n)/n$  à petit dénominateur et, d'autre part, que les « grandes » valeurs de  $G(t) - G(t - \varepsilon t)$  peuvent être décrites simplement en fonction du comportement de  $G$  au voisinage de 1. Plus précisément, posant

$$\begin{aligned} K(t) &:= \sum_{\varphi(n)/n=t} 1/n \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \mathcal{A}(\varepsilon) &:= \left\{ \varphi(n)/n : 1 \leq n \leq \varepsilon^{-1/8} \right\} \quad (0 < \varepsilon < 1), \\ L(x) &:= e^{\sqrt{\log x \log_2 x}} \quad (x \geq 3), \end{aligned}$$

il établit [9] que l'on a, uniformément pour  $0 < \varepsilon < 1/3$  et  $t \in \mathcal{A}(\varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} G(t) - G(t - \varepsilon t) &= K(t)\{G(1) - G(1 - \varepsilon)\} + O\left(L(1/\varepsilon)^{-1/5}\right), \\ G(t + \varepsilon t) - G(t) &\ll L(1/\varepsilon)^{-1/5}. \end{aligned}$$

Ainsi, le comportement de  $G$  autour de  $t = 1$  est représentatif du cas général des irrégularités locales. Cela a motivé l'étude au voisinage de 1 développée dans [9] par des méthodes d'équations fonctionnelles.

En introduisant des méthodes d'analyse complexe, nous nous proposons ici de préciser (voir notamment le Théorème 1.2 *infra*) les résultats obtenus dans [9] sur cet aspect de la question.

## 1.2. Notations

Nous posons

$$\mathcal{L}(x) := \exp\left(\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log_2 x)^{1/5}}\right) \quad (x \geq 3),$$

désignons par  $\pi(x)$  la fonction de comptage des nombres premiers, et par

$$(1.3) \quad \operatorname{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \geq 2)$$

le logarithme intégral. Ainsi, en vertu du théorème des nombres premiers, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$(1.4) \quad R(x) := \pi(x) - \text{li}(x) \ll x/\mathcal{L}(x)^c \quad (x \geq 3).$$

Lorsque l'argument est complexe, la notation  $\log$  désigne la détermination principale de la fonction logarithme. Pour  $s \in \mathbb{C}$ , nous définissons implicitement les nombres réels  $\sigma$  et  $\tau$  par  $s := \sigma + i\tau$ .

Enfin, nous posons

$$(1.5) \quad \lambda_0(s) := \exp \left\{ -\gamma + \int_0^{1/e} \frac{1 - e^{-st}}{t \log t} dt \right\} \quad (s \in \mathbb{C}),$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

### 1.3. Résultats

Nous obtenons d'une part une approximation régulière, d'autre part un développement asymptotique, de  $G(t)$  au voisinage de  $t = 1$ .

**Théorème 1.1.** *Il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que l'on ait, uniformément pour  $3 \leq 1/h \leq T \leq \mathcal{L}(1/h)^{c_1}/h$ ,*

$$(1.6) \quad 1 - G(1 - h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/h-iT}^{1/h+iT} \lambda_0(s) e^{hs} \frac{ds}{s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{hT}}\right).$$

**Théorème 1.2.** *Il existe une constante  $c_2 > 0$  et une suite réelle  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  telles que l'on ait, uniformément pour  $N \geq 1$  et  $\sigma \geq 3$ ,*

$$(1.7) \quad 1 - G(1 - 1/\sigma) = \sum_{1 \leq n < N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\left(\frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}}\right).$$

De plus, nous avons

$$(1.8) \quad g_n = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} e^{-\gamma} (-1)^n (n-3)! \quad (n \geq 3)$$

et

$$(1.9) \quad g_1 = e^{-\gamma}, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{1}{12} \pi^2 e^{-\gamma}.$$

Notre méthode consiste essentiellement à exploiter, lorsque  $w > 0$ , la formule d'inversion

$$(1.10) \quad \int_0^w \{1 - G(e^{-t})\} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(s) e^{ws} \frac{ds}{s^2} \quad (\sigma > 0),$$

où

$$(1.11) \quad \lambda(s) := \prod_p \left( 1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p} \right) \quad (s \in \mathbb{C})$$

est la valeur moyenne de  $(\varphi(n)/n)^s$ , i.e.

$$(1.12) \quad \lambda(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \{\varphi(n)/n\}^s \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Nous choisissons l'abscisse d'intégration dans (1.10) de manière essentiellement optimale. Nous approchons ensuite, grâce au théorème des nombres premiers, le produit infini  $\lambda(s)$  par l'expression  $\lambda_0(s)$ , définie en (1.5).

La formule (1.12) est classique. Elle découle, par exemple, du résultat établi dans les Notes sur le paragraphe I.3.8 de [8] pour le choix  $f(n) = (\varphi(n)/n)^s$  puisque, notant  $\mu$  la fonction de Möbius,  $g := f * \mu$ , on a alors  $g(p) = (1-1/p)^s - 1 \ll |s|/p$  et  $g(p^\nu) = 0$  si  $\nu > 1$ .

## 2. Estimation intégrale de $\lambda(s)$

Nous donnons ici une approximation régulière d'intérêt indépendant pour la transformée de Laplace-Stieltjes  $\lambda(s)$  de la mesure  $dG$ .

**Lemme 2.1.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que l'on ait, uniformément pour  $\sigma \geq 3$  et  $|s| \leq \sigma \mathcal{L}(\sigma)^c$ ,*

$$(2.1) \quad \lambda(s) = \lambda_0(s) + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

*Démonstration.* Mettons  $(1-1/p)$  en facteur dans le terme général du produit infini (1.11) lorsque  $p \leq \sigma$ . Nous obtenons, grâce à la formule de Mertens,

$$(2.2) \quad \lambda(s) = \prod_{p \leq \sigma} \left(1 - \frac{1}{p}\right) e^{H_1(s) + H_2(s)} = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^c}\right)\right\} \frac{e^{-\gamma + H_1(s) + H_2(s)}}{\log \sigma}$$

avec

$$H_1(s) := \sum_{p \leq \sigma} \log \left(1 + \frac{(1-1/p)^{s-1}}{p}\right), \quad H_2(s) := \sum_{p > \sigma} \log \left(1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p}\right),$$

où, comme il a été précisé plus haut, les logarithmes sont pris en détermination principale.

Estimons  $H_1(s)$ . La contribution des nombres premiers  $p$  n'excédant pas  $\sqrt{\sigma}$  est trivialement

$$\ll \sum_{p \leq \sqrt{\sigma}} \frac{e^{-\sqrt{\sigma}}}{p} \ll e^{-\sqrt{\sigma}/2}.$$

Lorsque  $\sqrt{\sigma} < p \leq \sigma$ ,  $|s| \ll \sigma^2$ , on peut écrire

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1} = e^{-s/p} \left\{1 + O\left(\frac{1}{p} + \frac{|s|}{p^2}\right)\right\}.$$

Il suit

$$H_1(s) = \sum_{p \leq \sigma} \frac{e^{-s/p}}{p} + O\left(\frac{|s|}{\sigma^2 \log \sigma}\right)$$

où le terme d'erreur a été estimé par sommation d'Abel à l'aide du théorème des nombres premiers. Le terme principal relève d'un traitement semblable. Nous obtenons, avec la notation (1.4),

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq \sigma} \frac{e^{-s/p}}{p} &= \int_2^\sigma \frac{e^{-s/x} dx}{x \log x} + \int_2^\sigma \frac{e^{-s/x} dR(x)}{x} \\ &= - \int_{1/\sigma}^{1/2} \frac{e^{-st} dt}{t \log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right), \end{aligned}$$

et donc, dans les conditions de l'énoncé,

$$(2.3) \quad H_1(s) = - \int_{1/\sigma}^{1/e} \frac{e^{-st} dt}{t \log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right)$$

puisque la contribution au terme principal de l'intervalle  $1/e \leq t \leq 1/2$  est trivialement  $\ll e^{-\sigma/3}$ .

Estimons à présent  $H_2(s)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \sum_{p > \sigma} \left\{ \frac{(1 - 1/p)^s - 1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right\} = \sum_{p > \sigma} \frac{e^{-s/p} - 1}{p} + O\left(\frac{|s|}{\sigma^2 \log \sigma}\right) \\ &= \int_\sigma^\infty \frac{e^{-s/x} - 1}{x \log x} dx + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right) = \int_0^{1/\sigma} \frac{1 - e^{-st}}{t \log t} dt + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.3), il suit donc

$$H_1(s) + H_2(s) = \int_0^{1/e} \frac{1 - e^{-st}}{t \log t} dt + \log_2 \sigma + O\left(\frac{|s|}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

En reportant dans (2.2), nous obtenons bien la formule annoncée (2.1).  $\square$

### 3. Démonstration du Théorème 1.1

#### 3.1. Dérivées de $\lambda_0(s)$

La preuve du Théorème 1.1 nécessite certaines estimations préalables relatives à la régularité de la fonction entière  $\lambda_0$ .

**Lemme 3.1.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\lambda_0$  soit bornée dans le domaine  $\sigma \geq 3$ ,  $|s| \leq \sigma \mathcal{L}(\sigma)^c$ , et y satisfasse*

$$(3.1) \quad \lambda_0'(s) \ll \frac{1}{s}, \quad \lambda_0''(s) \ll \frac{1}{s^2}.$$

*Démonstration.* Comme  $|\{\varphi(n)/n\}^s| \leq 1$  pour  $\sigma \geq 0$ , il résulte de (1.12) que

$$(3.2) \quad |\lambda(s)| \leq 1 \quad (\sigma \geq 0).$$

Cela implique immédiatement, au vu de (2.1), que  $\lambda_0(s) \ll 1$  dans les conditions de l'énoncé.

Pour montrer (3.1), nous introduisons la dérivée logarithmique

$$\psi(s) := \frac{\lambda_0'(s)}{\lambda_0(s)} = - \int_0^{1/e} \frac{e^{-st} dt}{\log t} = \frac{1 - e^{-s/e}}{s} + \int_0^{1/e} \frac{1 - e^{-st}}{st(\log t)^2} dt \ll \frac{1}{s}.$$

On établit de manière analogue que

$$\psi'(s) = \int_0^{1/e} \frac{te^{-st} dt}{\log t} \ll \frac{1}{s^2}.$$

Compte tenu des identités

$$\lambda_0'(s) = \lambda_0(s)\psi(s), \quad \lambda_0''(s) = \lambda_0'(s)\psi(s) + \lambda_0(s)\psi'(s),$$

et de la première partie de la démonstration, nous obtenons bien le résultat annoncé.  $\square$

#### 3.2. Complétion de l'argument

Posons

$$g(w) := \int_0^w \{1 - G(e^{-t})\} dt \quad (w > 0).$$

D'après (1.10) et (3.2), nous avons pour tous  $\sigma > 0$ ,  $T \geq 1$ ,

$$(3.3) \quad g(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda(s)e^{ws} \frac{ds}{s^2} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Sous les conditions  $w\sigma \asymp 1$ ,  $\sigma \leq T \leq \frac{1}{2}\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c$ , nous déduisons donc du Lemme 2.1 que

$$(3.4) \quad g(w) = G_0(w) + O\left(\frac{1}{T} + \frac{\log T}{\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c}\right)$$

où l'on a posé

$$G_0(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s) e^{ws} \frac{ds}{s^2}.$$

La fonction  $G_0$  est indéfiniment dérivable et, toujours sous les hypothèses précédentes, vérifie

$$(3.5) \quad \begin{aligned} G_0'(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s) e^{ws} \frac{ds}{s}, \\ G_0''(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s) e^{ws} ds \\ &= \left[ \frac{\lambda_0(s) e^{ws}}{2\pi i w} - \frac{\lambda_0'(s) e^{ws}}{2\pi i w^2} \right]_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} + \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\lambda_0''(s) e^{ws}}{2i\pi w^2} ds \\ &\ll \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2 T} + \frac{1}{w^2 \sigma} \ll \frac{1}{w}, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel aux estimations (3.1).

Il découle de (3.4) et (3.5) que, pour  $0 < v \leq \frac{1}{2}w$ ,  $\sigma w \asymp 1$ ,  $\sigma \leq T \leq \frac{1}{2}\sigma \mathcal{L}(\sigma)^c$ , nous avons

$$\frac{g(w+v) - g(w)}{v} = G_0'(w) + O\left(\frac{v}{w} + \frac{1}{Tv} + \frac{\log T}{\sigma v \mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

La même formule vaut clairement pour  $\{g(w) - g(w-v)\}/v$ . Or, l'encadrement

$$(3.6) \quad \frac{g(w) - g(w-v)}{v} \leq 1 - G(e^{-w}) \leq \frac{g(w+v) - g(w)}{v} \quad (w > 0, v > 0)$$

résulte immédiatement de la croissance de la fonction  $t \mapsto 1 - G(e^{-t})$ . Pour  $0 < h \leq \frac{1}{3}$ , choisissons alors

$$\sigma := 1/h, \quad w := \log\{1/(1-h)\} \asymp h, \quad v := \sqrt{w/T} \asymp \sqrt{h/T}.$$

Nous déduisons immédiatement de ce qui précède que, lorsque, par exemple,  $\sigma \leq T \leq \frac{1}{2}\sigma \mathcal{L}(\sigma)^{c/2}$

$$1 - G(1-h) = G_0'(w) + O\left(\frac{1}{\sqrt{hT}}\right).$$

Comme  $w = h + O(h^2)$ , l'estimation (3.5) pour  $G_0''$  fournit

$$G_0'(w) = G_0'(h) + O(h).$$

Cela implique bien l'estimation souhaitée (1.6). □

## 4. Démonstration du Théorème 1.2

### 4.1. Lemmes relatifs à la fonction $\Gamma$ d'Euler

Posons, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$(4.1) \quad \Gamma_j := \left(\frac{1}{\Gamma}\right)^{(j)}(1),$$

de sorte que

$$(4.2) \quad \Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = \gamma, \quad \Gamma_2 = \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Nous introduisons également la suite d'intégrales

$$(4.3) \quad \mathcal{H}_j(T) := \frac{1}{2i\pi} \int_{1-iT}^{1+iT} \frac{e^s (\log s)^j ds}{s} \quad (j \in \mathbb{N}, T \geq 0).$$

**Lemme 4.1.** *On a, uniformément pour  $T \geq 2$  et  $0 \leq j \leq T$ ,*

$$(4.4) \quad \Gamma_j = (-1)^j \mathcal{H}_j(T) + O\left(\frac{(\log T + \pi)^j}{T}\right).$$

*Démonstration.* La formule classique de Hankel pour  $1/\Gamma$  (voir par exemple [8], th. II.5.2) fournit immédiatement

$$(4.5) \quad \Gamma_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_H \frac{e^s (\log s)^j ds}{s}$$

où  $H$  est un contour de Hankel quelconque entourant l'origine dans le sens positif et contenu dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Choisissons  $H$  comme la concaténation du segment  $[1 - iT, 1 + iT]$ , du demi-cercle épointé  $\{1 - Te^{i\vartheta} : 0 < |\vartheta| \leq \pi/2\}$  et des deux demi-droites de support  $]-\infty, 1 - T]$  parcourues avec arguments respectifs  $-\pi+$  et  $\pi-$ .

La contribution du segment vertical constitue le terme principal de (4.4).

Sur la partie circulaire, on a

$$\log s = \log T - i\vartheta + O(1/T).$$

La contribution correspondante est donc

$$\ll (\log T + \pi)^j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-T \cos \vartheta} d\vartheta \ll \frac{(\log T + \pi)^j}{T}.$$

Enfin, la contribution des demi-droites horizontales est

$$\ll \int_T^\infty e^{-y} (\log y)^j \frac{dy}{y} \ll T e^{-T} (\log T)^j,$$

au vu de la décroissance de  $y \mapsto y e^{-y} (\log y)^j$  pour  $y > j$ . □

**Lemme 4.2.** On a

$$(4.6) \quad |\Gamma_j| \leq \exp \left\{ j \log_2 j - \frac{j \log_2 j}{\log j} - \frac{j}{\log j} + O\left(\frac{j \log_2 j}{(\log j)^2}\right) \right\} \quad (j \geq 3).$$

*Démonstration.* En choisissant pour  $H$  la réunion des deux demi-droites  $]-\infty, -1[$  parcourues avec arguments respectifs  $-\pi+$  et  $\pi-$  et du cercle unité privé du point  $z = -1$ , la formule de Hankel pour  $1/\Gamma(z)$  fournit immédiatement, par développement au voisinage de l'origine et application de l'équation fonctionnelle  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,

$$(4.7) \quad \Gamma_{j-1} = \frac{(-1)^{j-1}}{\pi j} \int_1^\infty e^{-y} \varrho(y)^j \sin\{j\vartheta(y)\} dy + r_j \quad (j \geq 1)$$

où l'on a posé

$$r_j := \frac{(-1)^j}{2\pi j} \int_{-\pi}^\pi \vartheta^j e^{\cos \vartheta} \cos(\vartheta + \sin \vartheta + j\pi/2) d\vartheta \ll \pi^j / j^2,$$

$$\varrho(y) := \sqrt{\pi^2 + (\log y)^2}, \quad \vartheta(y) := \arctan(\pi / \log y).$$

La méthode du col peut être employée pour déduire de (4.7) une formule asymptotique, voir par exemple [2], partie IX, problème 18. Pour la commodité du lecteur, nous fournissons une preuve courte et autonome de la majoration nécessaire à la démonstration du Théorème 1.2.

Nous évaluons le majorant suivant de l'intégrale de (4.7)

$$(4.8) \quad \Gamma_{j-1}^* := \frac{1}{\pi j} \int_1^\infty e^{-y} \varrho(y)^j dy \quad (j \geq 1).$$

Désignons par  $y_j$  l'unique solution sur  $[1, \infty[$  de l'équation  $j\varrho'(y) = \varrho(y)$ , soit encore

$$y_j (\log y_j) \left( 1 + \frac{\pi^2}{(\log y_j)^2} \right) = j.$$

On montre facilement que

$$y_j = \frac{j}{\log j} + \frac{j \log_2 j}{(\log j)^2} + O\left(\frac{j (\log_2 j)^2}{(\log j)^3}\right) \quad (j \rightarrow \infty),$$

et les techniques standard de l'analyse asymptotique fournissent, pour  $j$  assez grand, la représentation sous forme de série convergente

$$y_j = j \sum_{k \geq 1} \frac{P_k(\log_2 j)}{(\log j)^k}$$

où  $P_k$  est un polynôme de degré au plus  $k-1$ .

Posons alors  $F(y) = -y + j \log \varrho(y)$ . Un calcul de routine fournit, pour  $z > -1$ ,

$$F(y_j + zy_j) = F(y_j) - zy_j + \frac{1}{2}j \log \left( 1 + \frac{2(\log y_j) \log(1+z) + \{\log(1+z)\}^2}{(\log y_j)^2 + \pi^2} \right) \\ \leq F(y_j) - y_j H_j(z)$$

avec  $H_j(z) := z - \log(1+z)\{1 + \log(1+z)/(2 \log y_j)\}$ . On en déduit que la contribution à l'intégrale de (4.8) du domaine  $|z| > y_j^{-2/5}$  est

$$\ll e^{F(y_j) - cy_j^{1/5}},$$

où  $c$  est une constante strictement positive convenable. La contribution complémentaire peut être évaluée en effectuant un développement limité de  $F(y_j + zy_j)$  à l'origine. Nous obtenons ainsi

$$\Gamma_{j-1}^* \sim \frac{\sqrt{2}e^{F(y_j)}}{j\sqrt{\pi y_j}} = \exp \left\{ j \log_2 j - \frac{j \log_2 j}{\log j} - \frac{j}{\log j} + O\left(\frac{j \log_2 j}{(\log j)^2}\right) \right\}.$$

□

**Lemme 4.3.** Pour  $j \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$(4.9) \quad \Gamma^{(j)}(1) = (-1)^j j! \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)^{j+1}} + O(\{\log(j+2)\}^j).$$

*Démonstration.* Par dérivation sous le signe d'intégration de la formule intégrale pour  $\Gamma$ , nous obtenons

$$(4.10) \quad \Gamma^{(j)}(1) = \int_0^\infty e^{-t} (\log t)^j dt.$$

Nous scindons l'intégrale en deux selon la taille de  $t$  par rapport à 1. La contribution des valeurs de  $t > 1$  est absorbée par le terme d'erreur de (4.9), en vertu de la majoration

$$(4.11) \quad t^2 e^{-t} (\log t)^j \ll \{\log(j+2)\}^j \quad (t \geq 1).$$

La contribution de l'intervalle  $[0, 1]$  est calculée en développant  $e^{-t}$  en série entière de  $t$  et en intervertissant sommation et intégration. On conclut en notant que

$$(4.12) \quad \int_0^1 t^m (\log t)^j dt = \frac{(-1)^j j!}{(m+1)^{j+1}}.$$

□

#### 4.2. Développement asymptotique de $\log \lambda_0(s)$

Posons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(4.13) \quad \gamma_n := \frac{\Gamma^{(n)}(1)}{n} = (-1)^n (n-1)! \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\},$$

où la formule asymptotique résulte de (4.9). On a en particulier

$$(4.14) \quad \gamma_1 = -\gamma, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2.$$

**Lemme 4.4.** *Nous avons*

$$(4.15) \quad \int_0^{1/e} \frac{1 - e^{-st}}{t \log t} = -\log_2 s + \sum_{1 \leq n < N} \frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + O\left(\frac{|\gamma_N|}{|\log s|^N}\right),$$

*uniformément sous les conditions*

$$\sigma \geq 3, \quad \log |s| \ll \log \sigma, \quad 1 \leq N \leq (\log |s|)/(3 \log_2 |s|).$$

*Démonstration.* Soit  $I(s)$  la quantité à évaluer. Une intégration par parties permet d'écrire

$$I(s) = - \int_0^{1/e} s e^{-st} \log_2(1/t) dt.$$

Effectuons le changement de variable  $v = ts$  et notons que, pour  $v \in ]0, s/e]$ , les nombres  $\log s$  et  $1 - (\log v)/\log s$  appartiennent au demi-plan  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ . On a donc

$$\log_2(s/v) = \log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right) + \log_2 s,$$

où les logarithmes itérés sont définis par composition de la détermination principale. Comme

$$\int_0^{s/e} e^{-u} du = 1 + O(e^{-\sigma/e}),$$

nous obtenons

$$(4.16) \quad I(s) = -\log_2 s + J(s) + O(e^{-\sigma/e} \log_2 \sigma)$$

avec

$$J(s) := - \int_0^{s/e} e^{-v} \log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right) dv.$$

Pour évaluer  $J(s)$ , nous commençons par remplacer le segment oblique d'intégration par l'intervalle réel  $[0, |s|/e]$ . L'erreur impliquée coïncide, d'après le théorème des résidus, avec la quantité

$$K(s) := - \int_{\mathcal{C}} e^{-v} \log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right) dv$$

où  $\mathcal{C}$  est l'arc de cercle  $\{|s|e^{i\vartheta-1} : 0 \leq \vartheta \leq \arg(s)\}$ . On a  $\Re v \geq \Re s/e = \sigma/e$  pour  $v \in \mathcal{C}$ . On en déduit aisément que

$$K(s) \ll e^{-\sigma/e} \log_2 |s| \ll e^{-\sigma/e} \log_2 \sigma.$$

Il suit, par exemple,

$$J(s) = - \int_0^{|s|/e} e^{-v} \log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right) dv + O(e^{-\sigma/3}).$$

La contribution du segment  $0 \leq v \leq e/|s|$  à la dernière intégrale est

$$\int_0^{e/|s|} \log \left( 2 + \left| \frac{\log v}{\log s} \right| \right) dv \ll \frac{1}{|s|}.$$

Lorsque  $e/|s| \leq v \leq |s|/e$ , on a  $|\log v| \leq |\log s| - 1$ , et nous pouvons écrire

$$-\log \left( 1 - \frac{\log v}{\log s} \right) = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{(\log v)^n}{n(\log s)^n} + O\left( \frac{(\log v)^{N+1} \log_2 |s|}{|\log s|^{N+1}} \right).$$

Intégrons cette formule pour  $e/|s| \leq v \leq |s|/e$  après multiplication par  $e^{-v}$ . Nous obtenons, compte tenu de ce qui précède,

$$(4.17) \quad J(s) = \sum_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + \varepsilon_n(s) \right\} + O\left( \frac{N|\gamma_{N+1}| \log_2 |s|}{(\log |s|)^{N+1}} + \frac{1}{|s|} \right),$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(s) &\ll \int_0^{e/|s|} (\log v)^n dv + \int_{|s|/e}^{\infty} e^{-v} (\log v)^n dv \\ &\ll \int_{\log(|s|/e)}^{\infty} e^{-u} u^n du \ll \frac{2^n n!}{\sqrt{|s|}} \ll \frac{\gamma_{N+1}}{(\log |s|)^{N+1}} \quad (1 \leq n \leq N), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la condition  $N \leq (\log |s|)/(3 \log_2 |s|)$ . Ainsi la contribution globale des  $\varepsilon_n(s)$  au membre de gauche de (4.17) peut être englobée par le terme résiduel. Comme cette quantité est  $\ll |\gamma_N|/|\log s|^N$ , nous obtenons bien la formule annoncée.  $\square$

### 4.3. Développement asymptotique de $\lambda_0(s)$

Posons

$$(4.18) \quad \alpha_0 := 1, \quad \alpha_m := \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1 \geq 1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j = m}} \gamma_{k_1} \gamma_{k_2} \cdots \gamma_{k_j} \quad (m \geq 1).$$

**Lemme 4.5.** *On a*

$$\alpha_m = (-1)^m (m-1)! \left\{ 1 + \frac{\gamma}{m} + O\left( \frac{1}{m^2} \right) \right\} \quad (m \geq 1).$$

*Démonstration.* Posons, pour  $j \geq 1$ ,  $m \geq 1$ ,

$$S_j(m) := \sum_{\substack{k_1 \geq 1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j = m}} (k_1 - 1)! \cdots (k_j - 1)!,$$

de sorte que

$$S_j(m) = \sum_{1 \leq r \leq m-j+1} (r-1)! S_{j-1}(m-r).$$

On en déduit aisément par récurrence sur  $j$  que

$$(4.19) \quad S_j(m) \leq 3^j (m-j)!$$

D'après (4.13), on a  $|\gamma_k| \leq A(k-1)!$  pour une constante positive convenable  $A$ . Reportant dans (4.18) en tenant compte de (4.19), nous pouvons écrire, pour  $m \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \gamma_m + \gamma_1 \gamma_{m-1} + O \left( \sum_{2 \leq k \leq m-2} |\gamma_k \gamma_{m-k}| + \sum_{3 \leq j \leq m} \frac{(3A)^j (m-j)!}{j!} \right) \\ &= (-1)^m (m-1)! \left\{ 1 + \frac{\gamma}{m-1} + O \left( \frac{1}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Définissons à présent une nouvelle suite par

$$(4.20) \quad \lambda_n := e^{-\gamma} \alpha_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Il résulte notamment de (4.14) et (4.18) que

$$(4.21) \quad \lambda_1 = e^{-\gamma}, \quad \lambda_2 = -\gamma e^{-\gamma}, \quad \lambda_3 = e^{-\gamma} \left( \frac{\pi^2}{12} + \gamma^2 \right),$$

alors que l'on déduit immédiatement du Lemme 4.5 que

$$(4.22) \quad \lambda_n = e^{-\gamma} (-1)^{n-1} (n-2)! \left\{ 1 + \frac{\gamma}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right\} \quad (n \geq 2).$$

**Lemme 4.6.** *Il existe une constante  $c_2 \in ]0, \frac{1}{10}]$  telle que l'on ait*

$$(4.23) \quad \lambda_0(s) = \sum_{1 \leq n < N} \frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O \left( \frac{\lambda_N}{(\log s)^N} \right)$$

uniformément sous les conditions  $\sigma \geq 3$ ,  $|s| \leq \sigma \mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$ ,  $1 \leq N \leq (\log |s|)^{1-c_2}$ .

*Démonstration.* Choisissons  $c_2 := \min(c, \frac{1}{10})$  où  $c$  est la constante du Lemme 2.1 et posons  $b := [1/c_2] + 1$ . Nous pouvons écrire, grâce à (4.15),

$$(4.24) \quad \lambda_0(s) = \frac{e^{-\gamma}}{\log s} \exp \left\{ \sum_{1 \leq k < bN} \frac{\gamma_k}{(\log s)^k} + O \left( \frac{\gamma_{bN}}{(\log s)^{bN}} \right) \right\}.$$

Définissant la suite  $\{\alpha_{mN}\}_{m=0}^{\infty}$  par la formule

$$F_N(z) := \exp \left\{ \sum_{1 \leq n < bN} \gamma_k z^k \right\} = \sum_{m \geq 0} \alpha_{mN} z^m \quad (z \in \mathbb{C}),$$

et tenant compte du fait que  $\lambda_0(s)$  est bornée dans le domaine  $|s| \leq \sigma \mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$ , nous obtenons

$$(4.25) \quad \lambda_0(s) = e^{-\gamma} \sum_{m \geq 0} \frac{\alpha_{mN}}{(\log s)^{m+1}} + O\left(\frac{\gamma bN}{(\log s)^{bN}}\right).$$

On a  $\alpha_{mN} = \alpha_m$  si  $m < bN$ . De plus, comme

$$F_N(z) \ll \exp \left\{ \sum_{1 \leq k < bN} \frac{|\gamma_k|}{(bN)^k} \right\} \ll 1$$

lorsque  $|z| = 1/(bN)$ , la formule de Cauchy implique

$$\alpha_{mN} \ll (bN)^m \quad (m \geq 0).$$

En reportant dans (4.25), nous obtenons

$$\lambda_0(s) = \sum_{1 \leq n < bN} \frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O\left(\left\{\frac{bN}{\log s}\right\}^{bN}\right).$$

Le terme d'erreur est  $\ll 1/(\log s)^N$  en vertu du choix de  $b$ . De plus, au vu de (4.22), la contribution au terme principal des sommants d'indices  $n \geq N$  est  $\ll \lambda_N/(\log s)^N$ . Cela implique bien l'estimation annoncée (4.23).  $\square$

#### 4.4. Développement asymptotique de $1 - G(1 - 1/\sigma)$

Posons, avec la notation (4.1),

$$(4.26) \quad g_m = \sum_{0 \leq j \leq m-1} \binom{m-1}{j} \Gamma_j \lambda_{m-j} \quad (m \geq 1),$$

et notons que les valeurs données en (1.9) résultent bien de (4.21). Nous commençons par établir l'assertion du Théorème 1.2 relative au comportement asymptotique de  $g_m$ .

**Lemme 4.7.** *On a*

$$(4.27) \quad g_m = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\} e^{-\gamma} (-1)^m (m-3)! \quad (m \geq 3).$$

*Démonstration.* Reportons l'estimation (4.22) dans (4.26) lorsque  $0 \leq j \leq m-2$  et estimons le terme d'indice  $j = m-1$  par (4.6). Nous obtenons

$$(4.28) \quad \frac{e^\gamma (-1)^{m-1} g_m}{(m-1)!} = \sum_{0 \leq j \leq m-2} \frac{(-1)^j \Gamma_j}{(m-j-1)j!} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{m-j-1} \right\} + R_m$$

avec

$$R_m \ll \sum_{0 \leq j \leq m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!(m-j-1)^3} + \left( \frac{e \log m}{m} \right)^{m-1} \ll \frac{1}{m^3}.$$

La contribution au membre de droite de (4.28) des termes dont l'indice  $j$  vérifie  $m/2 < j \leq m-2$  est, d'après (4.6),

$$\ll \sum_{m/2 < j \leq m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!} \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^3}.$$

Lorsque  $0 \leq j \leq m/2$ , nous reportons dans (4.28) le développement uniforme

$$\frac{1}{m-j-1} = \frac{1}{m} + \frac{j+1}{m^2} + O\left(\frac{(j+1)^2}{m^3}\right).$$

Il suit

$$(4.29) \quad \frac{e^\gamma (-1)^{m-1} g_m}{(m-1)!} = \left( \frac{1}{m} + \frac{\gamma}{m^2} \right) U_m + \frac{V_m}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

où l'on a posé

$$U_m := \sum_{0 \leq j \leq m/2} \frac{(-1)^j \Gamma_j}{j!}, \quad V_m := \sum_{0 \leq j \leq m/2} \frac{(j+1)(-1)^j \Gamma_j}{j!}.$$

Ainsi,  $U_m$  est la somme partielle du développement en série de Taylor de  $1/\Gamma(1+x)$  en  $x = -1$ . La série obtenue en étendant la sommation jusqu'à l'infini est donc nulle. Il s'ensuit, d'après (4.6), que

$$U_m \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^2}.$$

Semblablement, observons que  $V_m$  est la somme partielle du développement de Taylor de  $(-1/\Gamma)'(1+x)$  en  $x = -1$ . Il suit

$$V_m = -1 + O\left(\frac{(\log m)^m}{[m/2]!}\right) = -1 + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

En reportant dans (4.29), cela fournit bien (4.27).  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de compléter la démonstration du Théorème 1.2.

Observons d'emblée qu'il est suffisant d'établir le développement asymptotique (1.7) pour  $N \leq N_0 := a(\log \sigma)^{3/5}/(\log_2 \sigma)^{6/5}$  où  $a$  est une constante arbitrairement petite. En effet, si  $N > N_0$ , on a

$$\sum_{N_0 \leq n < N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} \ll \frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{a/2}},$$

ainsi qu'on peut l'établir en comparant  $N$  à  $(\log \sigma)^{4/5}$  et  $2 \log \sigma$  et en utilisant l'estimation  $|g_n| \ll (n/e)^n$  lorsque  $n \leq 2 \log \sigma$ .

Nous supposons donc dans toute la suite que  $N \leq N_0$ .

Appliquons le Théorème 1.1 avec  $h := 1/\sigma$  et  $T := \sigma(\log \sigma)^{3N}$ , ce qui est licite sous réserve de choisir la constante  $a$  assez petite. Nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 - G(1 - 1/\sigma) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s) e^{s/\sigma} \frac{ds}{s} + O\left(\frac{1}{(\log \sigma)^N}\right) \\ &= \sum_{1 \leq n < 3N} \frac{\lambda_n}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{e^{s/\sigma} ds}{s(\log s)^n} + O\left(\frac{1}{(\log \sigma)^N} + \left| \lambda_{3N} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{e^{s/\sigma} ds}{s(\log s)^{3N}} \right|\right), \end{aligned}$$

où nous avons appliqué le Lemme 4.6 à l'ordre  $3N$ . D'après (4.22) et (4.27), le dernier terme d'erreur est

$$\ll \frac{\lambda_{3N}}{(\log \sigma)^{3N-1}} \ll \frac{g_N}{(\log \sigma)^N}.$$

Il suit

$$(4.30) \quad 1 - G(1 - 1/\sigma) = \sum_{1 \leq n < 3N} \lambda_n H_n(\sigma) + O\left(\frac{g_N}{(\log \sigma)^N}\right),$$

où l'on a posé

$$(4.31) \quad H_n(\sigma) := \frac{1}{2i\pi} \int_{1-iT_1}^{1+iT_1} \frac{e^w dw}{w(\log \sigma w)^n}$$

pour  $T_1 := (\log \sigma)^{3N}$ .

Pour  $1 \leq n < 3N$ , appliquons la formule de Taylor–Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \sum_{0 \leq j < 3N-n} \binom{n+j-1}{j} (-x)^j \\ &\quad + n \binom{3N-1}{n} (-x)^{3N-n} \int_0^1 \frac{(1-t)^{3N-n-1}}{(1+tx)^n} dt \end{aligned}$$

pour  $x := (\log w)/(\log \sigma)$ , et reportons dans (4.31). La contribution du reste intégral est estimée par interversion des intégrales en  $w$  et  $t$ . Elle vaut

$$\binom{3N-1}{n} \frac{(-1)^{3N-n} n}{2\pi i (\log \sigma)^{3N-n}} \int_0^1 (1-t)^{3N-n-1} dt \int_{1-iT_1}^{1+iT_1} \frac{(\log w)^{3N-n} e^w dw}{w(\log \sigma + t \log w)^n}.$$

Une intégration par parties permet d'estimer l'intégrale en  $w$ . Nous obtenons qu'elle est

$$\ll \frac{(3N-n+1)!}{(\log \sigma)^n}$$

uniformément en  $t$ . Nous avons ainsi établi que la contribution à  $H_n(\sigma)$  du reste de Taylor–Lagrange est

$$\ll \frac{(3N)!}{(n-1)! (\log \sigma)^{3N}}.$$

Nous en déduisons que

$$H_n(\sigma) = \sum_{0 \leq j < 3N-n} \frac{(-1)^j (n+j-1)!}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j}} \mathcal{H}_j(T_1) + O\left(\frac{(3N)!}{(n-1)! (\log \sigma)^{3N}}\right),$$

où  $\mathcal{H}_j$  est défini en (4.3). Appliquons (4.4) avec  $T = T_1$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ . Nous pouvons majorer la contribution du terme d'erreur de (4.4) par

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j < 3N-n} \frac{(n+j-1)! (2 \log T_1)^j}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j} T_1} &\ll \frac{(3N)!}{T_1 (n-1)!} \sum_{1 \leq j < 3N-n} \frac{1}{j!} \\ &\ll \frac{(3N)!}{(n-1)! (\log \sigma)^{3N}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité  $2 \log T_1 \leq \log \sigma$ . Cela fournit

$$H_n(\sigma) = \sum_{0 \leq j < 3N-n} \frac{(n+j-1)! \Gamma_j}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j}} + O\left(\frac{(3N)!}{(n-1)! (\log \sigma)^{3N}}\right).$$

Nous reportons dans (4.30). Il suit

$$(4.32) \quad G(1) - G(1-1/\sigma) = \sum_{1 \leq n < 3N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\left(\frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} + \frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N}\right).$$

Or, compte tenu des estimations (4.27), nous avons, pour  $N \leq N_0$ ,

$$\sum_{N \leq n < 3N} \frac{|g_n|}{(\log \sigma)^n} + \frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} \ll \frac{g_N}{(\log \sigma)^N}.$$

Cela achève la démonstration.

## Bibliographie

- [1] H.G. Diamond & D. Rhoads, The modulus of continuity of the distribution function of  $\varphi(n)/n$ , *Topics in classical number theory*, vols. I, II (Budapest, 1981), 335–353, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 34, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.
- [3] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : mean value theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. **239**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [4] P. Erdős, On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 722–725.
- [5] P. Erdős, On the distribution of numbers of the form  $\sigma(n)/n$  and on some related questions, *Pacific J. Math.* **52** (1974), 59–65.
- [6] I.J. Schoenberg, Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, *Math. Z.* **28** (1928), 171–200.
- [7] I.J. Schoenberg, On asymptotic distributions of arithmetical functions, *Trans. A.M.S.* **39** (1936), 315–330.
- [8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n°1, Société Mathématique de France, 1995.
- [9] V. Toulmonde, *Fonction de répartition de  $\varphi(n)/n$* , Thèse de doctorat, Université d'Évry-Val d'Essonne, 2004.
- [10] V. Toulmonde, Module de continuité de la fonction de répartition de  $\varphi(n)/n$ , *Acta arith.*, à paraître.
- [11] V. Toulmonde, Comportement au voisinage de 1 de la fonction de répartition de  $\varphi(n)/n$ , prépublication.

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde  
Institut Élie Cartan  
Université Henri Poincaré–Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex  
France  
[gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr](mailto:gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr)  
[vincent.toulmonde@iecn.u-nancy.fr](mailto:vincent.toulmonde@iecn.u-nancy.fr)