

# Constantes d’Erdős–Turán

J. Rivat & G. Tenenbaum

À Jean-Louis Nicolas, avec toute notre amitié

**Résumé.** L’inégalité d’Erdős–Turán mesure l’écart à l’équirépartition d’une suite quelconque du tore en fonction d’un paramètre arbitraire et de deux constantes absolues,  $c_1$  et  $c_2$ . Nous montrons que  $c_1 \geq 1$  et  $c_2 \geq 2/\pi$ , et nous fournissons un ensemble de couples admissibles  $(c_1; c_2)$  numériquement proches de l’optimum hypothétique  $(1; 2/\pi)$ , notamment  $(1; 0,653)$  et  $(1,1435; 2/\pi)$ .

**Abstract.** The Erdős–Turán inequality measures the distance from uniform distribution of any given sequence on the torus as a function of an arbitrary parameter and two constants,  $c_1$  and  $c_2$ . We show that  $c_1 \geq 1$  and  $c_2 \geq 2/\pi$ , and we provide a set of admissible pairs  $(c_1; c_2)$  that are numerically close to the hypothetical optimum  $(1; 2/\pi)$ , including  $(1; 0.653)$  and  $(1.1435; 2/\pi)$ .

**2000 Mathematics Subject Classification :**  
Primary 11K38, 11K06 ; secondary 11L03, 42A05.

## 1. Introduction

La théorie de l’équirépartition sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est qualitativement sous-tendue par le critère d’Hermann Weyl (1916), qui énonce, avec la notation traditionnelle  $e(u) := \exp(2i\pi u)$  ( $u \in \mathbb{R}$ ), qu’une suite réelle  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, les moyennes d’exponentielles

$$\sigma_N(h) := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e(hx_n)$$

tendent vers 0, pour tout entier  $h$  non nul fixé, lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Une mesure effective de la tendance à l’équirépartition modulo 1 d’une suite  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  est reflétée par le comportement asymptotique de la discrédance

$$(1.1) \quad D_N := D_N(x_1, \dots, x_N) = \sup_I \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}(x_n) - |I| \right| \quad (N \geq 1)$$

où la borne supérieure porte sur l’ensemble des intervalles réels  $I$  de longueur  $|I| < 1$ . En 1948, Erdős et Turán [1] ont donné une version quantitative du critère de Weyl sous la forme d’une inégalité universelle

$$(1.2) \quad D_N \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h}$$

où  $H$  est un entier positif arbitraire, et  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes absolues convenables.

Des valeurs admissibles du couple  $(c_1; c_2)$  ont été consécutivement précisées dans la littérature. Dans [2], Kuipers et Niederreiter ont obtenu  $(c_1; c_2) = (6; 4/\pi)$ ; ce résultat a ensuite été amélioré, notamment par Montgomery [4], qui donne  $(c_1; c_2) = (1; 3)$ , et, plus récemment, par Mauduit, Rivat et Sárközy [3], qui établissent que l'on peut choisir  $(c_1; c_2) = (1; 1)$ .

Nous nous proposons dans ce travail d'aborder la question naturelle du choix optimal de  $(c_1; c_2)$ . Commençons par une minoration.

**Théorème 1.1.** *Soit  $(c_1; c_2)$  un couple de constantes satisfaisant à (1.2). Alors  $c_1 \geq 1$  et  $c_2 \geq 2/\pi$ .*

Le résultat suivant montre que chacune des deux valeurs limites peut être atteinte séparément. La question de savoir si elles peuvent l'être simultanément, autrement dit si  $(c_1; c_2) = (1; 2/\pi)$  est un choix admissible, reste ouverte.

Posons

$$\varphi(t) := \pi t(1-t) \cot \pi t + t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

On peut établir facilement que  $\varphi$  décroît de 1 à 0 sur  $[0, 1]$ . Nous notons encore

$$\kappa(t) := t(1-t), \quad \gamma(t) := \sqrt{\varphi(t)^2 + \pi^2 \kappa(t)^2} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\gamma^* := \sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) \approx 1,0251.$$

et

$$(1.3) \quad \vartheta_y(t) := \gamma(t) \{1 - 3y^2 + 3y^2 |\cos(\pi t/3y)|\} \quad (0 \leq y \leq 1/\sqrt{3}, 0 \leq t \leq 1).$$

Nous désignons par  $y_0$  la borne inférieure de l'ensemble des  $y \in [0, 1/\sqrt{3}]$  tels que  $\sup_{0 \leq t \leq 1} \vartheta_y(t) \leq 1$ . On peut montrer numériquement que  $0,14348 < y_0 < 0,14349$ .

**Théorème 1.2.** *Pour tout  $y \in [0, y_0]$ , l'inégalité (1.2) est satisfaite avec*

$$(c_1; c_2) = \left(1 + y; \frac{2}{\pi} \{1 + (\gamma^* - 1)(1 - y/y_0)\}\right).$$

En choisissant  $y = 0$  et  $y = y_0$ , nous déduisons immédiatement de cet énoncé le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** *L'inégalité (1.2) est satisfaite avec  $(c_1; c_2) = (1; 2\gamma^*/\pi)$  et avec  $(c_1; c_2) = (1 + y_0; 2/\pi)$ .*

Nous notons les valeurs numériques

$$2/\pi \approx 0,636619, \quad 2\gamma^*/\pi \leq 0,6528 < 2/3, \quad y_0 \leq \frac{32}{223} \approx 0,14349.$$

## 2. Preuve du Théorème 1.1

Montrons d'abord que  $c_1 \geq 1$  indépendamment de la valeur de  $c_2$ . À cette fin, considérons, pour  $N \geq 2$ , le choix  $x_n = n/N$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Nous avons alors

$$\sigma_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(hn/N) = 0 \quad (1 \leq h < N).$$

De plus, puisque l'intervalle  $I = ]0, 1/N[$  ne contient aucun  $x_n$ , nous obtenons certainement

$$D_N \geq 1/N.$$

Il s'ensuit que pour tout entier  $H$ ,  $1 \leq H \leq N - 1$ ,

$$\frac{1}{N} \leq D_N \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{h=1}^H \frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1}.$$

Le résultat annoncé en découle en choisissant  $H = N - 1$ .

Pour montrer que  $c_2 \geq 2/\pi$  indépendamment de la valeur de  $c_1$ , nous choisissons  $x_n = n/2N$  ( $N \geq 2$ ,  $1 \leq n \leq N$ ). L'intervalle  $I = ]1/2, 1[$  ne contient aucun  $x_n$ , donc

$$D_N \geq \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit, pour  $1 \leq H < 2N$ ,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{h=1}^H \frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1} + \frac{c_2}{N} \sum_{h=1}^H \frac{1}{h} \left| \frac{\sin(\pi h/2)}{\sin(\pi h/2N)} \right|$$

Dans la dernière somme, seuls les entiers  $h$  impairs produisent une contribution non nulle. Par passage à la limite lorsque  $N$  tend vers l'infini, il vient

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{H+1} + \frac{2c_2}{\pi} \sum_{0 < k \leq (H-1)/2} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En faisant à présent tendre  $H$  vers l'infini, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2c_2}{\pi} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi c_2}{4}$$

et donc  $c_2 \geq 2/\pi$ . □

### 3. Preuve du Théorème 1.2

#### 3.1. Application d'un théorème de Vaaler

Nous commençons par établir un résultat intermédiaire qui est une conséquence relativement simple du travail fondamental de Vaaler [5].

**Lemme 3.1.** *Pour tous  $H \geq 1$ ,  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(3.1) \quad D_N \leq \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\gamma(t_h) \cos(\pi \lambda t_h)| \frac{|\sigma_N(h)|}{h},$$

où l'on a posé  $t_h := h/(H+1)$ .

*Remarque.* Le cas  $\lambda = 0$  de (3.1) fournit une forme pondérée intéressante de l'inégalité d'Erdős–Turán. Comme l'atteste la courbe de  $\gamma(t)$  présentée à la Figure 1, les termes  $|\sigma_N(h)|/h$  sont affectés d'un poids sensiblement inférieur à  $2/\pi$  lorsque, disons,  $h > H/2$ . Il est peut-être possible d'exploiter cette propriété pour établir que  $(c_1; c_2) = (1; 2/\pi)$  est admissible.

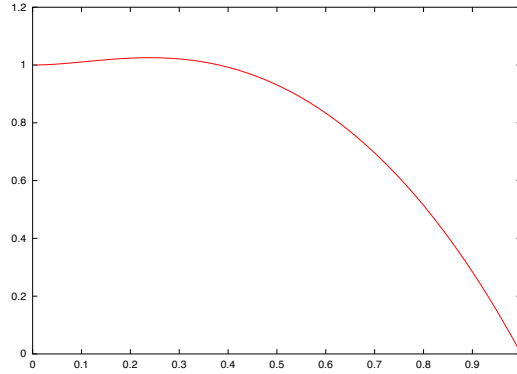


Figure 1. —  $t \mapsto \gamma(t)$ .

*Démonstration.* Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\lambda \leq \frac{1}{2}(H+1)$  : le résultat est trivialement vérifié lorsque  $\lambda \geq H$ , et il découle de (3.1) appliqué à  $\lambda' := H+1-\lambda$  lorsque  $\frac{1}{2}(H+1) < \lambda < H$ .

Soit

$$f(x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h e(hx)$$

une fonction réelle, équilibrée, à variation bornée sur le tore  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . D'après le théorème 19 de [5], nous avons

$$(3.2) \quad |f(x) - f * j_H(x)| \leq \frac{(dV_f) * k_H(x)}{2H+2} \quad (x \in \mathbb{T})$$

avec

$$j_H(x) := \sum_{|h| \leq H} \varphi(t_{|h|}) e(hx),$$

$$k_H(x) := \sum_{|h| \leq H} (1 - t_{|h|}) e(hx) = (H + 1) \left( \frac{\sin(\pi(H + 1)x)}{(H + 1) \sin \pi x} \right)^2,$$

et où  $V_f(x)$  désigne la variation totale de  $f$  sur  $] -\frac{1}{2}, x]$ .

Nous pourrions appliquer directement (3.2) à la fonction équilibrée la plus proche de l'indicatrice  $\mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}$  apparaissant dans la définition (1.1). Cependant, nous gagnons de la précision<sup>(1)</sup> en remarquant que, quitte à remplacer  $x_n$  par  $x_n - \frac{1}{2}(\min I + \max I)$ , ce qui n'altère pas la valeur de  $|\sigma_N(h)|$ , nous pouvons nous limiter aux intervalles symétriques par rapport à l'origine. Un argument évident de continuité permet alors de restreindre l'étude aux fonctions  $\chi_\alpha$  définies sur  $\mathbb{T}$ , pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , par la formule

$$\chi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm \frac{1}{2}\alpha, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\alpha < |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La fonction  $\chi_\alpha$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$ , intégrable sur  $\mathbb{T}$ , équilibrée, donc

$$\chi_\alpha(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi \alpha h)}{\pi h} e(hx).$$

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée, équilibrée, paire, positive ou nulle, d'intégrale 1, à support dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . La transformée de Fourier de  $g$  est donnée par la formule

$$\widehat{g}(t) := \int_{-1/2}^{1/2} g(x) e(-xt) dx.$$

Pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , nous définissons sur  $\mathbb{T}$  une fonction  $g_\varepsilon$  en posant

$$g_\varepsilon(x) := (1/\varepsilon)g(x/\varepsilon) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right).$$

La fonction  $g_\varepsilon$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$ , intégrable sur  $\mathbb{T}$ , et équilibrée, donc

$$(3.3) \quad g_\varepsilon(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx).$$

Pour  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$ , nous considérons la fonction  $\chi_{\alpha, \varepsilon}$ , convolution sur  $\mathbb{T}$  de  $g_\varepsilon$  et  $\chi_\alpha$  :

$$\chi_{\alpha, \varepsilon}(x) := g_\varepsilon * \chi_\alpha(x) = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(u) \chi_\alpha(x - u) du = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(x - u) \chi_\alpha(u) du.$$

---

1. Voir le corollaire 5.1 de [2].

La fonction  $\chi_{\alpha,\varepsilon}$  est à variation bornée sur  $\mathbb{T}$  et équilibrée. On a

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_{\alpha,\varepsilon}(t) dt = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\alpha}(t) dt = \alpha,$$

$$\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi\alpha h)}{\pi h} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx),$$

et, par différentiation terme à terme en tenant compte de (3.3),

$$d\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \{g_{\varepsilon}(x + \frac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \frac{1}{2}\alpha)\} dx,$$

d'où

$$dV_{\chi_{\alpha,\varepsilon}}(x) = |d\chi_{\alpha,\varepsilon}(x)| = |g_{\varepsilon}(x + \frac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \frac{1}{2}\alpha)| dx.$$

Enfin,

$$|g_{\varepsilon}(x + \frac{1}{2}\alpha) - g_{\varepsilon}(x - \frac{1}{2}\alpha)| \leq g_{\varepsilon}(x + \frac{1}{2}\alpha) + g_{\varepsilon}(x - \frac{1}{2}\alpha)$$

$$= 2 \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h) \cos(\pi\alpha h) e(hx).$$

On en déduit par (3.2) que pour  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$ ,

$$|\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) - v_H(x; \alpha, \varepsilon)| \leq r_H(x; \alpha, \varepsilon)$$

avec

$$v_H(x; \alpha, \varepsilon) := \sum_{|h| \leq H} \varphi(t_{|h|}) \frac{\sin(\pi\alpha h)}{\pi h} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx),$$

$$r_H(x; \alpha, \varepsilon) := \frac{1}{H+1} + \sum_{1 \leq |h| \leq H} \kappa(t_{|h|}) \frac{\cos(\pi\alpha h)}{|h|} \widehat{g}(\varepsilon h) e(hx).$$

À ce stade, nous observons que l'on a  $\chi_{\alpha} \leq \chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}$  pour tous  $\alpha, \varepsilon \in ]0, 1[$  tels que  $0 < \alpha + \varepsilon < 1$ . En effet, il est facile de vérifier que

$$\chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(z) \chi_{\alpha+\varepsilon}(x - \varepsilon z) dz$$

vaut 1 si  $|x| \leq \alpha/2$ .

On en déduit, pour  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,

$$(3.4) \quad \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_{\alpha}(x_n) - \alpha \leq \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\varepsilon h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Pour  $0 < \varepsilon < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , nous avons  $\chi_{\alpha-\varepsilon,\varepsilon} \leq \chi_{\alpha}$  et nous obtenons similairement

$$\alpha - \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_{\alpha}(x_n) \leq \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\varepsilon h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Cette dernière inégalité est encore trivialement vérifiée lorsque  $\alpha \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Ainsi en écrivant  $\varepsilon := \lambda/(H+1)$ , donc  $\varepsilon h = \lambda t_h$ , nous obtenons (par continuité en  $\lambda = 0$  et en  $\lambda = \frac{1}{2}(H+1)$ ), pour  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}(H+1)$ ,

$$(3.5) \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \chi_\alpha(x_n) - \alpha \right| \leq \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq h \leq H} |\widehat{g}(\lambda t_h)| \gamma(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Le membre de droite ne dépend pas de  $\alpha$ . On obtient le résultat annoncé en faisant tendre la mesure  $g \, dx$  vers  $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$ .  $\square$

### 3.2. Remarques

Posons

$$\varrho(\lambda; g) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |\widehat{g}(\lambda t)| \gamma(t).$$

Il découle trivialement de (3.5) que, pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , le couple

$$(c_1; c_2) = (1 + \lambda; 2\varrho(\lambda; g)/\pi)$$

est admissible dans (1.2). On a toujours  $\varrho(\lambda; g) \geq 1$ . Soit  $\lambda^*(g)$  la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels  $\lambda$  tels que  $\varrho(\lambda; g) = 1$ . Le choix limite effectué à la fin de la démonstration précédente pour la fonction  $g$  est justifié par le fait que l'on a  $\lambda^*(g) \geq 1/\sqrt{3}$  pour toute fonction  $g$  alors que  $\lambda^*(g)$  tend vers  $1/\sqrt{3}$  lorsque  $g \, dx$  tend vers  $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$ .

Pour établir cela, nous observons d'une part que

$$\gamma(t) = 1 + \frac{1}{6}\pi^2 t^2 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O(t^4),$$

et d'autre part que

$$\widehat{g}(t) = 1 - a(g)t^2 + O(t^4)$$

avec

$$0 \leq a(g) = -\frac{1}{2}\widehat{g}''(0) = 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} x^2 g(x) \, dx \leq \frac{1}{2}\pi^2.$$

Cela implique que  $\lambda^*(g) \geq \pi/\sqrt{6a(g)} > 1/\sqrt{3}$  pour toute fonction  $g$ , le minimum étant atteint asymptotiquement lorsque  $a(g)$  tend vers  $\frac{1}{2}\pi^2$ , ce qui détermine la mesure limite.

Il est à noter que, pour le choix naturel  $g = 1$ , on a

$$\widehat{g}(t) = \sin(\pi t)/\pi t = 1 - \frac{1}{6}\pi^2 t^2 + O(t^4)$$

d'où  $\lambda^*(1) \geq 1$ .

Posons  $\varrho(\lambda) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |\gamma(t) \cos(\pi \lambda t)|$ . On a

$$\varrho(0) \approx 1,0251, \quad \varrho\left(\frac{1}{8}\right) \approx 1,0210, \quad \varrho\left(\frac{1}{4}\right) \approx 1,0117, \quad \varrho\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,0059, \quad \varrho(1/\sqrt{3}) = 1.$$

### 3.3. Preuve du Théorème 1.2

Nous observons d'emblée que le résultat énoncé découle trivialement, par interpolation linéaire, des cas  $y = 0$  et  $y = y_0$ . Comme le premier est une conséquence triviale de (3.1), il suffit de considérer le second.

Posons  $\gamma_\lambda(t) := |\cos(\pi\lambda t)|\gamma(t)$  et notons que, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$(3.6) \quad \gamma_\lambda(t) = 1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda^2\right)\pi^2 t^2 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_\lambda(t^4).$$

Soient  $L > 0$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $[0, L]$ . Il résulte immédiatement de (3.1) que l'inégalité d'Erdős–Turán (1.2) a lieu avec les constantes

$$c_1 = \int_0^L (1 + \lambda) d\mu(\lambda), \quad c_2 = \frac{2}{\pi} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^L |\gamma_\lambda(t)| d\mu(\lambda).$$

Or on a, en vertu de (3.6), lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^L |\gamma_\lambda(t)| d\mu(\lambda) = 1 + \frac{1}{2}\pi^2 t^2 \left\{ \frac{1}{3} - \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \right\} + O(t^3).$$

Pour tout choix de  $\mu$  tel que  $c_2 = 2/\pi$ , on a donc nécessairement

$$L \int_0^L \lambda d\mu(\lambda) \geq \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \geq \frac{1}{3},$$

d'où

$$c_1 = 1 + \int_0^L \lambda d\mu(\lambda) \geq 1 + \frac{1}{L} \int_0^L \lambda^2 d\mu(\lambda) \geq 1 + \frac{1}{3L}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux dernières inégalités soient des égalités est que  $\mu = a\delta_0 + b\delta_L$  avec  $a = 1 - 1/3L^2$ ,  $b = 1/3L^2$ ,  $L \geq 1/\sqrt{3}$ , où  $\delta_u$  désigne la mesure de Dirac au point  $u$ .

Posons  $L := 1/3y$ , où  $y$  est un paramètre arbitrairement choisi dans l'intervalle  $[0, 1/\sqrt{3}]$ , et rappelons la définition (1.3). Il résulte de (3.1) que l'on a, pour tous  $N \geq 1$ ,  $H \geq 1$  et toute suite  $\{x_n\}_{n=1}^N$ ,

$$D_N \leq \frac{1+y}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq n \leq N} \vartheta_y(t_h) \frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

De plus, la discussion précédente montre que  $\vartheta_y$  est la seule combinaison linéaire des fonctions  $\gamma_\lambda$  satisfaisant aux conditions nécessaires issues du comportement à l'origine pour que

$$(3.7) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \vartheta_y(t) = 1,$$

et donc  $c_2 = 2/\pi$ . On a en effet, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,

$$\vartheta_y(t) = 1 - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_y(t^4).$$

Il reste à déterminer la plus petite valeur  $y_0$  de  $y$  pour laquelle (3.7) est réalisée, ou, à défaut, une approximation acceptable de cette valeur minimale. L'observation numérique

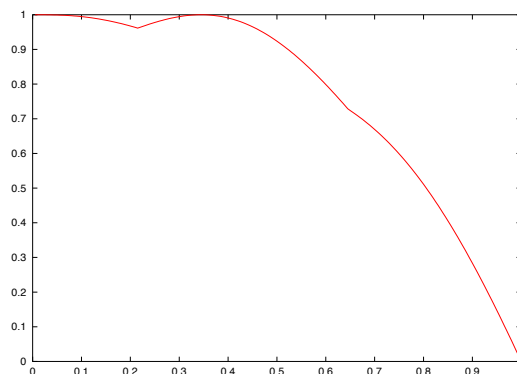


Figure 2. —  $t \mapsto v_{32/223}(t)$ .

suggère que  $y_0 \leq \frac{32}{223}$  et nous pouvons effectivement justifier cette assertion par la technique décrite au paragraphe 4.

*Remarque.* Il est à noter que la méthode employée ne peut fournir simultanément  $c_1 = 1$  et  $c_2 = 2/\pi$ . En effet, si  $c_1$  tend vers 1,  $\int_0^L \lambda d\mu(\lambda)$  tend vers 0, donc pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_0^\varepsilon d\mu(\lambda)$  tend vers 1. Cela implique

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) \int_0^\varepsilon |\cos(\pi\lambda t)| d\mu(\lambda) \geq \sup_{0 \leq t \leq 1} \gamma(t) |\cos(\pi\varepsilon)| \mu([0, \varepsilon]) > 1.$$

#### 4. Calculs numériques

Si  $f$  est continûment dérivable sur  $[0, 1]$ , et  $|f'(x)| \leq M$  sur  $[0, 1]$ , on a, pour toute subdivision  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = 1$  de pas  $\delta$ ,

$$f(t) \leq f(t_j) + M\delta \quad (|t - t_j| \leq \delta).$$

En choisissant, par exemple,  $\delta = 1/(10^6 M)$ , nous pouvons évaluer la borne supérieure de  $f$  avec une précision de l'ordre de  $10^{-6}$ , en ne calculant qu'un nombre fini et raisonnable de valeurs numériques. Pour montrer que  $f(t) \leq 1$  pour tout  $t$ , il suffit ainsi de vérifier que  $f(t_j) \leq 1 - 10^{-6}$  pour tout  $j$  de  $[0, k]$ . Cette technique peut, le cas échéant, être complétée par une étude locale de type développement limité avec majoration explicite du reste au voisinage des racines de l'équation  $f(t) = 1$ . Comme il n'y a pas d'accumulation des erreurs, même une valeur relativement grossière de  $M$  est suffisante.

Pour les fonctions étudiées dans cet article, la valeur de  $M$  dépend essentiellement de l'encadrement suivant, qui est d'un intérêt indépendant.

**Lemme 4.1.** On a

$$1 - \pi^2/4 = \varphi'(\frac{1}{2}) \leq \varphi'(t) \leq 0, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

*Démonstration.* D'après la formule d'Euler pour la cotangente, on a

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2t^2(1-t)}{t^2 - n^2} = -2t + 3 - \frac{2}{(t+1)} + \sum_{n \geq 2} \left\{ 2(1-t) + \frac{n(n-1)}{n-t} - \frac{n(n+1)}{n+t} \right\}.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -2 + \frac{2}{(t+1)^2} + \sum_{n \geq 2} \left\{ -2 + \frac{n(n-1)}{(n-t)^2} + \frac{n(n+1)}{(n+t)^2} \right\}, \\ \varphi''(t) &= \frac{-4}{(t+1)^3} + 2 \sum_{n \geq 2} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n-t)^3} - \frac{n(n+1)}{(n+t)^3} \right\}, \\ \varphi'''(t) &= \frac{12}{(t+1)^4} + 6 \sum_{n \geq 2} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n-t)^4} + \frac{n(n+1)}{(n+t)^4} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\varphi'''(t) > 0$ , donc  $\varphi''$  est croissante sur  $[0, 1]$ . Or, pour  $t = \frac{1}{2}$ , la série de  $\varphi''$  est télescopique, d'où

$$\varphi''(\frac{1}{2}) = \frac{-32}{27} + \frac{4}{(3/2)^3} = 0.$$

Cela montre que  $\varphi'$  atteint bien son minimum en  $t = \frac{1}{2}$ . □

## Bibliographie

- [1] P. Erdős and P. Turán, On a problem in the theory of uniform distribution I, II, *Indag. Math.* **10** (1948), pp. 370–378; *ibid.* 406–413.
- [2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.
- [3] C. Mauduit, J. Rivat, & A. Sárközy, On the pseudorandom properties of  $n^c$ , *Illinois J. Math.* **46** (2002), no. 1, 185–197.
- [4] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS regional conferences series in mathematics, no. 84, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1994), 220 pp.
- [5] J. Vaaler, Some extremal functions in Fourier analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), pp. 183–216.

Joël Rivat  
 Institut Elie Cartan  
 Université Henri Poincaré–Nancy 1  
 BP 239  
 54506 Vandœuvre Cedex  
 France  
 rivat@iecn.u-nancy.fr

Gérald Tenenbaum  
 Institut Elie Cartan  
 Université Henri Poincaré–Nancy 1  
 BP 239  
 54506 Vandœuvre Cedex  
 France  
 gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr