

ESSTIN
Parc Robert Bentz - 2, Rue Jean Lamour
54519 Vandoeuvre les Nancy Cedex
tel +33 (0)3 83 68 50 00
fax +33 (0)3 83 68 50 01

Exercices de Mathématiques pour les Travaux Dirigés

1ère année

AVANT-PROPOS

Ce polycopié est un recueil d'exercices de mathématiques à l'usage des élèves en première année à l'Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy.

Le niveau des exercices proposés est assez variable : certains sont des applications directes du cours ; d'autres, marqués d'un astérisque, sont un peu difficiles, mais ils peuvent toujours être résolus avec les moyens dont disposent les élèves de première année.

Les exercices sont pour la plupart classiques. Les plus originaux proviennent de la base de données EXEMAALT (Exercices de Mathématiques Alternatifs), en copyleft LDL. Les noms de leurs auteurs respectifs sont mentionnés en bas de page.

L. ROSIER

SOMMAIRE

1ER SEMESTRE

| | | |
|----|---|----|
| 1. | Ensembles - Applications | 1 |
| 2. | Nombres complexes | 3 |
| 3. | Suites numériques | 5 |
| 4. | Géométrie affine et euclidienne | 8 |
| | 4.1 Barycentre et produit scalaire | 8 |
| | 4.2 Produit vectoriel et produit mixte | 8 |
| | 4.3 Géométrie analytique | 9 |
| 5. | Applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} | 13 |
| | 5.1 Limite - Continuité | 13 |
| | 5.2 Applications dérivables | 14 |
| | 5.3 Applications réciproques | 16 |
| | 5.4 Fonctions convexes | 16 |
| 6. | Polynômes | 18 |
| 7. | Formule de Taylor-Lagrange et développements limités .. | 20 |
| 8. | Fractions rationnelles | 22 |
| 9. | Intégrales simples | 23 |
| | 9.1 Intégrale de Riemann | 23 |
| | 9.2 Calcul de primitives et d'intégrales | 26 |

2ND SEMESTRE

| | | |
|-----|--|----|
| 10. | Equations différentielles | 28 |
| 11. | Fonctions de plusieurs variables | 31 |
| | 11.1 Topologie générale - limites | 31 |
| | 11.2 Compacité | 32 |
| | 11.3 Dérivées partielles | 34 |
| | 11.4 Extrema | 37 |
| 12. | Algèbre linéaire | 39 |
| | 12.1 Matrices - Systèmes linéaires | 39 |
| | 12.2 Déterminants | 42 |
| | 12.3 Espaces vectoriels | 44 |
| | 12.4 Applications linéaires | 48 |
| | 12.5 Réduction des endomorphismes | 53 |
| 13. | Intégrales doubles | 57 |

1. Ensembles - Applications

Ex. 1 Dans chacun des cas suivants mettre dans l'espace ... le symbole approprié parmi \in , \notin , \subset , $\not\subset$:

- a) $1 \dots \mathbb{C}$;
- b) $\{2\} \dots \mathbb{R}$;
- c) $\{3, 1 - 2i\} \dots \mathbb{Z}$;
- d) $\sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$;
- e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;
- f) $\pi \dots \mathbb{R}$;
- g) $\{\pi\} \dots \mathbb{R}$.

Ex. 2 On désigne par I l'intervalle $[0, 4]$ et on considère les fonctions de I dans \mathbb{R} définies de la façon suivante :

$$f_1(x) = \frac{x}{2} + 3,$$
$$f_2(x) = x + 1,$$
$$f_3(x) = -x^2 + 4x + 2.$$

- a) Tracer sur une même figure les courbes représentatives de f_1 , f_2 et f_3 .
- b) Etudier chacune des assertions suivantes et dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera sa réponse par un argument d'une à deux lignes au plus.

- (A₁) $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$ $f_1(x) \leq M$;
- (A₂) $\forall x \in I$, $\exists x' \in I$ tel que $f_1(x) = f_2(x')$;
- (A₃) $\exists x \in I$ tel que $\forall x' \in I$ $f_1(x') \leq f_3(x)$;
- (A₄) $\exists x' \in I$ tel que $\forall x \in I$ $f_1(x') \leq f_3(x)$;
- (A₅) $\forall x \in I$, $f_2(x) \leq f_1(x)$.

Ex. 3 Dans chacun des cas suivants, dire si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective, surjective ou bijective :

- a) $f(x) = x^2$;
- b) $f(x) = x^3$;
- c) $f(x) = x(x^2 - 1)$;
- d) $f(x) = \exp x$;
- e) $f(x) = \sin x$.

Ex. 4 Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble fini.

1. Soit $f : A \rightarrow A$. Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective. Le résultat persiste-t-il si A est infini ?

2. Combien y a-t-il de bijections de A sur A ?

Ex. 5 Trouver un majorant du nombre de chiffres d'un entier n .

Ex. 6 Supposons qu'un plan d'épargne soit rémunéré 5% par an, et que les intérêts acquis à la fin de chaque année viennent s'ajouter au capital. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

2. Nombres complexes

Ex. 1 *Ecrire sous forme cartésienne ($z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$) les nombres complexes*

$$z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_3 = \frac{2+i}{1+3i} \quad \text{et} \quad z_4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

Ex. 2 *Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants*

$$1 + i; \quad -1 + i\sqrt{3}; \quad \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}.$$

Ex. 3 *Résoudre dans \mathbb{C} les équation suivantes :*

- a) $z + \bar{z} - 2 = 0;$
- b) $(1 - 2i)z - (3 - i) = 0;$
- c) $\operatorname{Im}\left(\frac{5z - 2}{z - 1}\right) = 0.$

Ex. 4 **MODULE ET ARGUMENT DE LA SOMME DE DEUX NOMBRES COMPLEXES**

Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes. On veut déterminer analytiquement le module et l'argument de $z = z_1 + z_2$ (resp. de $z' = z_1 z_2$).

1. *Représenter les points M_1 , M_2 et M du plan d'affixes respectifs z_1 , z_2 et z .*

2. *On note $z = \rho e^{i\theta}$. Montrer que*

$$\rho = (\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))^{\frac{1}{2}}.$$

(Indication : développer $z\bar{z}$.)

3. *On suppose que M est dans le demi-plan situé à droite de l'axe des imaginaires. Utilisant la représentation géométrique de z_1 et z , montrer que*

$$\sin \theta = \frac{\rho_1 \sin \theta_1 + \rho_2 \sin \theta_2}{\rho}.$$

4. *On pose $z' = z_1 z_2 = \rho' e^{i\theta'}$. Donner les expressions de ρ' et θ' , et représenter le point M' d'affixe z' .*

Ex. 5 NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1. Utilisant le nombre complexe $e^{i(x+y)}$, retrouver rapidement les formules de trigonométrie donnant $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$, puis celles donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$;
2. En déduire les formules donnant $\cos x \cos y$, $\sin x \sin y$, $\sin x \cos y$.
3. En déduire les formules donnant $\sin p + \sin q$, $\sin p - \sin q$, $\cos p + \cos q$ et $\cos p - \cos q$.

Ex. 6 En exprimant de deux façons différentes $(1+i)^5$, calculer $C_5^0 - C_5^2 + C_5^4$ et $C_5^1 - C_5^3 + C_5^5$. Calculer plus généralement $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$ ($n \geq 1$).

Ex. 7 Exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ à l'aide de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$.

Ex. 8 Linéariser les expressions : $\cos^4(\theta)$, $\cos \theta \cdot \sin^3 \theta$ et $\cos(2\theta) \cos^2 \theta$.

Ex. 9 Trouver les solutions z_1, z_2 de $z^2 - (4+i)z + 5 - i = 0$.

Ex. 10 Calculer une racine carrée z de $2 - 3i$.

Ex. 11 Calculer les racines 6ème de $-3 + 3i$.

Ex. 12 Résoudre $z^3 - iz^2 = -2z^3 + (2+i)z^2 - 4z$.

Ex. 13 Résoudre $z^4 - (2+i)z^2 + 3 + i = 0$.

Ex. 14 Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Que vaut $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$? Exprimer $z + z^4$ et $z^2 + z^3$ en fonction de $\cos(2\pi/5)$, et en déduire les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et de $\cos(\pi/5)$.

Ex. 15 IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

Prouver l'identité

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2), \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}.$$

En donner une interprétation géométrique. (Indication : construire le parallélogramme dont les sommets ont pour affixes $0, z, z + z', z'$.)

3. Suites numériques

Ex. 1 Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3 + 2u_n}$ est convergente.

Ex. 2 Que signifie pour la suite (u_n) :
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow u_n < A)$?

Ex. 3 On suppose $u_n \rightarrow l$. Est-il vrai que $l \geq 0$ lorsque
i) $u_n \geq 0$ pour $0 \leq n \leq 1000$?
ii) $u_{n^2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Ex. 4 Etudier les limites des suites définies par

$$u_n = \frac{3^{2n}}{(6n)^2}, \quad v_n = \sin(n!) - n^2, \quad w_n = \frac{n^3 - n^2 + 2}{2n^3 + 1 - n^{-2}}.$$

Ex. 5 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par $u_n = \frac{3^n - n!}{2^n - n^3}$ pour tout $n \geq 0$, $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \left(\frac{v_n + 1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Etudier la convergence de chacune de ces suites en précisant la limite lorsqu'elle existe.

Ex. 6 On pose pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Ex. 7 Soient $a_n = \frac{n}{n+1}$ et $b_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$. Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles adjacentes ?

Ex. 8 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = -\frac{3}{2}u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Donner l'expression de u_n pour tout $n \geq 0$, et la limite de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ex. 9 * MODÈLES DE POPULATION. On s'intéresse à des modèles discrets s'appliquant à des populations présentant des phénomènes de synchronisation (par exemple, les insectes se reproduisent à une même période de l'année). On choisit une unité de temps et on note P_n le nombre d'individus au bout de n unités de temps, $P_0 (> 0)$ désignant la population initiale. La quantité $T_n = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$ est le taux d'accroissement de la population entre les instants n et $n + 1$.

1. On suppose que $T_n = T$ pour tout n (loi de Malthus), où $T \in]-1, +\infty[$ est une constante. Ecrire l'équation liant P_{n+1} et P_n et reconnaître le type de la suite (P_n) . Etudier sa limite.

2. On suppose que pour tout n

$$T_n = k\left(1 - \frac{P_n}{P^*}\right) \quad (\text{loi de Verhulst}),$$

où $k > 0$ et $P^* > 0$ sont des constantes.

a) On pose

$$x_n = \frac{k}{k+1} \frac{P_n}{P^*}.$$

Montrer que

$$x_{n+1} = (k+1)x_n(1-x_n), \quad \forall n \geq 0.$$

A partir de maintenant on suppose que $k = 1/2$ et que $0 < P_0 < 3P^*$.

b) Montrer que $x_n \rightarrow \frac{1}{3}$. (On distinguera les cas suivants (i) $0 < x_0 < 1/3$, (ii) $x_0 = 1/3$, (iii) $1/3 < x_0 < 2/3$ et (iv) $2/3 \leq x_0 < 1$ et on établira dans les cas (i) et (iii) la monotonie de la suite (x_n) à partir d'un certain rang.)

c) Conclure.

Ex. 10 * DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL ILLIMITÉ

Le but de cet exercice est de définir le développement décimal illimité de tout nombre réel $l \in [0, 10]$.

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant $u_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ pour tout $n \geq 0$.

On définit deux suites $(s_n)_{n \geq 0}$ et $(s'_n)_{n \geq 0}$ par

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot 10^{-k} = u_0, u_1 u_2 \cdots u_n, \quad s'_n = s_n + 10^{-n} \quad \forall n \geq 0.$$

Montrer que les suites (s_n) et (s'_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers un nombre $l \in [0, 10]$. On écrira $l = u_0, u_1 u_2 \cdots$ et on dira

que $u_0, u_1 u_2 \dots$ est un développement décimal illimité du réel l . Que vaut l lorsque $u_n = 9$ pour tout n ?

2. Inversement, on se donne un réel quelconque $l \in [0, 10[$ et on cherche à construire un développement décimal illimité de l . On pose $u_0 = [l]$ (partie entière de l). Si u_0, \dots, u_n sont construits, on pose $u_{n+1} = [10^{n+1}(l - s_n)]$, où $s_n = u_0, u_1 \dots u_n$. Montrer par récurrence sur n que

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 9 \\ s_n \leq l < s_n + 10^{-n} \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

En déduire que $l = u_0, u_1 u_2 \dots$

3. Cette question vise à montrer qu'un nombre réel $l \in]0, 10]$ admet un unique développement décimal illimité si et seulement si l n'est pas un nombre décimal. Soit $l \in]0, 10]$ un réel possédant deux développements décimaux illimités distincts :

$$l = u_0, u_1 u_2 \dots = v_0, v_1 v_2 \dots$$

Soit N le premier entier pour lequel $u_n \neq v_n$. On peut supposer par exemple que $u_N < v_N$.

a) Montrer que $v_N = u_N + 1$.

b) Montrer que $u_n = 9$ et $v_n = 0$ pour tout $n \geq N + 1$. En déduire que l est un nombre décimal.

c) Inversement, montrer que tout nombre décimal $l \in]0, 10]$ admet deux développements décimaux illimités.

4. On dit qu'un développement décimal illimité est périodique (à partir d'un certain rang) s'il existe deux entiers N (le rang) et T (la période) tels que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geq N$. Le but de cette question est de montrer que les rationnels sont les seuls réels à posséder un développement décimal illimité périodique.

a) Déterminer le développement décimal illimité de $l = 131/7$. (Indication : faire la division de l'école primaire).

b) Supposons que le nombre $l \in [0, 10]$ soit rationnel : $l = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que le développement décimal illimité de l s'obtient en divisant indéfiniment p par q , et que ce développement décimal illimité est périodique.

c) Réciproquement, soit $l \in [0, 10]$ un réel admettant un développement décimal illimité périodique. Montrer que l est rationnel.

4. Géométrie affine et euclidienne

4.1 Barycentre et produit scalaire

Ex. 1 Soient A, B, C, D quatre points du plan euclidien E_2 . Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $[AC]$ et $[BD]$ ont mêmes milieux.

Ex. 2 ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT

On note (\vec{u}, \vec{v}) le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 . Soit $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ une base quelconque de \mathbb{R}^3 . On définit les vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 par

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \\ \vec{e}_2 &= \frac{\vec{u}_2 - (\vec{u}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1}{\|\vec{u}_2 - (\vec{u}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1\|} \\ \vec{e}_3 &= \frac{\vec{u}_3 - (\vec{u}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{u}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2}{\|\vec{u}_3 - (\vec{u}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{u}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2\|}\end{aligned}$$

Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Faire les calculs pour $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)$.

4.2 Produit vectoriel et produit mixte

Ex. 1 Dans E_3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$, le vecteur \vec{u} de composantes $(2, 0, 1)$, la droite $D = D(A, \vec{u})$ et le plan P d'équation $x + y + 2z - 1 = 0$. Déterminer $D \cap P$, $\text{dist}(O, D)$ et $\text{dist}(A, P)$.

Ex. 2 Soient $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ et $\vec{w} = (-3, 2, 5)$. Calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Ex. 3 Soient P le plan d'équation $x + y - 2z + 1 = 0$, $D_1(A_1, \vec{u}_1)$ et $D_2(A_2, \vec{u}_2)$ les droites définies par les points $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (2, 0, -1)$ et les vecteurs $\vec{u}_1 = (0, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$. Déterminer $\text{dist}(A_1, D_2)$, $\text{dist}(A_1, P)$, $\text{dist}(D_1, D_2)$ et $\text{dist}(D_2, P)$.

4.3 Géométrie analytique

Ex. 1 Soit la droite $D = D(A, \vec{u})$ de l'espace \mathbb{R}^3 , où A est le point de coordonnées $(2, 0, 1)$ et \vec{u} le vecteur de composantes $(1, 1, 3)$ dans la base canonique. Donner une représentation paramétrique de D , puis une représentation cartésienne de D .

Ex. 2 Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 2 = 0$.

Ex. 3 Déterminer l'intersection des deux sphères d'équations respectives $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 2 = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - z - 4 = 0$.

Ex. 4 Déterminer l'intersection du plan P d'équation $x - y + 2z - 3 = 0$ et de la droite D d'équations

$$\begin{cases} -x + y - z + 2 = 0, \\ x + y + 3 = 0. \end{cases}$$

Ex. 5 Soit S la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 2z - 7 = 0$, et D la droite ayant pour représentation cartésienne

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

Donner une représentation paramétrique de D , et déterminer $S \cap D$.

Ex. 6 CONIQUES

Dans un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} , soient F un point et \mathcal{D} une droite affine ne contenant pas F . Pour tout point M de \mathcal{P} on note H la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} . Soit e un nombre positif. On appelle conique de foyer F , de directrice \mathcal{D} et d'excentricité e , l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}; MF = eMH\}.$$

Si $0 < e < 1$, on dit que \mathcal{C} est une ellipse;

Si $e = 1$, on dit que \mathcal{C} est une parabole;

Si $e > 1$, on dit que \mathcal{C} est une hyperbole.

On note K la projection orthogonale de F sur \mathcal{D} . On pose $\alpha = FK$ et $p = \alpha e$.

1. ETUDE D'UNE ELLIPSE ($0 < e < 1$)

Soient $\vec{i} = \frac{1}{FK}\overrightarrow{FK}$.

a) Montrer que dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, l'ellipse \mathcal{C} a pour équation

$$x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2,$$

ou encore

$$\left(\frac{x + \alpha e^2/(1 - e^2)}{\alpha e/(1 - e^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(\alpha e/\sqrt{1 - e^2})^2} = 1.$$

On pose $a = \frac{p}{1 - e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$, $c = ea$, et on introduit le point O défini par $\overrightarrow{FO} = -c\vec{i}$. Montrer que l'équation de \mathcal{C} dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Dessiner l'ellipse \mathcal{C} . (On dit que a (resp. b) est le demi grand axe (resp. demi petit axe), et que O est le centre de \mathcal{C} .)

b) Soit le point F' défini par $\overrightarrow{F'O} = \overrightarrow{OF}$. Montrer que

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}; MF + MF' = 2a\}.$$

(Indication: soit s la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées. Remarquer que $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, et introduire $M' = s(M)$, $H' = s(H)$ et $\mathcal{D}' = s(\mathcal{D})$.)

2. ETUDE D'UNE PARABOLE ($e = 1$)

Soient S le milieu de $[F, K]$ et $\vec{i} = \frac{1}{SF} \overrightarrow{SF}$.

a) Montrer que dans le repère $\mathcal{R} = (S, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole \mathcal{C} admet pour équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Dessiner la parabole \mathcal{C} .

b) Montrer que la tangente en un point M de \mathcal{C} est la bissectrice de \widehat{FMH} . (Indication : remarquant que l'application $t \mapsto (\frac{t^2}{2p}, t)$ est une paramétrisation de \mathcal{C} , dériver par rapport à t dans l'équation $\|\overrightarrow{FM}\|^2 = \|\overrightarrow{HM}\|^2$). En déduire que tout rayon lumineux parallèle à l'axe des abscisses se réfléchit sur la parabole en direction du foyer.

3. ETUDE D'UNE HYPERBOLE ($e > 1$)

a) Soient $\vec{i} = -\frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$. Montrer que dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, l'hyperbole \mathcal{C} admet pour équation

$$x^2 + y^2 = e^2(x + \alpha)^2,$$

ou encore

$$\left(\frac{x + \alpha e^2 / (e^2 - 1)}{\alpha e / (e^2 - 1)} \right)^2 - \frac{y^2}{(\alpha e / \sqrt{e^2 - 1})^2} = 1.$$

On pose $a = \frac{p}{e^2 - 1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$, $c = ea$ et on introduit le point O défini par $\overrightarrow{FO} = -c\vec{i}$. Montrer que dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ \mathcal{C} a pour équation

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Dessiner l'hyperbole \mathcal{C} .

b) Soit la fonction $f(x) = \frac{k}{x}$, où $k > 0$ est une constante positive. Montrer que la courbe représentative \mathcal{C} de f est une hyperbole, dont on précisera les caractéristiques (foyer, directrice, excentricité). (Indication : écrire l'équation de \mathcal{C} dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$, avec $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ et utiliser le fait que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.)

Ex. 7 INTERSECTION CYLINDRE-PLAN ET CÔNE-PLAN

Soit E_3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit θ un angle compris entre 0 et $\pi/2$. Soit $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ la base (orthonormée) définie

par $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \cos(\theta)\vec{e}_2 + \sin(\theta)\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\sin(\theta)\vec{e}_2 + \cos(\theta)\vec{e}_3$. Soit $\mathcal{R}' = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ le nouveau repère. On note (x, y, z) (resp. (x', y', z')) les coordonnées d'un point M dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}').

i) Représenter les demi-axes Ox, Oy, Oz, Ox', Oy' et Oz' . Montrer que

$$\begin{cases} x &= x' \\ y &= \cos(\theta)y' - \sin(\theta)z' \\ z &= \sin(\theta)y' + \cos(\theta)z'. \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit on note P le plan d'équation $z' = 0$, et on fait varier la valeur de l'angle θ .

ii) Soit D le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que $D \cap P$ est un cercle pour $\theta = 0$, une ellipse pour $0 < \theta < \pi/2$ et la réunion de 2 droites pour $\theta = \pi/2$.

iii) Soit C le cône d'équation $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$. Montrer que $C \cap P$ est un cercle pour $\theta = 0$, une ellipse pour $0 < \theta < \pi/4$, une parabole pour $\theta = \pi/4$, une hyperbole pour $\pi/4 < \theta < \pi/2$, et la réunion de 2 droites pour $\theta = \pi/2$.

Ex. 8 PROJECTION ORTHOGONALE D'UN CERCLE SUR UN PLAN (*Extrait de la colle de Mai 2004*)

On se propose de montrer que la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse. On suppose donné dans \mathbb{R}^3 un plan \mathcal{P} d'équation $\lambda y + z = 1$ (λ étant un paramètre réel), un cercle \mathcal{C} sur \mathcal{P} de centre $A = (0, 0, 1)$ et de rayon $R > 0$, et l'on étudie la projection orthogonale de \mathcal{C} sur le plan d'équation $z = 0$.

1. Donner un système d'équations cartésiennes pour \mathcal{C} .

2. Soit $p : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ la projection orthogonale sur le plan $z = 0$. Exprimer l'équation reliant x et y pour tout point (x, y, z) de \mathcal{C} , puis donner le système d'équations cartésiennes définissant $p(\mathcal{C})$.

3. Montrer que $p(\mathcal{C})$ est une ellipse. Préciser son demi-grand axe a et son demi-petit axe b .

5. Applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

5.1 Limite - Continuité

Ex. 1 Simplifier $x^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$. Etudier les limites de $x^{\frac{1}{x}}$, $(x^3 - x + 2)^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$ et de $\sqrt{x^2 + x} - x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ex. 2 Etudier les limites quand $x \rightarrow 0^+$ de $f(x) = \frac{(x + \sin x)(1 - \cos x)}{(x + \sin(\frac{x}{2}))(1 - \cos(2x))}$,

$$g(x) = \frac{\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{3x} \ln(1 + x)}, \quad h(x) = (x^{-2} + 1)^{\sqrt{x}}$$

Ex. 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle qu'en tout point x les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et sont égales. f est-elle nécessairement continue ?

Ex. 4 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue. Montrer qu'il existe (au moins) un nombre $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Ex. 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur \mathbb{R} (i.e., il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Ex. 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(a) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$;

(b) pour tout $m > 0$, l'image réciproque de $[-m, m]$ est bornée.

Ex. 7 Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est ou non uniformément continue sur son ensemble de définition :

a) $x \mapsto \ln x$;

b) $x \mapsto x^2$;

c) $x \mapsto \sqrt{x}$;

d) $x \mapsto \sin x$.

Ex. 8 * Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$ telles que

$$|f(x)| \leq a|x| + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Applications dérivables

Ex. 1 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On définit

$$g(x) = f(\sin^2 x) \quad \text{et} \quad h(x) = \sin^2(f(x)).$$

Exprimer les dérivées de g et de h en fonction de f et f' .

Ex. 2 Montrer, en utilisant la définition de la dérivée en 0, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Ex. 3 Calculer la dérivée logarithmique, puis la dérivée usuelle de

$$f(x) = \frac{x^5 \cos^3 x \sin^4 x}{(1+x^2)e^x}.$$

Ex. 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $f(x+1) - f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ex. 5 (Extrait de la colle de Novembre 2002) Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} . On note $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ (resp. $G(x) = \int_0^x g(t) dt$) la primitive de f (resp. de g) s'annulant en 0. Etudier la validité de chacune des assertions suivantes. On justifiera sa réponse en donnant une preuve courte lorsque l'assertion est vraie, et un contre-exemple lorsqu'elle est fautive.

(A₁) $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow 0 \Rightarrow F(x) \sim G(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

(On supposera en outre que f et g sont positives ou nulles, pour simplifier.)

(A₂) $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow 0 \Rightarrow f'(x) \sim g'(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

(A₃) $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ex. 6 * On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

i) Montrer que $x \rightarrow \sqrt{x}$ est höldérienne d'exposant $1/2$ sur $I = [0, 1]$.

ii) Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est höldérienne d'exposant $\alpha > 1$, alors f est constante. (Indication : montrer que f est dérivable et que sa dérivée est nulle sur I .)

Ex. 7 * Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $f'(x)$ a une limite (finie) l' lorsque $x \rightarrow a$.

i) Montrer que $f(x)$ a aussi une limite finie lorsque $x \rightarrow a$. (Indication : vérifier que le critère de Cauchy est satisfait.)

ii) On prolonge f par continuité en a . Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = l'$.

iii) Application : Soit la fonction $f(x) = \operatorname{Argth} x + \operatorname{Argth} x^2$ définie et dérivable sur $] -1, 1[$. Montrer que f se prolonge en -1 en une fonction dérivable. (On rappelle que $\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.)

Ex. 8 (Extrait de la colle de Novembre 2002) Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . On s'intéresse à la réflexion sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ d'un rayon lumineux arrivant de l'infini en décrivant la demi-droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = x_0 \text{ et } y > f(x_0)\}$.

1. Soient \vec{v} , \vec{n} et \vec{r} des vecteurs directeurs respectivement du rayon incident (vertical), de la normale à la courbe en $(x_0, f(x_0))$ et du rayon réfléchi. On choisit \vec{v} , \vec{n} et \vec{r} de telle sorte qu'ils pointent vers la partie de \mathbb{R}^2 au dessus de la courbe \mathcal{C} , et que \vec{v} et \vec{r} soient de norme 1. On rappelle que dans ces conditions les lois de l'optique géométrique se traduisent par la relation

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{r}.$$

Exprimer \vec{r} en fonction de $f'(x_0)$.

2. Calculer l'ordonnée (notée $g(x_0)$) du point situé à l'intersection du rayon réfléchi et de l'axe des ordonnées.

3. Montrer que la fonction g est constante lorsque $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

4. Est-ce encore vrai lorsque $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$? Que se passe-t-il lorsque $x_0 \rightarrow 0$?

5. Donner l'interprétation physique des résultats obtenus aux questions 3 et 4.

5.3 Applications réciproques

Ex. 1 a. Montrer que $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
b. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Ex. 2 Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $n = [\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}]$. Montrer que $\arctan(\tan(x)) = x - n\pi$.

Ex. 3 (Extrait de l'examen de Janvier 2003) Calculer $A = \cos(\arccos(\frac{1}{3}) + \arcsin(\frac{1}{2}))$, $B = \sin(\arccos(\frac{1}{4}) + \frac{\pi}{3})$, $C = \cos(\frac{1}{2} \arctan 1)$, $D = \arctan(\tan 2)$.

5.4 Fonctions convexes

Ex. 1 Montrer que $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, puis que $a^2 + ab + b^2 > 0$ pour tout $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer que $|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$ pour tous $\varepsilon > 0, a, b \in \mathbb{R}$.

Application : Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{3}x^2 + x \sin y - \frac{3}{4} \cos^2 y \geq -\frac{3}{4}.$$

Ex. 2 INÉGALITÉ DE YOUNG : Soient p et p' deux nombres dans $[1, +\infty[$ et tels que $1/p + 1/p' = 1$. Montrer, en utilisant la concavité du logarithme, que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall a, b \geq 0.$$

Ex. 3 Montrer que $(\sqrt{x} + \sqrt{y})/\sqrt{2} \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ pour tous $x, y \geq 0$.

Ex. 4 Montrer

$$x^p + y^p \leq (x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p) \quad \forall x, y \geq 0, \forall p \geq 1.$$

Ex. 5 Prouver

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Ex. 6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et telle que f' est convexe, et soit $a \in I$. On introduit la fonction taux d'accroissement en a

$$\tau_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \in I, x \neq a, \\ f'(a) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Montrer que

$$\tau_a(x) = \int_0^1 f'(a + t(x - a)) dt \quad \forall x \in I.$$

En déduire que τ_a est convexe sur I .

Application : Vérifier que la fonction $\frac{\ln x}{x-1}$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Ex. 7 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable et convexe. Montrer que le maximum de f est atteint en a ou en b .

6. Polynômes

Ex. 1 Effectuer la division euclidienne de $A = x^5 - 3x^2 + 1$ par $B = x^2 + x + 2$, puis la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2 de A par B .

Ex. 2 Utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que les polynômes $A = x^3 + 1$ et $B = -2x^2 + 1$ sont premiers entre eux, et donner un couple $(U, V) \in \mathbb{R}[x]^2$ satisfaisant l'identité de Bezout $AU + BV = 1$.

Ex. 3 Déterminer le PGCD de $A = x^4 - 1$ et de $B = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

Ex. 4 Soit $A = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Déterminer le PGCD de A et de A' , et trouver ses racines (qui sont les racines multiples de A). Déterminer toutes les racines de A .

Ex. 5 Soient $P = x^4 + x^2 + 1$ et $Q = x^3 + 1$. Donner le PGCD de P et de Q et la décomposition de P en facteurs irréductibles sur \mathbb{R} , puis celle en facteurs irréductibles sur \mathbb{C} .

Ex. 6 On étudie le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 & (1) \\ a + b + c = -2 & (2) \\ a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = -\frac{5}{6} & (3) \end{cases}$$

Montrer que le système est équivalent à

$$\begin{cases} ab + bc + ca = -5 & (1') \\ a + b + c = -2 & (2) \\ abc = 6, & (3') \end{cases}$$

et résoudre le second système.

Ex. 7 POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

i) Exprimer $\cos ny$ en fonction de $\cos y$. Montrer que T_n est un polynôme de degré n pour tout $n \geq 0$. Calculer T_0, T_1, T_2 .

ii) Montrer que $\cos(n+1)y + \cos(n-1)y = 2 \cos ny \cos y$ pour tout y . En déduire que

$$T_{n+1} = 2x T_n - T_{n-1}.$$

Calculer T_3, T_4 et tracer le graphe de T_4 .

iii) On pose $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que T_n n'a que des racines simples, qui sont les x_k .

iv) On pose $x'_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que T_n atteint ses extrema sur $[-1, 1]$ en les x'_k .

7. Formule de Taylor-Lagrange et développements limités

Ex. 1 En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'on a

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ex. 2 Soit $f(x) = x^3 \sin(x^{-2})$. Montrer que f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 et que f n'a cependant pas de dérivée seconde en 0.

Ex. 3 Donner les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions $\sin(3x)$, $\sqrt{1-x^2}$, $\cos x - \operatorname{ch} x$, $\frac{1+2x}{1-x}$.

Ex. 4 Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\sqrt{1+x}}{\cosh x}$ en utilisant la division suivant les puissances croissantes des polynômes.

Ex. 5 Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+2x}$ et de $g(x) = x^{-1} \ln(1+2x)$, puis le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)/g(x)$ en effectuant une division suivant les puissances croissantes.

Ex. 6 a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

b. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f(x) = (1 + g(x))^{\frac{1}{3}}.$$

Ex. 7 Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction \arcsin .

Ex. 8 Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-2})^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln(1 + \frac{x}{4}) - \sqrt{4+x}}{x^2}.$$

Ex. 9 a. *Ecrire un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\ln(1+h)}{2+h}$.*

b. *Soit $f :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $]0, +\infty[$ (que l'on désigne encore par f). Montrer que f est dérivable en 1, et calculer $f(1)$ et $f'(1)$.*

Ex. 10 (Extrait de l'examen de Janvier 2003) *Soit a un réel non nul et soit*

$f :]-\frac{1}{|a|}, 0[\cup]0, \frac{1}{|a}|[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+ax)^{\frac{1}{\sin(ax)-x}}$.

1. *On suppose $a \neq 1$.*

a) *Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$, et donner la valeur de $f(0)$.*

b) *Montrer que f est dérivable en $x = 0$, et donner $f'(0)$. (On donnera un DL_1 de f en 0.)*

2. *On suppose $a = 1$.*

a) *Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$, et donner $f(0)$.*

b) *f est-elle dérivable en 0 ? Si c'est le cas, donner $f'(0)$.*

Ex. 11 *Montrer que le graphe de $f(x) = \sqrt{4+x^2} - \frac{1+x^2}{1+2x}$ a une asymptote oblique pour $x \rightarrow +\infty$, et préciser la position du graphe par rapport à l'asymptote.*

Ex. 12 (Extrait de l'examen de Janvier 2003)

Montrer que le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x\sqrt{4x^2+5}}{x+3}$ admet une asymptote lorsque $x \rightarrow +\infty$, et donner la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à l'asymptote au voisinage de l'infini.

Ex. 13 *Soit $f_a(x) = (x^3 + x^2 + ax)^{\frac{1}{3}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.*

1. *Montrer que la courbe $y = f_a(x)$ a une asymptote oblique lorsque $x \rightarrow +\infty$.*

2. *Préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote en fonction de la valeur de a . (Indication : pour la valeur critique de a , on prendra un développement limité de $(1+v)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.)*

8. Fractions rationnelles

Ex. 1 Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} de la fraction $F_1(x) = \frac{3x+i}{x^2-2ix+3}$.

Ex. 2 Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} , puis sur \mathbb{C} , de la fraction $F_2(x) = \frac{x^5+1}{x^3-1}$.

Ex. 3 Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction $F_3(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3(x+2)}$.

Ex. 4 Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction $F_4(x) = \frac{4x^4+3x^3+7x^2+4x+5}{x^5+2x^3+x}$.

Ex. 5 (Extrait de la colle de Mars 2002) Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions $F_1(x) = \frac{2x+3}{(x-2)^3(x+1)}$ et $F_2(x) = \frac{x^3-2x}{x(x+1)}$.

9. Intégrales simples

9.1 Intégrale de Riemann

Ex. 1 *Un automobiliste parcourt en 2 heures un tronçon d'autoroute de 260 km délimité par deux péages. Un agent de la circulation situé au second péage est convaincu que l'automobiliste a commis un excès de vitesse. Pourquoi a-t-il raison ?*

Ex. 2 *On pose pour tout $n \geq 1$*

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}.$$

Ecrire u_n et v_n comme des sommes de Riemann et calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Ex. 3 *Soit $u_n = n^{-2}(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}})$ pour tout $n \geq 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.*

Ex. 4 *Calculer l'aire comprise entre les courbes $y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$ et $y_2(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}$, $x \in [-1, 1]$.*

Ex. 5 *Soit $F(x) = \int_0^x \frac{du}{2 + \cos u}$. Montrer que la fonction F est définie et dérivable sur \mathbb{R} et impaire. Calculer $F(x)$ dans $] -\pi, \pi[$ à l'aide du changement de variables $t = \tan \frac{u}{2}$. En déduire la valeur de $F(\pi)$ et celle de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{du}{2 + \cos u}$.*

Ex. 6 * 1. *Montrer que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$*

$$\sum_{k=1}^N e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i(N+1)x/2} \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

2. On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$S_N(y) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin(ky)}{k}.$$

Comme la fonction S_N est impaire et 2π -périodique, on se restreint à l'intervalle d'étude $[0, \pi]$, donc dans ce qui suit $y \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\begin{aligned} S_N(y) &= \int_0^y \cos((N+1)x/2) \frac{\sin(Nx/2)}{\sin x/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^y \sin(Nx) \cotg(x/2) dx - \frac{1}{2} \int_0^y (1 - \cos(Nx)) dx. \end{aligned}$$

(Indication : on utilisera le fait que $\sin(ky)/k = \int_0^y \cos(kx) dx$.)

3. Lemme de Riemann-Lebesgue :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx = 0.$$

(Indication : intégrer par parties.)

4. Remarquant que $S_N(\pi) = 0$ et utilisant la question 3, montrer que pour tout $y \in]0, \pi[$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(y) = \frac{\pi - y}{2}.$$

5. Calculer $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(y)$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{y > 0} S_N(y)$.

Ex. 7 * INTÉGRALES DE WALLIS ET FORMULE DE STIRLING

Le but de cet exercice est de donner un équivalent simple de $n!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [n, n+1]$

$$\ln n + (x - n) \ln \frac{n+1}{n} \leq \ln x \leq \ln n + \frac{1}{n}(x - n). \quad (*)$$

En déduire que

$$\frac{2}{2n+1} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

2. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \ln n! - n.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{4n(n+1)}.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Prouver qu'il existe un nombre $C > 0$ tel que

$$n! \sim C e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

4. Cette question a pour but de déterminer la valeur de la constante C . On introduit la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ des intégrales de Wallis

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

a) Montrer que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculer I_0 et I_1 et montrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Montrer que pour tout $m \geq 1$

$$I_{2m} = \frac{\pi}{2} v_m \quad \text{et} \quad I_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \frac{1}{v_m}.$$

c) Prouver que

$$v_m \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \text{lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

d) Etablir la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

(Indications: Remarquer que $v_m = (2m!)/(2^m m!)^2$ et utiliser la question 3.)

5. Montrer que pour tout $\lambda > 1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$n^p = o(\lambda^n) \quad \text{et} \quad \lambda^n = o(n!).$$

9.2 Calcul de primitives et d'intégrales

Ex. 1 Calculer $I = \int_2^3 x\sqrt{1+x^4} dx$.

Ex. 2 (Extrait de la colle de Mars 2004)

Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, $I_2 = \int_0^1 (x^2+2)^{-2} dx$,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}. \quad \text{On rappelle que } \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Ex. 3 Calculer les primitives suivantes (en précisant leurs domaines)

$\int \ln(x + x^{-1}) dx$ et $\int \arcsin(x) dx$.

Ex. 4 (Extrait de la colle de Mars 2004)

Donner les primitives de $\frac{1}{x(\ln x)^3}$, $e^x(x-x^2)$, $\frac{x-2}{x^2+x-2}$, $\frac{\ln x}{x^{\frac{5}{2}}}$.

Ex. 5 (Extrait de l'examen de Septembre 2004)

Donner les primitives de $x e^{x^2}$, $\ln x$, $\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)}$, $\sqrt{x} \ln x$, $e^{2x} \cos(3x)$, $\frac{1+\sin x}{\sin x \cos x}$.

Ex. 6 Donner les primitives de $\tan x$, $\arctan x$, $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $\frac{x^4-2x+1}{1-x^3}$, $x^2 e^x$,

$\frac{1}{\sin x}$, $\cos^2 x \sin^3 x$.

Ex. 7 Donner les primitives de $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, $\frac{\ln x}{x^2}$, $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$, $\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2}$, $\frac{\cosh x}{1 - \sinh x}$.

Ex. 8 Soit $a > 0$. Donner les primitives de $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$,
 $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Ex. 9 Donner les primitives de $\frac{2x + \sqrt{x-1}}{1 + \sqrt{x-1}}$ et de $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

10. Equations différentielles

Ex. 1 Calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{2x}{1+x^2}y - 1.$$

Ex. 2 Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x^4 y' + 3x^3 y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Ex. 3 (Extrait de l'examen de Septembre 2002)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + \frac{y}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x}.$$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Soit y_1 la solution de (E) qui vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) = 1$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_1(x)$.

Ex. 4 (Extrait de l'examen de Septembre 2003)

On considère l'équation différentielle

$$(H) \quad y'(x)y^2(x)x^3 = -1.$$

1. Trouver la solution générale de (H).
2. Déterminer la solution de (H) vérifiant $y(1) = 1$, en précisant son intervalle maximal de définition I . (Attention : la dérivée doit exister et vérifier (H) en tout point de I .) Dessiner le graphe de cette solution.

Ex. 5¹ (Extrait de la colle de Mai 2003)

La croissance d'un arbre dans une forêt suit la loi de Lunqvist Matérn :

$$\frac{dH}{dt} = C \frac{H}{K} \left(\ln \left(\frac{K}{H} \right) \right)^{1 + \frac{1}{\alpha}},$$

où C, K et α sont des constantes strictement positives. Intégrer cette équation, en exprimant $H(t)$ en fonction de $H(0)$ et de t . (Indication : poser $u(t) = \ln(K/H(t))$, et intégrer l'équation différentielle à variables séparables satisfaite par u .) Que vaut $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t)$?

¹d'après P. Vallet

Ex. 6 (Extrait de l'examen de Juin 2004)
Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = x \sin x.$$

Ex. 7 Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x + 1.$$

Ex. 8 Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Ex. 9 CIRCUIT RLC EN RÉGIME FORCÉ

On considère un circuit RLC, constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance R , d'un condensateur de capacité C et d'un générateur délivrant une tension $u(t) = A \cos \omega t$. L'équation différentielle satisfaite par la charge $q(t)$ du condensateur est

$$(E) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = A \cos \omega t.$$

1. On suppose $A = 0$. Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$(H) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Montrer qu'elle tend vers 0 exponentiellement vite. Dans quel cas est-elle oscillante ?

2. Prouver qu'il existe une solution particulière de (E) périodique, de pulsation ω , puis donner la solution générale de (E). Interpréter le résultat obtenu.

Ex. 10 Si on désigne par y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = 0$$

on définit le wronskien W de y_1 et y_2 par

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

1. Montrer que W vérifie

$$W' + bW = 0.$$

En déduire l'expression de la fonction W .

2. Que peut-on dire de la fonction W s'il existe un réel x_0 tel que $W(x_0) \neq 0$?

Ex. 11 MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES

Soit l'équation

$$(E) \quad a y'' + b y' + c y = f(x),$$

avec $a \neq 0$. Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions de l'équation homogène associée. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_0(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions de x à déterminer.

1. On suppose que C_1' et C_2' (les dérivées de C_1, C_2 par rapport à x) vérifient le système

$$(S) \quad \begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{1}{a} f(x). \end{cases}$$

Montrer que y_0 est alors solution de (E).

2. Quelle conditions doit-on imposer à y_1 et y_2 pour déterminer C_1' et C_2' ? (Utiliser l'exercice 10.)

3. Application : résoudre l'exercice 8 en utilisant cette méthode.

Ex. 12 EQUATION DE SCHRÖDINGER 1-D

1. Soient $E > 0$, $m > 0$. Quelle est la solution générale de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y'' - E y = 0,$$

où $\hbar > 0$ est la constante réduite ?

2. On considère une particule d'énergie $E > 0$, de masse $m > 0$ enfermée dans une boîte de longueur $a > 0$. Sa fonction d'onde y , supposée non nulle, vérifie alors l'équation de Schrödinger et les conditions aux limites

$$y(0) = y(a), \quad y'(0) = y'(a).$$

Pour quelles valeurs de l'énergie est-ce possible ?

11. Fonctions de plusieurs variables

11.1 Topologie générale - limites

Ex. 1 \mathbb{R}^2 est muni de la norme euclidienne usuelle. Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ? fermées ?

$A_1 =]1, 2[\times]-\infty, 3[$; $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 x_2 \leq 3\}$;

$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 < 4\}$; $A_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 \geq x_1^2\}$.

Ex. 2 \mathbb{R} est muni de la norme euclidienne usuelle (i.e. la valeur absolue).

1. Soient les ouverts

$$O_n =]-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}[, \quad O'_n =]0, \frac{n+1}{n}[, \quad n \geq 1.$$

Déterminer explicitement les ensembles $O = \bigcap_{n \geq 1} O_n$, $O' = \bigcap_{n \geq 1} O'_n$. Sont-ils ouverts ? fermés ?

2. Soient les fermés

$$F_n = [-\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}] , \quad F'_n = [0, \frac{n-1}{n}] , \quad n \geq 1.$$

Les ensembles $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$, $F' = \bigcup_{n \geq 1} F'_n$ sont-ils ouverts ? fermés ?

Ex. 3 Ecrire la définition de $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow x_0$, et de $f(x) \rightarrow a$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$

Ex. 4 Etudier la limite en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. Faire de même avec

$(x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ et avec $(x, y) \mapsto y \sin(\frac{1}{x^2 + y^2})$.

Ex. 5 Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\alpha(x, y) = \frac{|x^2 - y^2|^\alpha}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Pour quelle valeur de α $f_\alpha(x, y) \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

Ex. 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(tx, ty) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. Montrer que f n'est pas bornée au voisinage de $(0, 0)$. La fonction f a-t-elle une limite lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

11.2 Compacité

Ex. 1 * Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est minorée et que f atteint sa borne inférieure.
(Indication : minorer f sur une boule fermée centrée en 0 et de rayon convenable.)

Ex. 2 * THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS

On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 par l'application $z = x + iy \mapsto (x, y)$. Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ un polynôme non constant à coefficients complexes ($a_n \neq 0$ et $n \geq 1$). On veut montrer qu'il existe des nombres complexes z_1, \dots, z_n tels que $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.

1. Montrer que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, et en déduire que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est minorée et atteint sa borne inférieure sur \mathbb{C} . (Indication : utiliser le résultat de l'exercice 1). Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_1)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.
2. Montrer que l'on peut écrire

$$P(z) = P(z_1) + b_k(z - z_1)^k + b_{k+1}(z - z_1)^{k+1} + \dots + b_n(z - z_1)^n,$$

avec $b_k \neq 0$ et $k \geq 1$.

3. On veut montrer que $P(z_1) = 0$. On suppose que $P(z_1) \neq 0$.

a) Ecrivant

$$P(z_1) = \rho e^{i\theta}, \quad b_k = \rho' e^{i\theta'}$$

et choisissant $z = z_1 + \alpha e^{i\frac{\theta - \theta' + \pi}{k}}$ où α est un réel, montrer que

$$P(z) = \rho e^{i\theta} - \alpha^k \rho' e^{i\theta} (1 + O(\alpha))$$

b) Montrer que $|P(z)| < |P(z_1)|$ si $\alpha > 0$ est assez petit. Conclure.

4. Montrer que $P(z) = (z - z_1)Q_1(z)$, où Q est un polynôme à coefficients complexes de degré $n - 1$. Conclure.

11.3 Dérivées Partielles

Ex. 1 Représenter l'ensemble de définition et calculer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ pour les fonctions

$$u(x, y) = \arctan(xy); \quad u(x, y) = \arctan \frac{x}{y}; \quad u(x, y) = \exp \frac{x}{y} + \exp \frac{y}{x};$$

$$u(x, y) = x^2 \sin y; \quad u(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad u(x, y) = \ln(x + y).$$

Ex. 2 Soient deux fonctions f et g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe C^1 . On cherche les solutions $u = u(x, y)$ du système d'équations aux dérivées partielles

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y). \end{cases}$$

1. On suppose que (S) a une solution u . Comparer $\frac{\partial f}{\partial y}$ à $\frac{\partial g}{\partial x}$.
2. Résoudre (S) dans chacun des cas suivants:
 - a) $f(x, y) = 2xy + y^3$ et $g(x, y) = x^2 + 3y^2x$;
 - b) $f(x, y) = -\sin x \sin y$ et $g(x, y) = -\cos x \cos y$;
 - c) $f(x, y) = -y$ et $g(x, y) = x$;
 - d) $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2xy^4$ et $g(x, y) = 2x^4y + 4x^2y^3 + \cos y$.

Ex. 3 FONCTIONS HOMOGÈNES

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré $k > 0$ si $f(tx) = t^k f(x)$ pour tous $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Donner des exemples de fonctions homogènes de degré 1, 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. Montrer que si f est homogène de degré k , alors f vérifie l'identité d'Euler:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(Indication : dériver par rapport à t dans $f(tx) = t^k f(x)$.)

2. Montrer que la réciproque est vraie. (Indication : dériver la fonction $g(t) = f(tx)$, et résoudre l'équation différentielle satisfaite par g .)

Ex. 4 Le laplacien Δu d'une fonction $u = u(x, y)$ est

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires. (On fera le changement de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on écrira $u(x, y) = v(r, \theta)$, et on montrera que $\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$.)

Ex. 5 Résoudre les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) suivantes :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$;
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$;
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x + y)$.

Ex. 6 Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soient (r, θ) les coordonnées polaires.

1. Exprimer x, y en fonction de r et θ , et r, θ en fonction de x et y . Soit D le domaine décrit par (r, θ) lorsque (x, y) décrit U . Déterminer D .

2. Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(x, y)$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en

fonction de r, θ , $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

3. Déterminer les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'EDP:
 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1$.

Ex. 7 Résoudre les EDP suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

1. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ($s = x + y, t = x - y$);
2. $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = x$ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$);
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (équation des cordes vibrantes) ($y = x + ct, z = x - ct$).

Ex. 8 On définit le laplacien d'une fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Soit u une fonction radiale (i.e. il existe une fonction h telle que $u(x) = h(\|x\|)$ pour tout x , où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$).

1. Montrer que

$$\Delta u(x) = h''(r) + \frac{n-1}{r}h'(r), \text{ où } r = \|x\|.$$

2. Trouver les solutions radiales de l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0$$

sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puis sur \mathbb{R}^n . (Indication : intégrer l'équation différentielle satisfaite par h . Noter que la solution dépend de la valeur de n .)

11.4 Extrema

Ex. 1 *Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :*

a) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$;

b) $g(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$;

c) $h(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Ex. 2 *Soit $\Omega =]0, +\infty[^2$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f au point $(1, 1)$.

Ex. 3 *Pour chacune des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 :*

$$f_1(x, y) = x^2 - y^3,$$

$$f_2(x, y) = x + y + x^2 - xy + y^2 + 1,$$

$$f_3(x, y) = 3x - x^2 + xy - 2y^2,$$

$$f_4(x, y) = 8x^3 - 2y^3 + 6yx^2 - 3x^2,$$

1. *Déterminer les points critiques ;*
2. *Calculer la matrice hessienne en ces points critiques ;*
3. *Etudier la nature des points critiques (extrema locaux stricts, extrema globaux,...)*

Ex. 4 *(Extrait de la colle de Mai 2004)*

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \operatorname{Arctg}(xy)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que f est minorée et que f atteint sa borne inférieure.*
2. *Déterminer les points critiques de f , et donner leur nature (minimum ou maximum local, global, etc.). Donner la valeur minimale de f sur \mathbb{R}^2 .*

Ex. 5 *(Extrait de l'examen de Janvier 2003)*

Soient $m \in \mathbb{R}$ un paramètre et f la fonction $f(x, y) = mx^2 + y^2 - 4xy$.

1. *Déterminer les points critiques de f suivant les valeurs du paramètre m .*
2. *Déterminer les extrema de f suivant les valeurs du paramètre m .*

Ex. 6 On considère la famille de fonctions $f_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_m(x, y) = x^2 + m y^2 - (x^2 + y^2)^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

où m est un paramètre. Déterminer les points critiques de f_m et dire s'ils correspondent à des extrema.

Ex. 7 * On veut étudier le mouvement d'un pendule pesant sans friction. Soit m la masse du pendule (supposé concentré en un point), l la longueur de la tige (de masse négligeable), g l'accélération de la pesanteur et θ l'angle entre la verticale inférieure et la tige.

1. Rappeller l'équation fondamentale de la dynamique et l'expression de l'énergie totale. Montrer que l'énergie totale est constante par rapport au temps au cours du mouvement du pendule.
2. Etudier les extrema de l'énergie totale, vue comme une fonction de $(\theta, \dot{\theta})$.
3. Dessiner quelques courbes de niveau de l'énergie totale et décrire le mouvement du pendule au voisinage d'un équilibre.

Ex. 8 EXTREMA LIÉS

Soit $C = \{M(t), t \in [0, T]\}$ une courbe fermée de \mathbb{R}^2 de classe C^1 . On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées de $M(t)$, et $V(t) = (x'(t), y'(t))$ le vecteur vitesse, supposé jamais nul.

1. Donner l'expression d'un vecteur normal $n(t)$ à C en $M(t)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur C . Soit $M(\bar{t})$ un point extrémal pour $f|_C$. Montrer qu'il existe un nombre λ (appelé multiplicateur de Lagrange) tel que

$$\text{grad } f(M(\bar{t})) = \lambda n(\bar{t}).$$

3. Application : trouver géométriquement les extrema de $f(x, y) = x + 2y - 1$ sur le cercle unité. Retrouver analytiquement le résultat en étudiant les variations de $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$.

12. Algèbre linéaire

12.1 Matrices - Systèmes linéaires

Ex. 1 On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + B$, $(A + B)^2$, A^2 , B^2 , AB et BA . En déduire que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Ex. 2 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer, dès que cela est possible, $A + B$, AB et BA .

Ex. 3 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x - 2y + z - 4t = 1 \\ x + 3y + 7z + 2t = 2 \\ x - 12y - 11z - 16t = 5 \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 2x - y + z - t = 1 \end{cases}$$

Ex. 4 Résoudre les systèmes suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(S_7) \begin{cases} \alpha x + y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x - \alpha y + z = 2\alpha \\ \alpha x - \alpha y + \alpha z = 1 + \alpha \end{cases} \quad (S_8) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + (1 + \alpha)z = 1 \\ x + y - \alpha^2 z = \alpha^3 \end{cases}$$

$$(S_9) \begin{cases} 2\alpha x + (\alpha - 1)y + (5 - \alpha)z = 0 \\ (\alpha - 1)x + 2\alpha y + (7 + \alpha)z = 0 \end{cases}$$

Ex. 5 Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + y + 3z + t = a \\ 4x + 3y + 7z + t = b \\ x + 2y + 3z - t = 6 - a \\ 3x - 2y + z + 5t = 2 - 7b \end{cases}$$

en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b .

Ex. 6 MATRICES PAR BLOCS

Soit M une matrice complexe carrée d'ordre n et soit $p \in \{1, \dots, n - 1\}$. La matrice M peut se décomposer en blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p, p}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$.

1. Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on décompose en blocs comme M :

$$M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

Quelle est la décomposition en blocs de $M + M'$ et de MM' ?

2. On suppose que $C = 0$. Montrer que M est inversible si, et seulement si A et D le sont, et que dans ces conditions

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. Calculer l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})$ d'ordre n est triangulaire supérieure. Montrer que M est inversible si, et seulement si, $m_{ii} \neq 0$ pour tout i . (Indication: faire une récurrence sur n et utiliser la question 2.) Montrer que si la matrice (triangulaire supérieure) M est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.

Ex. 7 Inverser les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex. 8 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dépendant du paramètre a .

Calculer M^{-1} en fonction de a lorsque cette matrice existe.

Ex. 9 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dite à diagonale strictement dominante (sur les lignes) si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que s'il existe $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$, alors A n'est pas à diagonale strictement dominante.

2. En déduire qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

3. Soit $\alpha > 0$ et $A = (a_{ij})$ la matrice (tridiagonale) définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

Donner un ensemble de valeurs de α pour lequel la matrice A est inversible.

12.2 Déterminants

Ex. 1 Calculer $\sigma_2 \circ \sigma_1$, où $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Que vaut $\varepsilon(\sigma_2 \circ \sigma_1)$?

Ex. 2 Calculer les déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ex. 3 Déterminer les racines du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & x+4 & -2 & -5 \\ -1 & -6 & x & 5 \\ -2 & -6 & 2 & x+3 \end{vmatrix}$$

en faisant apparaître la factorisation de P au cours du développement du déterminant.

Ex. 4 DÉTERMINANT DE VANDERMONDE

Soient a_1, a_2, \dots, a_n des nombres complexes. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Soit P un polynôme unitaire de degré $n - 1$. Montrer que

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(a_1) & P(a_2) & \dots & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

2. Choissant $P(x) = (x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdots (x-a_{n-1})$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} , puis donner la valeur de D_n . A quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Ex. 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par $M_n = (m_{ij})$, avec

$$m_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

On pose $D_n = \det M_n$.

1. Montrer que $D_1 = a$, $D_2 = a^2 - 1$ et que $D_n = a D_{n-1} - D_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
2. On rappelle que toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence double

$$u_n + b u_{n-1} + c u_{n-2} = 0$$

s'écrit sous la forme

- $u_n = \lambda_1 (r_1)^n + \lambda_2 (r_2)^n$ si $b^2 - 4c \neq 0$, où r_1, r_2 sont les racines (complexes ou réelles) du polynôme $x^2 + bx + c$;
- $u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$ si $b^2 - 4c = 0$, où r est la racine double du polynôme $x^2 + bx + c$.

On pose $\Delta = a^2 - 4$.

- a. On suppose que $\Delta = 0$. Montrer que $D_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n (n+1)$.
- b. On suppose que $\Delta \neq 0$. Ecrivant

$$r_1 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} \quad r_2 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2}$$

où $\sqrt{\Delta}$ désigne une racine carrée (réelle ou complexe) de Δ , montrer que

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = r_1^n + r_1^{n-1} r_2 + \dots + r_1 r_2^{n-1} + r_2^n.$$

- c. Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice M est inversible.

12.3 Espaces Vectoriels

Ex. 1 Dessiner les parties suivantes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , et dire si ce sont des sous-espaces vectoriels.

a) $E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0\}$

b) $E_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}$

c) $E_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - 7x_2 = a\}$, où a est un paramètre

d) $E_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 x_2 = 0\}$

Ex. 2 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Les parties de E qui suivent sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

a) $F_1 = \{f \in E, f(1) = 0\}$

b) $F_2 = \{f \in E, f(0) = 1\}$

c) $F_3 = \{f \in E, 3f(0) - 2f(1) + f(5) = 0\}$

d) $F_4 = \{f \in E, f \text{ est dérivable et vérifie } f' + af = 0\}$, où a est un réel fixé

e) $F_5 = \{f \in E, f \text{ est croissante}\}$

f) $F_6 = \{f \in E, f \text{ est intégrable au sens de Riemann sur } [0,1] \text{ et } \int_0^1 f(x) dx = 0\}$

g) $F_7 = \{x \mapsto \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

Ex. 3 On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) réelles d'ordre n .

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En remarquant que toute matrice M peut s'écrire sous la forme

$$M = \frac{1}{2}({}^tM + M) + \frac{1}{2}(M - {}^tM),$$

montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et donner une base pour chacun d'entre eux.

Ex. 4 ² CARRÉS MAGIQUES

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $M = (m_{ij})$. On appelle trace de M , et on note $\text{tr } M$, le nombre

$$\text{tr } M = m_{11} + m_{22} + m_{33}.$$

²©2002 Frédéric LE ROUX (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

On dit que M est une matrice magique si

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} = \text{tr } M = m_{13} + m_{22} + m_{31}.$$

Si de plus $m_{ij} \in \mathbb{N}^*$ pour tous i, j , M est appelée un carré magique. On note E l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que toute matrice magique peut s'écrire comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.
2. Déterminer toutes les matrices magiques antisymétriques.
3. Déterminer toutes les matrices magiques symétriques de trace nulle, puis toutes les matrices magiques symétriques.
4. Donner la forme générale d'une matrice magique et une base de E . Décomposer dans cette base le carré magique habituel

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donner la forme générale d'un carré magique.

Ex. 5 Soient a, b, c trois vecteurs d'un espace vectoriel E sur \mathbb{R} . Montrer que

1. $\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(a, b)$ ssi c est combinaison linéaire de a et b
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(a, b + \lambda a)$;
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(\lambda a, b)$;
4. Application : Dans $E = \mathbb{R}^3$ vérifier que

$$\text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1)) = \text{Vect}((2, 1, 0), (0, 1, 2)).$$

Ex. 6 Trouver un système d'équations cartésiennes de F dans les cas suivants :

- a) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((2, 1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1))$
- b) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1, 2, 0, 1), (2, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 2))$

Ex. 7 (Inverse de l'exercice précédent) Trouver une partie génératrice du sous-espace F dans chacun des cas suivants:

1. $E = \mathbb{R}^2$ et F admet comme équation cartésienne $x + 2y = 0$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et F admet comme système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

3. $E = \mathbb{R}^4$ et F admet comme système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ -x + 2y + 3t = 0 \end{cases}$$

Ex. 8 Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère la famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, où

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 0, 1) \\ v_2 &= (4, 4, 1, 2) \\ v_3 &= (2, 0, 1, 0) \\ v_4 &= (5, 0, \frac{5}{2}, 0) \end{aligned}$$

1. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$. Extraire de \mathcal{F} une famille libre \mathcal{F}' maximale.
2. Compléter \mathcal{F}' en une base de \mathbb{R}^4 en prenant des vecteurs de la base canonique.
3. Déterminer un supplémentaire de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Ex. 9 Montrer, dans chacun des cas suivants, que les sous-espaces F et G de E sont supplémentaires :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E, x + y = 0\}$, $G = \{(x, y) \in E, x - y = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in E, x + y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in E, x = y = z\}$
3. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1, -1, 1, 0), (1, 2, 0, -1))$ et G admet comme système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Ex. 10 1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{C}^3 , où

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (1, i, 2), \quad u_3 = (-i, 1, 1).$$

2. Calculer les composantes dans cette base de $u = (1 + i, 1, -2i)$.

Ex. 11 (Extrait de la colle de Mai 2003)

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Déterminer $\dim(V)$, une base de V et un système d'équations cartésiennes de V . Soit W l'ensemble défini par les équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ y - z + t = 0. \end{cases}$$

Déterminer $\dim(V + W)$ et $\dim(V \cap W)$.

Ex. 12 Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs

$$\begin{aligned} u &= (1, -1, 2, -2) \\ v &= (4, 0, 1, -5) \\ w &= (3, 1, -1, -3). \end{aligned}$$

Soit $G = \text{Vect}(u, v, w)$ et soit

$$H = \{(x, y, z, t), x = y = x - y + z + 2t = 0\}.$$

1. Donner des équations paramétriques de G et H , ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de G .
2. Quelles sont les dimensions de G , H , $G + H$, $G \cap H$?
3. Trouver un supplémentaire F de $G + H$ dans \mathbb{R}^4 .

Ex. 13 * (Extrait de l'examen de Juin 2003) Soient U , V et W trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur \mathbb{K} . On suppose que $V \subset W$, $U \cap V = U \cap W$ et $U + V = U + W$. Montrer que $V = W$.

12.4 Applications linéaires

Ex. 1 Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

fait correspondre la vecteur $Y = f(X) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -3x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

2. Ecrire la matrice A représentant f dans cette base.

3. Calculer les images par f des vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 2 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $x - 2y - z = 0$ et D la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

1. Donner une base $\{f_1, f_2\}$ de P et une base $\{f_3\}$ de D .

2. Donner la matrice M (resp., M') de la projection sur P parallèlement à D dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 (resp. dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$).

Ex. 3 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2, et soit $u : E \rightarrow E$ l'application définie par $u(P) = P'$ (u est l'opérateur de dérivation). Vérifier que u est un endomorphisme de E , et donner sa matrice dans la base canonique $\{1, x, x^2\}$.

2. Même question lorsque E est cette fois l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions \cos et \sin et que la base est la base naturelle $\{\cos, \sin\}$.

Ex. 4 Soient

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (1, i, 2), \quad u_3 = (-i, 1, 1).$$

On rappelle (cf. Ex. 10, Chapitre 12.3) que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{C}^3 .

1. Donner l'expression de la matrice de passage P de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3) de \mathbb{C}^3 . Si X (resp., X') désigne le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur u de \mathbb{C}^3 dans la base canonique (resp., dans la base (u_1, u_2, u_3)), exprimer X' en fonction de X et de P .

2. Calculer P^{-1} et retrouver la valeur de X' pour $u = (1 + i, 1, -2i)$.

Ex. 5 ³ 1. On considère le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + z + t & = a \\ x - y - z - t & = b \\ -x - y + t & = c \\ -3x + y - 3z - 7t & = d \end{cases}$$

- A quelle condition (S) admet-il une solution ?
- Montrer que si $a, b, c, d > 0$ alors (S) n'a pas de solution.
- Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

définie par $f(X) = AX$.

- Calculer $f(X)$. Montrer que f est linéaire.
- Quelle est sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 ?
- f est-elle surjective? injective? Trouver l'image et le noyau de f .
- f est-elle inversible ?

e. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ? au noyau de f ?

3. a. Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace vectoriel engendré par

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} ?$$

b. Ces 4 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Ex. 6 Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2z = 0, y + 3z = 0, 2x - y - 7z =$

³©2001 Vincent GUIARDEL (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

$0, -x + 2y + 8z = 0, x + y + z = 0\}$. On introduit la matrice

$$M = (C_1 C_2 C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire u de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^5 définie par $u(X) = MX$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Quel est le lien entre $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$, $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ et V ? Exprimer la dimension de V en fonction du rang de M .
2. Calculer le rang de M et la dimension de V .

Ex. 7 Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $u : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire. Soit F un supplémentaire de $\text{ker } u$ dans E_1 . Montrer que la restriction de u à F est un isomorphisme de F sur $\text{Im } u$.

Ex. 8 * ⁴ SOMMES DE PUISSANCES D'ENTIERS

On sait que la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$. On veut généraliser ce résultat en trouvant une formule du type

$$(F_r) \quad \sum_{k=1}^n k^r = Q_r(n),$$

où Q_r est un polynôme à déterminer. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{r+1}[x]$ tel que

$$P(x+1) - P(x) = x^r.$$

Donner alors un polynôme Q_r vérifiant (F_r) .

2. Soit $u : \mathbb{R}_{r+1}[x] \rightarrow \mathbb{R}_r[x]$ l'application définie par $u(P) = P(x+1) - P(x)$.
 - a) Vérifier que u est bien définie et linéaire.
 - b) Déterminer le noyau et l'image de u . Conclure.
 - c) Que dire de la restriction de u au sous-espace $F = \text{Vect}(x, x^2, \dots, x^{r+1})$?
3. Expliquer comment trouver Q_r en général. Faire les calculs pour $r = 2$ et $r = 3$.

⁴©2001 Frédéric LE ROUX (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

Ex. 9 * POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

Soient x_1, x_2, \dots, x_{n+1} des réels deux à deux distincts, et soient y_1, y_2, \dots, y_{n+1} des réels quelconques. On cherche un polynôme P dont le graphe passe par les points (x_i, y_i) . Soit $u : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par

$$u(P) = (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{n+1})).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que u est injective, puis que u est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ sur \mathbb{R}^{n+1} . Que peut-on en déduire ?
3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, on pose

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Déterminer $u(L_i)$.

4. Donner l'expression de $u^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$.

Ex. 10 Déterminer le polynôme de Lagrange P , de degré au plus 3, qui vérifie $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 0$.

Ex. 11 * POLYNÔMES INTERPOLATEURS D'HERMITE (*Extrait de l'examen de Septembre 2003*)

1. (**Question préliminaire**) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ (i.e., P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus n) et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $P(x_0) = P'(x_0) = 0$. Montrer que l'on peut écrire $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$, avec $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$.
2. Soient $[a, b]$ un segment et $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. On considère l'application $u : \mathbb{R}_{2n-1}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ définie par

$$u(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)).$$

- a) Montrer que u est linéaire.
- b) Montrer que $\text{Ker } u = \{0\}$. (Indications : appliquer la question 1) et faire une récurrence).
- c) Montrer que pour tous $(y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ tel que

$$\begin{aligned} P(x_i) &= y_i & \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ P'(x_i) &= z_i & \text{pour } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ex. 12 * Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), et soit p un endomorphisme de E . On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires, et soit p la projection sur G parallèlement à F . Montrer que p est un projecteur.

2. Inversement, soit p un projecteur de E . On pose $F = \ker p$ et $G = \text{Im } p$.

a. Montrer que F et G sont supplémentaires.

b. Montrer que p est la projection sur G parallèlement à F .

12.5 Réduction des endomorphismes

Ex. 1 1. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

3. Soit v un vecteur de \mathbb{R}^3 de composantes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{E} et

de composantes $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{U} . Exprimer Y en fonction de X .

4. Soit f l'application linéaire $(x, y, z) \mapsto (2y, 5x+3z, -4x-2y-4z)$. Donner la matrice de f dans la base \mathcal{U} .

Ex. 2 Soit le système récurrent suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n - 3z_n, \\ y_{n+1} = y_n - z_n, \\ z_{n+1} = z_n. \end{cases}$$

1) Ecrire ce système sous forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$, avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

2) Soit la matrice $J = A - I_3$. Calculer J^2 et J^3 . En déduire A^n . (On rappelle que la formule du binôme de Newton peut être appliquée pour calculer $(M + N)^n$ lorsque M et N sont deux matrices carrées qui commutent.)

3) Exprimer U_n en fonction de U_0 .

Ex. 3 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés pour les matrices suivantes, et dire si elles sont diagonalisables.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ -9 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. 4 (Extrait de l'examen de Juin 2004)

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 10 \\ 6 & -3 & 6 \\ -12 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

(On donnera la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres, et la matrice diagonale correspondante.)

Ex. 5 Diagonaliser chacune des matrices suivantes. (On donnera la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres, et la matrice diagonale correspondante.)

$$M_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des paramètres réels.}$$

Ex. 6 Calculer la puissance n -ème de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ex. 7 Calculer en fonction de n les nombres u_n et v_n définis pour $n \geq 1$ par

$$\begin{cases} u_n &= u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n &= -5u_{n-1} - 3v_{n-1} \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 donnés.

Ex. 8 * COMMUTATEURS (Extrait de l'examen de Juin 2003) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On choisit pour tout i une base $\{f_i\}$ du sous-espace propre $E(\lambda_i)$ associé à la valeur propre λ_i . On rappelle que (f_1, \dots, f_n) est une base de \mathbb{C}^n , constituée de vecteurs propres de A . On veut étudier l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, définie par $u(M) = AM - MA$. ($AM - MA$ est appelé un commutateur.)

1. Soit $M \in \text{Ker } u$.

a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $AMf_i = \lambda_i Mf_i$, et en déduire qu'il existe un scalaire $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $Mf_i = \mu_i f_i$.

b) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, \dots, f_n) , et soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Exprimer A et M en fonction de P , D et D' .

c) En déduire une caractérisation de $\text{Ker } u$.

2. Remarquante que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même, déterminer la dimension de $\text{Ker } u$, puis celle de $\text{Im } u$.

3. Pour tout polynôme $q \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$, $q(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_{n-1}X^{n-1}$, on note $q(A)$ la matrice

$$q(A) = c_0I_n + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_{n-1}A^{n-1}.$$

Montrer que $\text{Ker } u = \{q(A); q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$. (Indication : utiliser la question 1 c) et les polynômes interpolateurs de Lagrange.)

4. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note E_{ij} la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui qui est situé à la ligne i et à la colonne j et qui vaut 1, et on pose $F_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$. Montrer que $F_{ij} \in \text{Im } u$ si $i \neq j$. Donner une base de $\text{Im } u$.

Ex. 9 * ISOMÉTRIE POSITIVE (*Extrait de l'examen de Juin 2004*)

Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on note $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ sa norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^3 . On appelle isométrie de \mathbb{R}^3 toute application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. On se propose de prouver que u est une rotation si et seulement si u est une isométrie de déterminant égal à 1.

1. Soit u la rotation d'angle θ et d'axe Δ dirigé par le vecteur unitaire f_1 . Soient f_2 et f_3 deux vecteurs tels que (f_1, f_2, f_3) soit une base orthonormée directe.

a) Rappeler l'expression de la matrice M représentant u dans (f_1, f_2, f_3) , et calculer la trace de M .

b) En déduire que u est une isométrie de déterminant égal à 1.

c) Montrer que M est diagonalisable sur \mathbb{C} . Donner une matrice diagonale D semblable à M .

2. Inversement soit u une isométrie de déterminant égal à 1, et M sa matrice dans la base canonique. On suppose que M est diagonalisable sur \mathbb{C} .

a) Montrer que toute valeur propre (complexe) de M est de module égal à 1, puis que M est semblable à une matrice $D = \text{diag}(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'on peut trouver une base orthonormée directe (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 telle que $Mf_1 = f_1$, $M(f_2 + if_3) = e^{-i\theta}(f_2 + if_3)$. Quelle est la matrice de u dans cette base ? Conclure.

3. Montrer que la composition de deux rotations est une rotation (on admettra que toute isométrie est diagonalisable sur \mathbb{C}).

13. Intégrales doubles

Ex. 1 Calculer $\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Ex. 2 Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx \right) dy$, où a et b sont deux réels distincts, strictement positifs et différents de 1.

Ex. 3 Des deux intégrales suivantes, laquelle est la plus facile à calculer ? Effectuer ce calcul.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx.$$

Ex. 4 Calculer $\int_0^z \left(\int_0^y \left(\int_0^x 1 dt \right) dx \right) dy$, puis déterminer par récurrence

$$\int_0^{x_n} \left(\int_0^{x_{n-1}} \left(\dots \int_0^{x_1} 1 dx_0 \right) dx_1 \dots \right) dx_{n-1}.$$

Ex. 5 Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dx \right) dy$ et

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \right) dx. \quad \text{L'égalité était-elle prévisible ?}$$

Ex. 6 Calculer $I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} \exp \frac{y}{x} dx dy$, où $0 < \varepsilon < 1$ et

$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x, y \geq 0 \text{ et } \varepsilon \leq x \leq 1\}$. Que vaut $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon$?

Ex. 7 Calculer $\iint_D (1-x-y) dx dy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y+x \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}.$$

Ex. 8 Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\iint_D \frac{y^3}{x^2+y^2} dx dy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq x\}.$$

Ex. 9 Calculer l'aire du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 2 - x^2 \text{ et } y \geq x\}.$$

Ex. 10 Calculer l'aire du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, 2\sqrt{3}x^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Ex. 11 Soit D le domaine défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq \sqrt{3}, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}.$$

Calculer directement, puis en utilisant les coordonnées polaires, l'intégrale double $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

Ex. 12 Calculer $\iint_D (y - x) dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x - 3 \leq y \leq x + 1, -2x + 1 \leq y \leq -2x + 7\}$, en faisant le changement de variables $u = y - x, v = y + 2x$.

Ex. 13 AIRE D'UNE ELLIPSE (Extrait de l'examen de Juin 2004)

On veut calculer l'aire du domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1\}$ délimité par l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (ra \cos \theta, rb \sin \theta)$ définit un changement de variables de classe C^1 de $D =]0, 1[\times]-\pi, \pi[$ sur $\Delta' = \Delta \setminus [-a, 0] \times \{0\}$. Représenter D et Δ' .

2. Calculer l'aire de Δ' grace au changement de variables précédent.

3. Que retrouve-t-on lorsque $a = b$?