Master 1, mathématiques, Optimisation

série 6 (gradient conjugué)

Exercice 1 *gradient conjugué*

Soit $f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$ où A est symétrique définie positive. Et l'algorithme abstrait suivant :

$x^{(0)}$ donné , $d^0, d^1, \dots, d^{n-1}$ donnés (ou construits au fur et à mesure
pour $k = 0, \dots, n-1$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^k$ avec t_k optimal .

Dans la suite on pourra utiliser la notation $g^k := \nabla f(x^{(k)})$.

1. Calculer (en justifiant votre réponse) le pas optimal t_k.
2. Il est assez facile de retrouver l'algorithme du gradient conjugué : il suffit de prendre $d^0 = -g^0$, puis pour $k \geq 1$ de prendre $d^k = -g^k + \beta_{k-1} d^{k-1}$ en calculant β_{k-1} de sorte que d^k et d^{k-1} soient A-conjugués. On sait alors que cela "marche" (toutes directions sont en fait bien 2 à 2 A-conjuguées et pas seulement deux directions consécutives). En utilisant cette démarche :
   (a) calculer β_{k-1} ;
   (b) puis écrire proprement l'itération du gradient conjugué : à partir de la connaissance de $x^{(k)}$, $g^{(k)}$, et $d^{(k)}$, il faut en déduire $x^{(k+1)}$, $g^{(k+1)}$, et $d^{(k+1)}$.
   (c) pour estimer le coût d'une itération, compter le nombre de produits "matrice × vecteur", de produits scalaires entre deux vecteurs, d'additions ou soustractions entre deux vecteurs et de produits d'un scalaire par un vecteur.
   (d) Parmi les opérations élémentaires précédentes, la plus chère est le produit "matrice × vecteur". Expliquez comment on peut supprimer l'un de ces produits par une opération moins chère (aide : exprimer g^{k+1} différemment).

Exercice 2 *gradient conjugué : autres formules pour β_k*

Montrer que les deux formules :

1. "Fletcher-Reeves" :
$$\beta_k = \frac{\|g^{k+1}\|^2}{\|g^k\|^2}$$
2. "Polak-Ribière" :
$$\beta_k = \frac{(g^{k+1} - g^k | g^{k+1})}{\|g^k\|^2}$$

sont bien équivalentes (dans le cas quadratique) à la formule du cours :

$$\beta_k = \frac{(g^{k+1}|Ad^k)}{(d^k|Ad^k)}$$

Exercice 3 *une justification du meilleur comportement du GC "Polak-Ribière"*

Le but de l'exercice est de montrer que la formule de "Polak-Ribière" donne deux directions successives qui sont "A-conjugué" en moyenne. On considère donc deux itérés successifs $x^{(k)}$ et $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^k$ et on note A_k la Hessienne moyenne sur le segment joignant ces 2 points :

$$A_k = \int_0^1 H_f(x^{(k)} + s t_k d^k) ds$$

1. montrer que $t_k A_k d^k = \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}) = g^{k+1} - g^k$.
2. montrer que la formule de "Polak-Ribière" permet bien d'obtenir que $(d^{k+1}|A_k d^k) = 0$.

Exercice 4 *convergence de Polak-Ribière sans recyclage*

Pour minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dérivable, on utilise une méthode de descente :

$$x^{(0)} \text{ donné } x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^k, \quad t_k \text{ optimal}$$

où d^k est une direction de descente pour f en $x^{(k)}$ qui vérifie :

$$c_k = -\frac{(g^k|d^k)}{\|g^k\|\|d^k\|} \geq \gamma > 0, \ \forall k$$

où l'on a posé $g^k := \nabla f(x^{(k)})$. On suppose aussi que f est minorée et deux fois dérivable et qu'il existe $M > 0$ tel que $(H_f(x)h|h) \ \leq \ M\|h\|^2, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$.

1. en posant $x(t) = x^{(k)} + td^k, \ t \geq 0$, montrer que :

$$f(x^{(k)}) - f(x(t)) \ \geq \ tc_k\|g^k\|\|d^k\| - \frac{t^2}{2}M\|d^k\|^2$$

2. en prenant une valeur ad hoc pour t en déduire qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \ \geq \ rc_k^2\|g^k\|^2$$

3. en déduire que $\lim_{k\to\infty} \|g^k\| = 0$
4. A partir de maintenant on suppose de plus que f est α-elliptique. Montrer que f possède un minimum global strict unique x^* qui est aussi la limite de la suite $(x^{(k)})$ précédente. On rappelle que pour une fonction 2 fois dérivable l'ellipticité est équivalente à la propriété : $(H_f(x)h|h) \geq \alpha||h||^2, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$.
5. On veut appliquer ce résultat sur la méthode du gradient conjugué de Polak-Ribière sans recyclage. Pour cela il faut montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $c_k \geq \gamma, \ \forall k$. Comme la première direction de descente d^0 est égale à $-g^0$ on a $c_0 = 1$ il faut donc montrer cette propriété pour $k \geq 1$.
   (a) Rappeler l'algorithme du gradient conjugué de Polak-Ribière sans recyclage.
   (b) Montrer que pour $k \geq 1$ on a en fait $c_k = \frac{\|g^k\|}{\|d^k\|}$ (aide : utiliser la définition de d^k pour $k \geq 1$ puis l'optimalité de t_{k-1}).
   Rmq : ainsi pour obtenir le résultat cherché ($c_k \geq \gamma$), il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ indépendant de k tel que $\|d^k\| \leq \rho\|g^k\|$ (on obtient l'inégalité cherchée avec $\gamma = 1/\rho$).
   (c) Montrer que $\forall k \geq 1, \ \|d^k\| \leq \|g^k\| + |\beta_{k-1}|\|d^{k-1}\|$.
   (d) On définit la matrice hessienne moyenne H_k entre $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ par :

   $$H_k := \int_0^1 H_f(x^{(k-1)} + \theta t_{k-1}d^{k-1})d\theta$$

   (on admettra que cette hessienne moyenne conserve les deux propriétés $\|H_k\| \leq M$ et $(H_k h|h) \geq \alpha||h||^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 1$). Montrer que : $g^k - g^{k-1} = t_{k-1}H_k d^{k-1}$ et en déduire :
      i. que la formule de Polak-Ribière pour β_{k-1} peut s'écrire :

      $$\beta_{k-1} = t_{k-1}\frac{(H_k d^{k-1}|g^k)}{\|g^{k-1}\|^2}$$

      ii. mais aussi que :

      $$(-g^{k-1}|d^{k-1}) = t_{k-1}(H_k d^{k-1}|d^{k-1})$$

   (e) déduire de la question précédente que :

   $$|\beta_{k-1}| \leq \frac{M}{\alpha}\frac{\|g^k\|}{\|d^{k-1}\|}$$

   et conclure en utilisant le résultat obtenu au (5c).