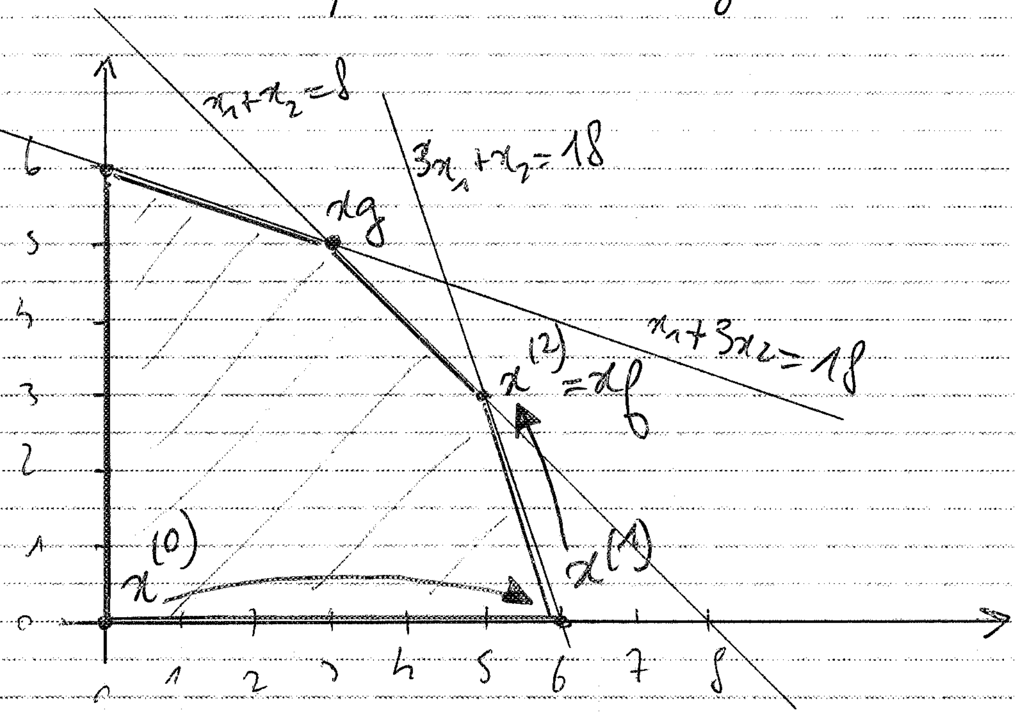
exam cc1 optim corrigé

ex1/ 1)



2)

x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
1	3	1	0	0	18
1	1	0	1	0	8
3	1	0	0	1	18
-2	-1	0	0	0	0

x_1 entre
e_3 sort
$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

0	8/3	1	0	-1/3	12
0	2/3	0	1	-1/3	2
1	1/3	0	0	1/3	6
0	-1/3	0	0	2/3	-12

$x^{(1)}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
x_2 entre
e_2 sort

0	0	1	-4	1	4
0	1	0	3/2	-1/2	3
1	0	0	-1/2	1/2	5
0	0	0	1/2	1/2	-13

$x^{(2)}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

3) forme canonique donnée par le dernier tableau:

$$e_1 = 4 + 4e_2 - e_3$$
$$x_2 = 3 - \tfrac{3}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$
$$x_1 = 5 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$g(x) = -x_1 - 2x_2 = -5 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 - 6 + 3e_2 - e_3$$
$$g(x) = -11 + \frac{5}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

4) x_f n'est plus optimale (un des coûts réduits est < 0)
=> on continue le simplexe précédent (avec les "nouveaux" coûts réduits correspondant à g)

x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	0	1	-4	1	4
0	1	0	3/2	-1/2	3
1	0	0	-1/2	1/2	5
0	0	0	5/2	-1/2	-11

e_3 entre
e_1 sort

↑

0	0	1	-4	1	4
0	1	1/2	-1/2	0	5
1	0	-1/2	+3/2	0	3
0	0	1/2	1/2	0	-13

$$x_g = \begin{bmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \\ e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = 4 \end{bmatrix}$$

2

ex 2

A $m \times n$

$$(P) \begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \text{Max } yb \\ yA \leq c \end{cases}$$

1) Si x^* est optimale pour (P) et y^* optimale pour (D) alors :

$$\text{pour } i \in [\![1,n]\!] \begin{cases} \text{si } x_i^* > 0 \text{ on a } (yA)_i = c_i \\ \text{si } c_i - (yA)_i > 0 \text{ on a } x_i^* = 0 \end{cases}$$

2) Comme (P) a une solution de base optimale non dégénérée $\bar{x}$ alors pour $\forall i \in J$ (J la base optimale) $\bar{x}_i > 0$ et donc $(\bar{y}A)_i = c_i$ (pour toute $\bar{y}$ optimale pour (D))

Cela nous donne m équations à m inconnues ($\bar{y}$) qui s'écrivent aussi :

$$\bar{y} A^J = c^J \quad \text{pour toute } \bar{y} \text{ optimale pour (D).}$$

et comme A^J est inversible $\underbrace{\quad \bar{y} = c^J (A^J)^{-1}}_{\bar{y} \text{ est donc unique et}}$.

~~Cette équation~~ ~~est~~

ex 3 On fait un simplexe dual (car on a une solution de base "duale réalisable" triviale).

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3		
-2	-3	-1	1	0	0	-1	
-2	2	3	0	1	0	-3	← e_2 sort
1	-1	-1	0	0	1	1	x_1 entre
1	1	1	0	0	0	0	

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	
0	-5	-4	1	-1	0	2
1	-1	-3/2	0	-1/2	0	3/2
0	0	1/2	0	1/2	1	-1/2
0	2	5/2	0	1/2	0	3/2

e_3 sort

mais aucun coef < 0 sur la ligne $\Rightarrow$ (P) est impossible.

<u>ex4</u> 1) Si on prend $x_1 = x_2 = 0$, alors la solution triviale $x_3 = 1$, $x_4 = -5$ et $x_5 = 7$ ne convient pas car $x_4 < 0$ $\Rightarrow$ il suffit juste de rajouter une variable auxiliaire "a" à la deuxième équation. Le pl auxiliaire est donc :

$$\text{Min} \quad a$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + a = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 7 \\ \\ x_1, \dots, x_5, a \geq 0 \end{cases}$$

On part de la solution de base réalisable

$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \qquad x_3 = 1,\ a = 5,\ x_5 = 7$

La fct coût s'exprime en fct des variables hors-base : $a = 5 - x_1 - 2x_2 + x_4$

d'où le tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a	
-1	1	1	0	0	0	1
1	2	0	-1	0	1	5
2	1	0	0	1	0	7
-1	-2	0	1	0	0	5

$\uparrow$

x_2 entre et x_3 sort

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a	
-1	1	1	0	0	0	1
3	0	-2	-1	0	1	3
3	0	-1	0	1	0	6
-3	0	2	1	0	0	3

$\uparrow$ x_1 entre et a sort

Tableau final phase 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a	
0	1	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$	2
1	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$1/3$	1
0	0	1	1	1	-1	3
0	0	0	0	0	1	0

2) D'après le tableau final de la phase 1, on a

$$x_1 = 1 + \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4$$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4$$

les coûts réduits sont ≥ 0

d'où $x_1 + x_2 = 3 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{2}{3} x_4$

la solution de base réalisable obtenue est optimale.

et le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/3	-1/3	0	2
1	0	-2/3	-1/3	0	1
0	0	1	1	1	3
0	0	1/3	2/3	0	3

qui est optimal !

Solution optimale $x_1 = 1, x_2 = 2, x_5 = 3$

$x_3 = x_4 = 0$.

Problème

1) On pose $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ avec $x_2^+ = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $x_2^- = \begin{cases} -x_2 & \text{si } x_2 \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $e_1 = b_1 - A_1 x \geq 0$.

Avec $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ e_1 \end{bmatrix}$ $d = [c_1 \mid c_2 \mid -c_2 \mid 0]$

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & -A_{1,2} & I \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & -A_{2,2} & 0 \end{array}\right] \quad b = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

alors $(P) \Longleftrightarrow (P')$ $\begin{cases} \min dz \\ \mathcal{A}z = b \\ z \geq 0 \end{cases}$

2) Par définition le dual de (P') est

$$(D')\begin{cases} \max & yb \\ yA & \leq d \end{cases} \iff \begin{cases} \max\ y_1b_1 + y_2b_2 \\ [y_1, y_2]\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & -A_{1,2} & I \\ A_{2,1} & A_{2,2} & -A_{2,2} & 0 \end{bmatrix} \leq [c_1 \mid c_2 \mid -c_2 \mid 0] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \max\ yb = y_1b_1 + y_2b_2 \\ y_1 A_{1,1} + y_2 A_{2,1} \leq c_1 \\ y_1 A_{1,2} + y_2 A_{2,2} = c_2 \\ y_1 \leq 0 \end{cases} \quad (D)$$

3) On pose $\bar{y} = d^J (A^J)^{-1}$. Pour que $\bar{y}$ soit réalisable il faut $yA \leq d$, ce qui est équivalent à montrer que :

$$(i)\ yA^J \leq d^J \ \underline{\text{et}}\ (ii)\ yA^{\bar{J}} \leq d^{\bar{J}}$$

Par définition de $\bar{y}$, on a $A^J \bar{y} = d^J$ donc (i) est respectée. Par optimalité de la base J, les coûts réduits associés sont positifs soit :

$$d^{\bar{J}} - \underbrace{d^J (A^J)^{-1}}_{\bar{y}} A^{\bar{J}} \geq 0$$

ce qui se réécrit $\bar{y} A^{\bar{J}} \leq d^{\bar{J}}$ et donc (ii) est aussi respectée. <u>Conclusion</u> : $\bar{y}$ est bien réalisable pour (D') (ou (D) par équivalence).

Pour montrer que $\bar{y}b = d\bar{z}$, on remarque

que $\bar{z}$ se décompose en $\bar{z}^J = (A^J)^{-1} b$ et $\bar{z}^{\bar{J}} = 0$ (par définition d'une solution de base).

Donc $d\bar{z} = d^J \bar{z}^J = \underbrace{d^J (A^J)^{-1}}_{\bar{y}} b = \bar{y} b.$

4) $\xi_1 = c_1 - y_1 A_{1,1} - y_2 A_{2,1}$

$\mu_1 = b_1 - A_1 x = b_1 - A_{1,1} x_1 - A_{1,2} x_2$

(a) $c_1 x_1 + c_2 x_2 - y_1 b_1 - y_2 b_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2 - y_1(\mu_1 + A_1 x) - y_2 A_2 x$

" $= c_1 x_1 + c_2 x_2 - y_1 \mu_1 - y_1 A_{1,1} x_1 - y_1 A_{1,2} x_2 - y_2 A_{2,1} x_1 - y_2 A_{2,2} x_2$

" $= \underbrace{(c_1 - y_1 A_{1,1} - y_2 A_{2,1})}_{\xi_1} x_1 - y_1 \mu_1 + \underbrace{(c_2 - y_1 A_{1,2} - y_2 A_{2,2})}_{=0} x_2 = \xi_1 x_1 - y_1 \mu_1$

(b) $\xi_1 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ et $y_1 \leq 0$

Donc $cx - yb = \xi_1 x_1 - y_1 \mu_1 \geq 0$.

5) On a $cx^* = y^* b$. Comme y^* est réalisable pour (D) on a d'après la question précédente :

$cx \geq y^* b \quad \forall x$ réalisable pour (P)

Donc y^*b est un minorant de $f(x)$ la fct coût du primal. Mais avec x^* ce minorant est atteint ($cx^* = y^*b$) donc x^* est optimale pour (P). Même raisonnement pour montrer que y^* est optimale pour (D).

6) x^* optimale pour (P) donc

$$z^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ (x_2^*)^+ \\ (x_2^*)^- \\ e_1^* = b_1 - A_1 x \end{bmatrix}$$ est solution optimale de (P') de coût cx^*.

$\Longrightarrow$ il existe une solution de base optimale (de même coût...) $\overline{z}$, appelons J la base optimale associée à $\overline{z}$ (ceci est un théorème du cours, qui est fondamental puisqu'il justifie le simplexe cad de se limiter aux solutions de <u>base</u>).

D'après la question 3), il existe $\overline{y}$ $(= d^J (A^J)^{-1})$ telle que $cx^* = d\overline{z} = \overline{y}\, b$.

D'après le 5) on en déduit que $\overline{y}$ est optimale pour (D) et comme y^* aussi cela veut dire que $y^*b = \overline{y}\, b$ d'où $cx^* = y^*b$.

7) A l'optimum $cx^* - y^*b = 0$

Mais $cx^* - y^* b = \xi_1^* x_1^* - y_1^* \mu_1^*$

d'où d'après les positivités

$$\xi_1^* x_1^* = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad y_1^* \mu_1^* = 0$$

D'où si $(x_1^*)_i > 0 \Rightarrow (\xi_1^*)_i = 0$

si $(\xi_1^*)_i > 0 \Rightarrow (x_1^*)_i = 0$

de même si $(y_1^*)_i < 0 \Rightarrow (\mu_1^*)_i = 0$

et si $(\mu_1^*)_i > 0 \Rightarrow (y_1^*)_i = 0$.