

**Master 1 Maths 2009-2010**  
Optimisation, correction examen c2

**Questions et exercices de cours (5 points)**

1. (1/2 pt) Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , on suppose que  $\bar{t}$  un minimum local de  $h(t) := f(x + td)$ . On pose  $y = x + \bar{t}d$ . Montrer que  $\langle \nabla f(y), d \rangle = 0$ .

**réponse :** comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $h$  aussi et l'optimalité locale de  $\bar{t}$  implique donc que  $g'(\bar{t}) = 0$ . Or  $h'(t) = f'(x + td)d = \langle \nabla f(x + td), d \rangle$  donc  $h'(\bar{t}) = 0$  s'écrit aussi  $\langle \nabla f(x + \bar{t}d), d \rangle = 0$  soit  $\langle \nabla f(y), d \rangle = 0$ .  $\square$

*Dans les questions suivantes, la fonction  $f$  est une forme quadratique :*

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

*où  $A$  est symétrique et définie positive.*

2. (1/2 pt) Soient  $x$  quelconque et  $d \neq 0$ , montrer que la fonction  $h(t) := f(x + td)$  admet un minimum global unique et calculer ce minimum.

**réponse :** en développant  $h$  on obtient le polynôme du second degré :

$$h(t) = \frac{1}{2} \langle Ad, d \rangle t^2 + \langle Ax - b, d \rangle t + f(x)$$

comme  $A$  est définie positive et  $d \neq 0$ , le coefficient devant  $t^2$  est strictement positif. Ainsi  $h$  définit une parabole dont le "sommet"  $t^*$  est "en bas". On a  $h'(t) = \langle Ad, d \rangle t + \langle Ax - b, d \rangle$  d'où :

$$t^* = -\frac{\langle Ax - b, d \rangle}{\langle Ad, d \rangle}$$

(on peut aussi dire que  $h$  est coercive, dérivable et strictement convexe, elle admet donc un minimum global unique  $t^*$  caractérisé par  $h'(t^*) = 0$ ).  $\square$

3. (1/2 pt) Ecrire une itération de la méthode du gradient à pas optimal appliqué à  $f$ .

**réponse :**  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^k$  avec comme direction  $d^k = -g^k = -(Ax^{(k)} - b)$  et où  $t_k$  est le pas optimal, d'après la question précédente  $t_k = \langle g^k, g^k \rangle / \langle Ag^k, g^k \rangle$ . En conclusion :

$$\begin{aligned} g_k &= Ax^{(k)} - b \\ t_k &= \langle g^k, g^k \rangle / \langle Ag^k, g^k \rangle \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - t_k g^k \end{aligned}$$

$\square$

4. (1/2 pt) On considère  $n$  vecteurs non nuls  $d^0, d^1, \dots, d^{n-1}$  tels que  $\langle Ad^i, d^j \rangle = 0$  pour  $i \neq j$  et la méthode de minimisation :

$$\begin{aligned} x^{(0)} & \text{ donné} \\ x^{(k+1)} & = x^{(k)} + t_k d^k \end{aligned}$$

avec  $t_k$  "optimal". Citer (ne pas démontrer) la propriété importante concernant cette méthode et en déduire qu'elle converge en au plus  $n$  itérations.

**réponse :** à la fin de l'itération  $k + 1$  (où l'on obtient  $x^{(k+1)}$ ),  $x^{(k+1)}$  est le minimum de  $f$  sur l'espace affine  $\mathcal{A}_k = (x^{(0)}, (d^0, d^1, \dots, d^k))$ . Comme les vecteurs  $d^j$  sont  $A$ -conjugués, ils sont linéairement indépendants et donc nécessairement  $\mathcal{A}_{n-1} = \mathbb{R}^n$ . D'où une convergence en au plus  $n$  itérations.  $\square$

5. On note  $g^k = \nabla f(x^{(k)})$  et on considère maintenant  $d^0 = -g^0$ , les autres directions de descente étant obtenue par  $d^k = -g^k + \beta_{k-1} d^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ .

- (a) (1/2 pt) Calculer  $\beta_{k-1}$  de sorte que  $\langle d^k, Ad^{k-1} \rangle = 0$ .

**réponse :**

$$\begin{aligned} \langle d^k, Ad^{k-1} \rangle & = \langle -g^k + \beta_{k-1} d^{k-1}, Ad^{k-1} \rangle \\ & = -\langle g^k, Ad^{k-1} \rangle + \beta_{k-1} \langle d^{k-1}, Ad^{k-1} \rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_{k-1} = \frac{\langle g^k, Ad^{k-1} \rangle}{\langle d^{k-1}, Ad^{k-1} \rangle}$$

$\square$

- (b) (1/2 pt) Quelle propriété retrouve-t-on sur les directions  $d^k$  avec cette construction et quelles propriétés a-t-on sur les familles de vecteur  $(d^0, \dots, d^k)$  et  $(g^0, \dots, g^k)$  (ne pas démontrer) ?

**réponse :** on fabrique des directions 2 à 2  $A$ -conjuguées ; de plus les 2 familles  $(d^0, \dots, d^k)$  et  $(g^0, \dots, g^k)$  engendrent le même sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Enfin les vecteurs de la deuxième famille sont 2 à 2 orthogonaux.  $\square$

- (c) (1 pt) Ecrire une itération de la méthode du gradient conjugué appliquée à  $f$ .

**réponse :** on utilise les directions de descentes ainsi construites plus le pas optimal, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \text{étant donnés } x^{(k)}, d^k, g^k : \\ t_k & = -\langle g^k, d^k \rangle / \langle Ad^k, d^k \rangle \\ x^{(k+1)} & = x^{(k)} + t_k d^k \\ g^{k+1} & = Ax^{(k+1)} - b \\ \beta_k & = \langle g^{k+1}, Ad^k \rangle / \langle d^k, Ad^k \rangle \\ d^{k+1} & = -g^{(k+1)} + \beta_k d^k \end{aligned}$$

cependant il y a d'autres possibilités.  $\square$

**Exercice 1** ( 3 points)

Soit  $f(x, y) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + y^2 - 2xy$ .

1. (1 pt) Montrer que  $f$  admet (au moins) un minimum global.

**réponse :** on peut montrer que  $f$  est coercive mais il est plus simple de mettre  $f$  sous la forme de deux carrés :

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + y^2 - 2xy = (x^2 + x)^2 + (x - y)^2$$

donc  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mais cette borne inférieure est atteinte par  $(0, 0)$  qui est donc un minimum global de cette fonction.  $\square$

2. (1/2 pt) Déterminer les minima globaux de  $f$ .

**réponse :**  $f$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}^2$  les minima (locaux et globaux) vérifient nécessairement  $f'(x, y) = 0$ , soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

d'où le système d'équations (obtenu en substituant  $y$  par  $x$  dans la première équation) :

$$\begin{cases} 2x(x+1)(2x+1) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

dont les solutions sont  $(0, 0)$ ,  $(-1, -1)$  et  $(-1/2, -1/2)$ . On vérifie que  $f(-1, -1) = 0$  mais que  $f(-1/2, -1/2) > 0$  d'où deux minima globaux  $(0, 0)$  et  $(-1, -1)$ .  $\square$

3. (1 pt)  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  peut-il être un minimum local? Aide : on pourra utiliser une condition nécessaire du second ordre.

**réponse :** on examine la matrice Hessienne de  $f$  en  $(-1/2, -1/2)$ . On a :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12x + 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$H_f(-1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \text{spec}(H_f(-1/2, -1/2)) = \left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

on a donc une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. La matrice n'est donc pas semi-définie positive et  $(-1/2, -1/2)$  ne peut donc pas être un minimum local (c'est un point selle).  $\square$

4. (1/2 pt) la fonction  $f$  est-elle convexe ?

**réponse :** non car, si la fonction était convexe tous les points du segment entre les deux minima globaux  $(0, 0)$  et  $(-1, -1)$  devraient être aussi des minima globaux, pour  $\theta \in [0, 1]$  on aurait :

$$0 \leq f((1 - \theta)(0, 0) + \theta(-1, -1)) \leq (1 - \theta)f(0, 0) + \theta f(-1, -1) = 0$$

ce qui n'est pas le cas.  $\square$

**Exercice 2** *gradient à pas optimal* (5 points)

On considère la forme quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

où  $A$  est symétrique et définie positive. Le but de l'exercice est de montrer que l'inégalité obtenue dans le cours pour la méthode du gradient à pas optimal ( $x^*$  désigne le minimum de  $f$ ) :

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \left( \frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

est bien "optimale", c'est à dire qu'elle devient une égalité dans certains cas (i.e. pour certains choix de  $x^{(0)}$ ). On supposera que l'on a ordonné les valeurs propres de  $A$  sorte que  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , et  $v^1, v^2, \dots, v^n$  désignera une b.o.n. associée de vecteurs propres.

1. (1 pt) Montrer que :

$$x^{(k+1)} - x^* = \left( I - \frac{\|A(x^{(k)} - x^*)\|^2}{\langle A^2(x^{(k)} - x^*), A(x^{(k)} - x^*) \rangle} A \right) (x^{(k)} - x^*)$$

**réponse :** l'itération du gradient à pas optimal s'écrit (cf question de cours) :

$$\begin{aligned} t_k &= \langle g^k, g^k \rangle / \langle Ag^k, g^k \rangle \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - t_k g^k \end{aligned}$$

on écrit le gradient  $g^k$  en utilisant  $b = Ax^*$  :

$$g^k = Ax^{(k)} - b = A(x^{(k)} - x^*)$$

ensuite on soustrait  $x^*$  de l'équation donnant  $x^{(k+1)}$ , il vient :

$$x^{(k+1)} - x^* = x^{(k)} - x^* - t_k A(x^{(k)} - x^*) = (I - t_k A)(x^{(k)} - x^*)$$

et le pas optimal peut s'écrire (en utilisant  $g^k = A(x^{(k)} - x^*)$ ) :

$$t_k = \frac{\|A(x^{(k)} - x^*)\|^2}{\langle A^2(x^{(k)} - x^*), A(x^{(k)} - x^*) \rangle}$$

qui, plongé dans l'expression précédente, nous donne le résultat attendu.  $\square$

2. (1 pt) En décomposant l'erreur à l'étape  $k$  sur la b.o.n. des vecteurs propres de  $A$  :

$$x^{(k)} - x^* = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} v^i$$

montrer que :

$$x^{(k+1)} - x^* = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \left( 1 - \left( \frac{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^3} \right) \lambda_i \right) v^i$$

et en déduire que si l'erreur initiale a des composantes nulles sur certains vecteurs propres, les erreurs suivantes conservent cette propriété.

**réponse :** avec la décomposition sur la base propre, on a :

$$A(x^{(k)} - x^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} A v^i = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \lambda_i v^i$$

D'où :

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= (I - t_k A)(x^{(k)} - x^*) = x^{(k)} - x^* - t_k A(x^{(k)} - x^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} v^i - t_k \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \lambda_i v^i \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} (1 - t_k \lambda_i) v^i \end{aligned}$$

Pour l'expression de  $t_k$  : comme la base propre est orthonormée ( $\langle v^i, v^j \rangle = \delta_{i,j}$ ), il vient :

$$\|A(x^{(k)} - x^*)\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \lambda_i v^i, \sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)} \lambda_j v^j \right\rangle = \sum_{i=1}^n (\xi_i^{(k)} \lambda_i)^2$$

de même :

$$A^2(x^{(k)} - x^*) = A(A(x^{(k)} - x^*)) = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \lambda_i A v^i = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \lambda_i^2 v^i$$

d'où on déduit que :

$$\langle A^2(x^{(k)} - x^*), A(x^{(k)} - x^*) \rangle = \sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^3$$

et le pas optimal  $t_k$  peut donc aussi s'écrire :

$$t_k = \frac{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^3}$$

et l'on obtient bien l'expression cherchée. Le résultat nous donne donc la décomposition de l'erreur  $x^{(k+1)} - x^*$  dans la base propre  $x^{(k+1)} - x^* = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k+1)} v^i$  avec :

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} \tau_i^{(k)}, \text{ où } \tau_i^{(k)} = 1 - \left( \frac{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(k)})^2 \lambda_j^3} \right) \lambda_i$$

donc si  $\xi_i^{(k)} = 0$  trivialement  $\xi_i^{(k+1)} = 0$ . On note que le facteur  $\tau_i^{(k)}$  est le taux de réduction de l'erreur pour la  $i$  ème composante à l'étape  $k$ .  $\square$

3. (1 pt) Sachant que  $\kappa_2(A) = \lambda_n/\lambda_1$ , il semble raisonnable (pour prouver le résultat) de choisir une erreur initiale ne dépendant que de  $v^1$  et  $v^n$  (on allège les notations en écrivant  $\xi_1$  au lieu de  $\xi_1^{(0)}$  et  $\xi_n$  au lieu de  $\xi_n^{(0)}$ )

$$x^{(0)} - x^* = \xi_1 v^1 + \xi_n v^n$$

Montrer alors que les facteurs  $\tau_1$  et  $\tau_n$  de réduction de l'erreur sur ces deux composantes :

$$x^{(1)} - x^* = (\tau_1 \xi_1) v^1 + (\tau_n \xi_n) v^n$$

sont :

$$\tau_1 = \frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + \left(\frac{\xi_1}{\xi_n}\right)^2 \frac{1}{\kappa_2(A)^2}} \quad \tau_n = \frac{1 - \kappa_2(A)}{1 + \left(\frac{\xi_n}{\xi_1}\right)^2 \kappa_2(A)^3}$$

**réponse :** d'après la question précédente, il est clair que :

$$\tau_1 = 1 - \left(\frac{\xi_1^2 \lambda_1^2 + \xi_n^2 \lambda_n^2}{\xi_1^2 \lambda_1^3 + \xi_n^2 \lambda_n^3}\right) \lambda_1 \quad \text{et} \quad \tau_n = 1 - \left(\frac{\xi_1^2 \lambda_1^2 + \xi_n^2 \lambda_n^2}{\xi_1^2 \lambda_1^3 + \xi_n^2 \lambda_n^3}\right) \lambda_n$$

En développant :

$$\tau_1 = \frac{\xi_n^2 \lambda_n^3 - \xi_n^2 \lambda_n^2 \lambda_1}{\xi_1^2 \lambda_1^3 + \xi_n^2 \lambda_n^3} = \frac{(\xi_n^2 \lambda_n^2 \lambda_1) \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1\right)}{(\xi_n^2 \lambda_n^2 \lambda_1) \left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_n}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)} = \frac{\kappa_2(A) - 1}{\left(\frac{\xi_1}{\xi_n}\right)^2 \frac{1}{\kappa_2(A)^2} + \kappa_2(A)}$$

et le même type de calcul conduit au résultat pour  $\tau_n$ .  $\square$

4. (2 pts) en déduire des choix possibles pour  $\xi_1$  et  $\xi_n$  permettant d'obtenir le résultat cherché ; conclure en faisant une démonstration par récurrence.

**réponse :** Il faut chercher à retrouver le facteur  $\tau = (\kappa_2(A) - 1)/(\kappa_2(A) + 1)$ . Si on regarde  $\tau_1$ , on obtiendra bien  $\tau_1 = \tau$  si  $\xi_1 = \alpha \lambda_n$  et  $\xi_n = \alpha \lambda_1$  ou  $\xi_n = -\alpha \lambda_1$  (soit  $\xi_n = s \alpha \lambda_1$  avec  $s = \pm 1$ ) puisqu'alors :

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_n}\right)^2 \frac{1}{\kappa_2(A)^2} = 1$$

Ce choix conduit aussi à  $\tau_n = -\tau$ . Soit finalement :

$$x^{(1)} - x^* = \xi_1^{(1)} v^1 + \xi_n^{(1)} v^n = (\tau \alpha \lambda_n) v^1 + (-\tau s \alpha \lambda_1) v^n$$

ainsi la décomposition de l'erreur  $x^{(1)} - x^*$  sur les vecteurs propres  $v^1$  et  $v^n$  vérifie la condition précédente : il existe un réel  $\beta (= \tau \alpha)$  tel que  $\xi_1^{(1)} = \beta \lambda_n$  et  $\xi_n^{(1)} = \pm \beta \lambda_1$ . Une récurrence à peu près évidente conduit à :

$$x^{(k)} - x^* = \xi_1^{(k)} v^1 + \xi_n^{(k)} v^n = (\tau^k \alpha \lambda_n) v^1 + ((-\tau)^k s \alpha \lambda_1) v^n$$

d'où :

$$\|x^{(k)} - x^*\| = \sqrt{(\tau^k \alpha \lambda_n)^2 + ((-\tau)^k s \alpha \lambda_1)^2} = \tau^k \sqrt{(\alpha \lambda_n)^2 + (s \alpha \lambda_1)^2} = \tau^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

$\square$

**Exercice 3 Règles de Wolfe** (7 points + 3 points question 8)

Pour minimiser  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on considère une méthode générale  $x^{(0)}$  donné puis  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^k$  où  $d^k$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x^{(k)}$  et où le pas  $t_k$  n'est pas obtenu par une minimisation unidimensionnelle exacte mais par une recherche linéaire dont le "succès" consiste juste à satisfaire les deux conditions suivantes (appelée règles de Wolfe) :

$$\begin{aligned} g(t_k) &\leq g(0) + t_k m_1 g'(0) && \text{règle (1)} \\ g'(t_k) &\geq m_2 g'(0) && \text{règle (2)} \end{aligned}$$

où  $g(t) := f(x^{(k)} + t d^k)$  et  $0 < m_1 < m_2 < 1$  sont deux constantes fixées (par exemple  $m_1 = 0.1$  et  $m_2 = 0.7$  mais peut importe). Sans rentrer dans les détails, ces 2 règles permettent de trouver un pas  $t_k$  assez rapidement (beaucoup plus rapidement que la recherche d'un pas qui minimise  $g$ ) et qui convient pour certaines méthodes. Dans la suite on suppose :

- $f$  minorée de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\nabla f(\cdot)$  lipschitzienne sur l'ensemble  $\{x : f(x) \leq f(x^{(0)})\}$  (on notera  $L$  la constante de Lipschitz) ;
- que la recherche unidimensionnelle donne bien à chaque itération un pas respectant les deux règles de Wolfe ;
- que les directions de descentes successives vérifient :

$$c_k := -\frac{\langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle}{\|\nabla f(x^{(k)})\| \|d^k\|} \geq \delta > 0$$

1. (1/2 pt) Exprimer les règles (1) et (2) de Wolfe à l'aide de la fonction  $f$  (au lieu de la fonction  $g$ ).

**réponse :** on utilise  $g'(t) = \langle \nabla f(x + t d), d \rangle$ , la première règle s'écrit :

$$f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) + t_k m_1 \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle$$

et la deuxième :

$$\langle \nabla f(x^{(k+1)}), d^k \rangle \geq m_2 \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle$$

□

2. (1 pt) En utilisant la première règle de Wolfe montrer que :

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \geq m_1 c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

**réponse :** en tenant compte du fait que  $t_k$  est positif et que  $t_k d^k = x^{(k+1)} - x^{(k)}$  on obtient :

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \geq -t_k m_1 \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle = m_1 t_k c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|d^k\| \quad (1)$$

$$\geq m_1 c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|t_k d^k\| = m_1 c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \quad (2)$$

□

3. (1,5 pt) En utilisant la deuxième règle de Wolfe, montrer que :

$$(1 - m_2) c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \leq L \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

**réponse :** partant donc de :

$$m_2 \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle \leq \langle \nabla f(x^{(k+1)}), d^k \rangle$$

en retranchant  $\langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle$  il vient :

$$(m_2 - 1) \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle \leq \langle \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz, sur le terme de droite :

$$(m_2 - 1) \langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle \leq \|\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})\| \|d^k\|$$

on réécrit le terme de gauche et y introduisant  $c_k$  et on majore à droite en utilisant la condition de Lipschitz sur le gradient :

$$(1 - m_2)c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|d^k\| \leq L \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \|d^k\|$$

d'où l'inégalité cherchée en divisant par  $\|d^k\|$ .  $\square$

4. (1 pt) En déduire que :

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \geq \frac{m_1(1 - m_2)}{L} \delta^2 \|\nabla f(x^{(k)})\|^2$$

**réponse :** écrivons l'inégalité précédente (question 3) sous la forme :

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \geq \frac{(1 - m_2)}{L} c_k \|\nabla f(x^{(k)})\|$$

ce qui permet de minorer le terme de droite de l'inégalité obtenue à la question 2 :

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \geq m_1 c_k \|\nabla f(x^{(k)})\| \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \geq \frac{m_1(1 - m_2)}{L} c_k^2 \|\nabla f(x^{(k)})\|^2$$

et l'inégalité cherchée est obtenue en utilisant que  $c_k \geq \delta$ .  $\square$

5. (1 pt) En déduire que  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\nabla f(x^{(k)})\|^2$  converge, donc  $\nabla f(x^{(k)}) \rightarrow 0$ .

**réponse :** on a :

$$f(x^{(0)}) - f(x^{(K+1)}) = (f(x^{(0)}) - f(x^{(1)})) + (f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})) + \dots + (f(x^{(K)}) - f(x^{(K+1)}))$$

et en utilisant l'inégalité précédente, il vient :

$$f(x^{(0)}) - f(x^{(K+1)}) \geq \frac{m_1(1 - m_2)}{L} \delta^2 \sum_{j=0}^K \|\nabla f(x^{(j)})\|^2$$

sachant que  $f$  est minorée, on obtient donc (en notant  $\underline{f}$  un minorant de  $f$ ) :

$$\sum_{j=0}^K \|\nabla f(x^{(j)})\|^2 \leq \frac{L}{m_1(1 - m_2)\delta^2} (f(x^{(0)}) - \underline{f}), \quad \forall K \geq 1$$

d'où la convergence de la série.  $\square$

6. (1 pt) On suppose de plus que  $f$  est coercive et strictement convexe. Montrer alors que  $x^{(k)}$  converge vers  $x^*$  le minimum unique de  $f$ .

**réponse :** avec les hypothèses  $f$  a un minimum global unique  $x^*$  seul point de  $\mathbb{R}^n$  caractérisé par  $\nabla f(x^*) = 0$ . La suite  $(f(x^{(k)}))$  est décroissante (question 4) et donc  $f$  étant continue et coercive, la suite  $(x^{(k)})$  vit dans l'ensemble compact  $K_{x^{(0)}} = f^{-1}(]-\infty, f(x^{(0)})])$  et est donc bornée. On peut extraire une sous-suite convergente vers  $\bar{x}$ . Comme  $\nabla f(x^{(k)}) \rightarrow 0$  par unicité de  $x^*$  et continuité de  $\nabla f$  nécessairement  $\bar{x} = x^*$  et par l'argument usuel toute la suite converge.

□

7. (1 pt) Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  symétrique et définie positive, on note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres. On rappelle que  $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que :

$$\|A^{-1}x\| \geq \frac{1}{\lambda_n} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**réponse :** comme  $Av^j = \lambda_j v^j$  alors en multipliant à gauche par  $A^{-1}$  et en divisant par  $\lambda_j$  il vient :

$$\frac{1}{\lambda_j} v^j = A^{-1} v^j$$

et ceci pour les  $n$  vecteurs propres  $v^j$ . Ainsi les  $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A^{-1}$  associées aux vecteurs propres  $(v^1, \dots, v^n)$ . L'inégalité cherchée s'obtient en appliquant la propriété rappelée dans l'énoncé de la question.

Pour plus de détails : Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  en le décomposant sur la base propre  $x = \sum_i \xi_i v^i$ , on a :

$$\|x\|^2 = \sum_i \xi_i^2, \quad \text{et } A^{-1}x = \sum_i \xi_i \frac{1}{\lambda_i} v^i$$

d'où ( $1/\lambda_n$  étant la plus petite valeur propre de  $A^{-1}$ ) :

$$\|A^{-1}x\|^2 = \sum_i \xi_i^2 \frac{1}{\lambda_i^2} \geq \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_i \xi_i^2 = \frac{1}{\lambda_n^2} \|x\|^2$$

□

8. (3 points) Soit maintenant une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\alpha \|h\|^2 \leq \langle H_f(x)h, h \rangle \leq M \|h\|^2, \forall x, h \in \mathbb{R}^n$  avec  $0 < \alpha \leq M$  (l'inégalité de gauche montre que  $f$  est  $\alpha$ -elliptique). Dédire des questions précédentes que l'algorithme de Newton avec recherche linéaire satisfaisant les règles de Wolfe converge globalement, cad que  $\forall x^{(0)}, x^{(k)} \rightarrow x^*$ . On rappelle que la méthode de Newton consiste à utiliser la direction  $d^k$  obtenue en résolvant le système linéaire  $H_f(x^{(k)})d^k = -\nabla f(x^{(k)})$ . Indications : 1/ il s'agit de montrer que cette méthode est bien définie ( $d^k$  existe et est bien une direction de descente et l'ensemble des pas satisfaisants aux règles de Wolfe est non vide), 2/ qu'une telle fonction respecte les hypothèses des résultats précédents et finalement 3/ que les  $c_k$  sont bien minorés par un  $\delta > 0$ .

**réponse :** commençons par le point 2/ : comme  $f$  est  $\alpha$ -elliptique elle est coercive et strictement convexe et étant de classe  $\mathcal{C}^2$  elle admet donc un minimum global unique  $x^*$

seul point de  $\mathbb{R}^n$  caractérisé par  $\nabla f(x^*) = 0$ . Du développement de Taylor  $\nabla f(x + h) = \nabla f(x) + H_f(x + \theta h)h$ , il vient :

$$\|\nabla f(x + h) - \nabla f(x)\| \leq \|H_f(x + \theta h)\| \|h\| \leq \Lambda \|h\| \leq M \|h\|$$

(où  $\Lambda = \max_i |\lambda_i|$ , les  $\lambda_i$  étant les valeurs propres de  $(H_f(x + \theta h))$ ) ainsi le gradient de  $f$  est lipschitzien sur  $\mathbb{R}^n$  de constante  $M$ .

Passons maintenant au point 1/ : l'inégalité  $\alpha \|h\|^2 \leq \langle H_f(x)h, h \rangle$  montre que la plus petite valeur propre de la matrice hessienne est toujours strictement positive ( $\lambda_1 \geq \alpha$ ) et donc cette matrice est toujours inversible et définie positive ; on peut donc calculer  $d^k$  à chaque itération (inversibilité). Pour que  $d^k$  soit bien une direction de descente, il faut montrer que  $\langle d^k, \nabla f(x^{(k)}) \rangle$  est strictement négatif, or :

$$\langle d^k, \nabla f(x^{(k)}) \rangle = \langle d^k, -H_f(x^{(k)})d^k \rangle = - \langle d^k, H_f(x^{(k)})d^k \rangle < 0$$

car la matrice hessienne est toujours définie positive (et  $d^k$  non nul si  $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$  c'est à dire tant que  $x^{(k)} \neq x^*$ ). Pour voir que l'ensemble des pas vérifiant les conditions de Wolfe est non vide : tout d'abord un développement de Taylor au voisinage de  $t = 0$  montre que  $g(t)$  est nécessairement "en dessous" de la droite  $g(0) + tm_1g'(0)$  pour  $t$  suffisamment petit (faire un dessin). Comme la fonction  $g$  est elle-même  $\alpha$ -elliptique (c'est la restriction de  $f$  qui est  $\alpha$ -elliptique sur l'ensemble affine  $(x^{(k)}, d^k)$ ) donc  $g(t)$  (qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ) va nécessairement croiser la droite  $g(0) + tm_1g'(0)$  (qui elle tend vers  $-\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ) en disons  $t = T_1$ . Donc tous les pas  $t \in [0, T_1]$  respectent la première règle. Au moment du croisement on a nécessairement  $g'(T_1)$  qui est supérieur à la pente de la droite  $g(0) + tm_1g'(0)$  soit  $g'(T_1) > m_1g'(0)$  et donc  $g'(t) > m_2g'(0)$  (car  $g'(0) < 0$  et  $m_2 > m_1$  impliquent  $m_1g'(0) > m_2g'(0)$ ). Par continuité de  $g'$  il existe  $T_2 \in ]0, T_1[$  tel que  $g'(t) \geq m_2g'(0)$  pour  $t \in [T_2, T_1]$ . En conclusion, sur cet intervalle on respecte donc les 2 règles (cqfd).

Pour le point 3/ l'inégalité obtenue à la question 7, montre que :

$$\langle (H_f(x^{(k)}))^{-1}x, x \rangle \geq \frac{1}{\lambda_n} \|x\|^2 \geq \frac{1}{M} \|x\|^2$$

où  $\lambda_n$  est la plus grande valeur propre de  $H_f(x^{(k)})$  qui est majorée par  $M$ . On a donc :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\langle \nabla f(x^{(k)}), d^k \rangle}{\|\nabla f(x^{(k)})\| \|d^k\|} = \frac{\langle \nabla f(x^{(k)}), H_f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}) \rangle}{\|\nabla f(x^{(k)})\| \|H_f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})\|} \\ &\geq \frac{1}{M} \frac{\|\nabla f(x^{(k)})\|}{\|H_f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})\|} \end{aligned}$$

La démonstration se termine en utilisant que  $\|H_f(x^{(k)})^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda_1} \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$  d'où :

$$c_k \geq \frac{\alpha}{M}$$

□