

Master 1 Maths 2011-2012
correction de l'examen cc1 d'optimisation

Exercice 1 *Résolution d'un P.L. par l'algorithme du simplexe*

Dans cet exercice l'algorithme du simplexe utilisera la stratégie suivante :

- la variable entrante correspond au coefficient réduit le plus négatif ;
- en cas d'ambiguïté pour choisir une variable entrante ou sortante, on choisira la variable d'indice le plus petit ; l'ordre entre différents types de variables étant (1) variables initiales, (2) variables d'écart (ce qui veut dire que si on a le choix entre une variable initiale et une variable d'écart, c'est la variable initiale qui prime).

Ces règles **devront être impérativement respectées** pour obtenir les points correspondants.

On considère le programme linéaire suivant :

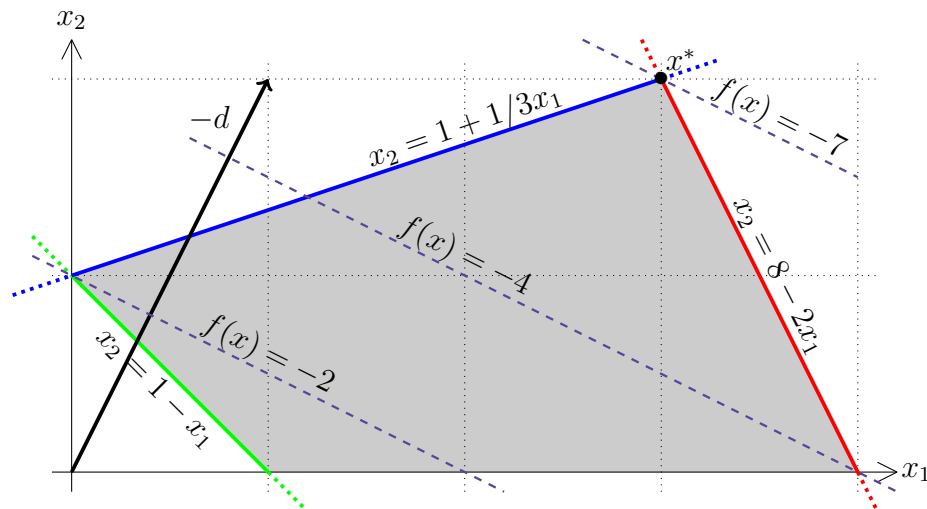
$$(P) \begin{cases} \min & f(x) = -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre (P) graphiquement (faire le graphique sur le canevas donné à la dernière page).

réponse : On dessine d'abord le domaine des solutions réalisables, il est dans le "quart de plan" positif et :

- (a) $x_2 \geq 1 - x_1$ donc au "dessus" de la droite $x_2 = 1 - x_1$ (en vert sur le graphique) ;
- (b) $x_2 \leq 1 + 1/3x_1$ donc en "dessous" de la droite $x_2 = 1 + 1/3x_1$ (en bleu sur le graphique)
- (c) $x_2 \leq 8 - 2x_1$ donc en "dessous" de la droite $x_2 = 8 - 2x_1$ (en rouge sur le graphique)

Le domaine est un polygône de sommets $(1, 0), (4, 0), (3, 2), (0, 1)$. Par la suite on dessine les lignes de niveaux de $f : f(x) = c \iff -x_1 - 2x_2 = c$: ce sont des droites perpendiculaires au vecteur $d = [-1, -2]$, les niveaux décroissants allant dans le sens opposé à d . Il apparaît alors clairement que le sommet $x^* = (3, 2)$ est le minimum de f sur le domaine admissible et $f(x^*) = -7$.



□

2. Mettre (P) sous forme standard (on notera e_1, e_2, e_3 les variables d'écart et l'on gardera le second membre positif).

réponse : pour garder le second membre positif avec $e_1 \geq 0$ il faut juste retrancher e_1 , ce qui donne :

$$(P') \begin{cases} \min & f(x, e) = -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 - e_1 = 1 \\ & -x_1 + 3x_2 + e_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + e_3 = 8 \\ & x \geq 0, e \geq 0 \end{cases}$$

□

3. En utilisant un programme linéaire auxiliaire (avec une seule variable auxiliaire) trouver une solution de base réalisable $(x^{(0)}, e^{(0)})$ de (P) . Précisez quelles sont les variables de base et les variables hors base. Placer la restriction dans le plan (x_1, x_2) sur votre dessin. NB : il y a une seule itération.

réponse : Il suffit donc de rajouter une seule variable auxiliaire a sur la première équation. Le PL auxiliaire s'écrit :

$$(P_{aux}) \begin{cases} \min & f_{aux}(x, e, a) = a \\ & x_1 + x_2 - e_1 + a = 1 \\ & -x_1 + 3x_2 + e_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + e_3 = 8 \\ & x \geq 0, e \geq 0, a \geq 0 \end{cases}$$

La base initiale est constitué des variables $\{a, e_2, e_3\}$, les variables hors-base étant $\{x_1, x_2, e_1\}$. Pour démarrer le simplexe, il faut écrire la fonction coût en fonction des variables hors-base : $f_{aux}(x, e, a) = a = 1 - x_1 - x_2 + e_1$. Le premier tableau de simplexe est donc :

1	0	0	1	1	-1	1
0	1	0	-1	3	0	3
0	0	1	2	1	0	8
0	0	0	-1	-1	1	1
a	e_2	e_3	x_1	x_2	e_1	

D'après les règles imposées la variable x_1 entre en base. Quand on augmente x_1 la variable a retourne vers 0 (pour $x_1 = 1$) ainsi que la variable e_3 (pour $x_1 = 4$). C'est donc a qui sort et comme c'est une variable auxiliaire on ne la considère plus. On obtient le tableau suivant :

1	0	0	1	-1	1
0	1	0	4	-1	4
0	0	1	-1	2	6
0	0	0	0	0	0
x_1	e_2	e_3	x_2	e_1	

Une solution de base réalisable pour (P) est donc $x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 0, e_1^{(0)} = 0, e_2^{(0)} = 4, e_3^{(0)} = 6$, la base étant formée des variables $\{x_1, e_2, e_3\}$. □

4. Ecrire la fonction coût $f(x, e) = -x_1 - 2x_2$ en fonction des variables hors base et en déduire le premier tableau de simplexe.

réponse : le dernier tableau nous donne x_1 en fonction des variables hors-base : $x_1 = 1 - x_2 + e_1$ on obtient donc :

$$f(x, e) = -x_1 - 2x_2 = -1 - x_2 - e_1$$

et le premier tableau de simplexe est :

1	0	0	1	-1	1
0	1	0	4	-1	4
0	0	1	-1	2	6
0	0	0	-1	-1	-1
x_1	e_2	e_3	x_2	e_1	

□

5. Dérouler l'algorithme du simplexe (**avec les règles mentionnées ci-avant**) pour trouver la solution de (P) . Noter les différentes étapes $(x^{(1)}, e^{(1)})$, $(x^{(2)}, e^{(2)})$ et $(x^*, e^*) := (x^{(3)}, e^{(3)})$ sur votre graphique. Que se passe-t-il à l'itération 2 (celle qui permet de passer de $(x^{(1)}, e^{(1)})$ à $(x^{(2)}, e^{(2)})$) ?

réponse :

itération 1 : d'après les règles c'est la variable x_2 qui entre et la variable x_1 qui sort, on obtient le tableau suivant :

1	0	0	1	-1	1
0	1	0	-4	3	0
0	0	1	1	1	7
0	0	0	1	-2	-2
x_2	e_2	e_3	x_1	e_1	

La solution de base associée est $x^{(1)} = [0, 1]^\top$, $e^{(1)} = [0, 0, 7]^\top$ avec un coût de $f^{(1)} = -2$.

itération 2 : e_1 entre et e_2 sort, on obtient le tableau suivant :

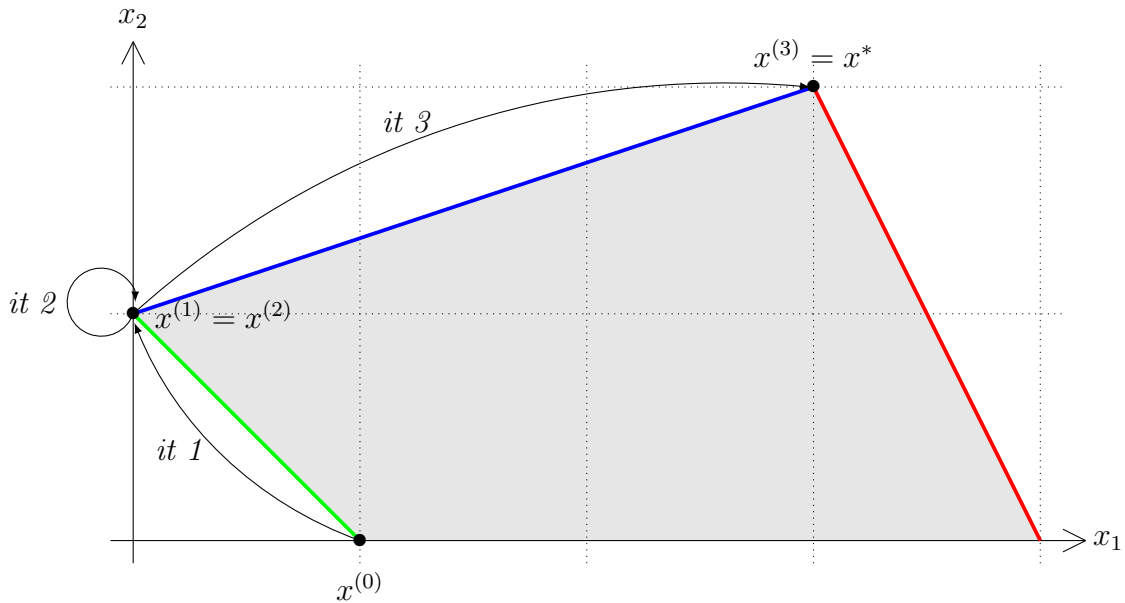
1	0	0	1/3	1/3	1
0	1	0	-4/3	1/3	0
0	0	1	7/3	-1/3	7
0	0	0	-5/3	2/3	-2
x_2	e_1	e_3	x_1	e_1	

La solution de base associée est $x^{(2)} = [0, 1]^\top$, $e^{(2)} = [0, 0, 7]^\top$ avec un coût de $f^{(2)} = -2$. On a donc pas bougé, seule la base a changé (le dessin montre bien que ce sommet admet plusieurs représentation de bases différentes).

itération 3 : x_1 entre et e_3 sort, on obtient le tableau suivant :

1	0	0	1/7	2/7	2
0	1	0	4/7	1/7	4
0	0	1	3/7	-1/7	3
0	0	0	5/7	3/7	-7
x_2	e_1	x_1	e_3	e_2	

Les coûts réduits étant strictement positifs on est arrivé à l'unique optimum $x^{(3)} = x^* = [3, 2]^T$, $e^{(3)} = e^* = [4, 0, 0]^T$. \square



\square

Exercice 2 Généralisation du théorème d'existence pour un PL quelconque

Un P.L. le plus général comprend à la fois des contraintes d'égalité et d'inégalité et des variables astreintes à la positivité et les autres non astreintes. Un tel P.L. peut s'écrire :

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{C}} f(x) = c^T x \\ \mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_e x = b_e, \quad A_i x \leq b_i, \quad x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, $A_e \in \mathcal{M}_{m_e, n}(\mathbb{R})$, $b_e \in \mathbb{R}^{m_e}$, (donc m_e contraintes d'égalité), $A_i \in \mathcal{M}_{m_i, n}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, (m_i contraintes d'inégalité) et seule une partie $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ des variables $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sont astreintes à être positives, les autres variables $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ étant de signe quelconque.

On a bien sûr $n = n_1 + n_2$. Le vecteur c peut se décomposer de la même façon que le vecteur x en $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, de même les matrices A_e et A_i peuvent se décomposer en $A_e = [A_e^1 | A_e^2]$ et $A_i = [A_i^1 | A_i^2]$ en séparant les n_1 premières colonnes des n_2 dernières.

1. Mettre (P) sous forme standard.

réponse : Pour obtenir la forme standard, il faut rajouter m_i variables d'écart positives, soit $e \in \mathbb{R}^{m_i}$, $e \geq 0$ de sorte que $A_i x + e = b_i$ (cad $e := b_i - A_i x$) et décomposer x_2 en une différence de variables positives, soit $x_2 = u - v$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, par exemple en choisissant $u := x_2^+$ et $v := x_2^-$. En utilisant la décomposition sur le vecteur c la fonction coût se réécrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ &= c_1^T x_1 + c_2^T (u - v) \\ &= c_1^T x_1 + c_2^T u - c_2^T v \end{aligned}$$

En posant ¹ :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \\ 0_{m_i \times 1} \end{bmatrix}$$

la fonction coût s'écrit alors $\tilde{f}(X) = C^\top X$ en fonction de la variable X .

Pour les contraintes, en utilisant la décomposition des matrices A_e et A_i , et la décomposition $x = u - v$, on obtient :

$$\begin{aligned} A_e^1 x_1 + A_e^2 x_2 &= A_e^1 x_1 + A_e^2 u - A_e^2 v + 0_{m_e \times m_i} e = b_e \\ A_i^1 x_1 + A_i^2 x_2 + e &= A_i^1 x_1 + A_i^2 u - A_i^2 v + I_{m_i} e = b_i \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore $\mathbb{A}X = B$ en introduisant la matrice \mathbb{A} et le vecteur B suivants :

$$\mathbb{A} := \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_e^1 & A_e^2 & -A_e^2 & 0_{m_e \times m_i} \\ \hline A_i^1 & A_i^2 & -A_i^2 & I_{m_i} \end{array} \right], \quad B := \begin{bmatrix} b_e \\ b_i \end{bmatrix}.$$

On a donc bien formulé (P) sous la forme du P.L. standard équivalent :

$$(P') \begin{cases} \min \tilde{f}(X) = C^\top X \\ X \in \mathcal{C}' := \{x \in \mathbb{R}^N : \mathbb{A}X = B \text{ et } X \geq 0\} \end{cases}$$

qui comporte m contraintes d'égalité et $N := n_1 + 2n_2 + m_i$ variables. \square

2. On suppose \mathcal{C} non vide et f minorée sur \mathcal{C} , montrer que (P) admet une solution optimale x^* .

réponse : On peut appliquer le théorème 1 du cours sur (P') . En effet :

- (a) \mathcal{C}' est non vide car \mathcal{C} est non vide : soit $x \in \mathcal{C}$, alors il est clair que :

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ b_i - A_i x \end{bmatrix}$$

est réalisable pour (P') (cad tel que $X \geq 0$ et $\mathbb{A}X = B$).

- (b) \tilde{f} est minorée sur \mathcal{C}' . En effet s'il en était autrement il existerait une suite $(X^{(n)}) \in \mathcal{C}'$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(X^{(n)}) = -\infty$. Mais comme $\tilde{f}(X^{(n)}) = f(x^{(n)})$ où $x^{(n)}$ est défini à partir de $X^{(n)}$ par ² :

$$x^{(n)} := \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ u^{(n)} - v^{(n)} \end{bmatrix}, \quad X^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ e^{(n)} \end{bmatrix}$$

et où il est clair que $x^{(n)} \in \mathcal{C}$ (on a bien $x_1^{(n)} \geq 0$, $A_e x^{(n)} = b_e$ et $A_i x^{(n)} \leq b_i$), on aurait donc une suite $(x^{(n)}) \in \mathcal{C}$ telle que $f(x^{(n)}) \rightarrow -\infty$ ce qui contredit l'hypothèse de minoration de f sur \mathcal{C} .

1. On désignera par $0_{m \times n}$ une matrice nulle de taille $m \times n$.

2. on décompose $X^{(n)}$ en 4 blocs de tailles respectives n_1, n_2, n_2, m_i appelés $x_1^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, e^{(n)}$.

On a donc existence d'une solution optimale X^* pour (P') . Et donc d'une solution optimale x^* pour (P) (obtenue de la même façon que $x^{(n)}$ est obtenue à partir de $X^{(n)}$). Il est évident que x^* est bien optimale pour (P) (en procédant par l'absurde comme précédemment : si il existe \bar{x} tel que $f(\bar{x}) < f(x^*)$ alors il est clair qu'en constituant le vecteur \bar{X} , on aura $\tilde{f}(\bar{X}) < \tilde{f}(X^*)$ contredisant alors l'optimalité de X^*). \square

Exercice 3 *Initiation à la dualité en programmation linéaire*

On considère le programme linéaire suivant (dit de production) :

$$(P) \begin{cases} \max f(x) = c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

A ce programme linéaire, appelé *primal*, on associe un autre programme linéaire appelé *dual* de (P) par :

$$(D) \begin{cases} \min g(y) = b^\top y \\ A^\top y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } y \in \mathbb{R}^m$$

La dimension de la variable du problème dual est égale au nombre de contraintes ($Ax \leq b$) du problème primal. Ces deux types de PL ont été rencontrés dans l'exercice du restaurateur.

1. Montrer que **la dualité est involutive**, c'est à dire que le dual de (D) est (P) .

(a) Mettre le problème (D) sous la forme d'un max et avec des contraintes \leq .

réponse : (D) est équivalent à :

$$(D') \begin{cases} \max \tilde{g}(y) = (-b)^\top y \\ (-A)^\top y \leq (-c) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } y \in \mathbb{R}^m$$

(b) Appliquer alors la définition précédente pour trouver son dual et montrer qu'il est équivalent au problème (P) .

réponse : (D') est exactement de la même forme que (P) , son dual est donc le P.L. :

$$(P') \begin{cases} \min h(z) = (-c)^\top z \\ ((-A)^\top)^\top z \geq -b \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } z \in \mathbb{R}^n$$

qui est équivalent au P.L. :

$$\begin{cases} \max \tilde{h}(z) = c^\top z \\ Az \leq b \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } z \in \mathbb{R}^n$$

c'est à dire à (P) . \square

2. Vous allez maintenant montrer que $f(x) \leq g(y)$ pour toutes solutions réalisables x de (P) et y de (D) . Pour cela, en notant $\xi = A^\top y - c$ et $\mu = b - Ax$, montrer que $\mu^\top y + x^\top \xi = b^\top y - x^\top c = b^\top y - c^\top x$ et en déduire le résultat annoncé.

réponse : On a bien :

$$\mu^\top y + x^\top \xi = (b - Ax)^\top y + x^\top (A^\top y - c) = b^\top y - x^\top A^\top y + x^\top A^\top y - c^\top x = b^\top y - c^\top x$$

Or $Ax \leq b$ donc $\mu \geq 0$ et $A^\top y \geq c$ d'où $\xi \geq 0$. Sachant que $x \geq 0$ et $y \geq 0$ on a donc $\mu^\top y + x^\top \xi \geq 0$, soit :

$$g(y) - f(x) = b^\top y - c^\top x = \mu^\top y + x^\top \xi \geq 0$$

et donc $g(y) \geq f(x)$ pour tout couple (x, y) de solutions réalisables de (P) et (D) . \square

3. On veut montrer qu'une CNS pour que (P) et (D) aient chacun une solution optimale x^* et y^* est qu'il existe x^* réalisable pour (P) et y^* réalisable pour (D) telles que $c^\top x^* = b^\top y^*$.

- (a) Montrer que la condition est suffisante (cad que si x^* réalisable pour (P) et y^* réalisable pour (D) sont telles que $c^\top x^* = b^\top y^*$ alors elles sont optimales).

réponse : comme y^* est réalisable pour (D) , d'après la question 2, on a que :

$$f(x) = c^\top x \leq g(y^*) = b^\top y^*, \forall x \text{ réalisable pour } (P)$$

Donc $g(y^*)$ est un majorant pour f , majorant atteint pour x^* et donc x^* est une solution optimale pour (P) . On inverse ce même raisonnement pour montrer que y^* est optimale pour (D) . \square

NB : on admettra que la condition est nécessaire (cad si x^* et y^* sont bien optimales alors $c^\top x^* = b^\top y^*$).

4. En déduire les relations d'exclusion :

$$\begin{aligned} x_i^* > 0 &\Rightarrow \xi_i^* (= (A^i)^\top y^* - c_i) = 0 & , & & \xi_i^* > 0 &\Rightarrow x_i^* = 0 \\ y_i^* > 0 &\Rightarrow \mu_i^* (= b_i - A_i x^*) = 0 & , & & \mu_i^* > 0 &\Rightarrow y_i^* = 0 \end{aligned}$$

réponse : Elles s'obtiennent à partir de la relation :

$$0 = g(y^*) - f(x^*) = (\mu^*)^\top y^* + (x^*)^\top \xi^* = \sum_{i=1}^m \mu_i^* y_i^* + \sum_{i=1}^n x_i^* \xi_i^*$$

Comme toutes ces quantités sont positives alors il est clair que :

$$\begin{aligned} x_i^* > 0 &\Rightarrow \xi_i^* = 0 \\ \xi_i^* > 0 &\Rightarrow x_i^* = 0 \\ y_i^* > 0 &\Rightarrow \mu_i^* = 0 \\ \mu_i^* > 0 &\Rightarrow y_i^* = 0 \end{aligned}$$

sinon on aurait $g(y^*) - f(x^*) > 0$ ce qui est absurde. \square