Comportement local moyen de la fonction de Brjuno

Bruno Martin (Université technique de Graz)

travail en commun avec Michel Balazard

9 avril 2010

Posant $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : X &\to X \\ x &\mapsto \{1/x\}, \end{aligned}$$

où $\{\cdot\}$ désigne la fonction partie fractionnaire. Pour $j \geq 0$, on désigne par α_j la j^{e} itérée de α. La fonction Φ de Brjuno est définie sur X par

$$\Phi(x) = \sum_{j \geq 0} \alpha_0(x)\alpha_1(x)\ldots\alpha_{j-1}(x) \log\bigl(1/\alpha_j(x)\bigr),$$

la somme étant convergente ou valant $+\infty$ suivant les propriétés diophantiennes de x. Cette fonction, introduite à l'origine dans le cadre de l'étude de certains systèmes dynamiques complexes, peut être vue comme un modèle simplifié d'une fonction d'auto-corrélation intervenant dans le critère de Beurling-Nyman pour l'hypothèse de Riemann. Dans ce travail, nous caractérisons notamment les points de Lebesgue de la fonction de Brjuno, c'est-à-dire les points x pour lesquels

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \bigl|\Phi(t) - \Phi(x)\bigr| dt = 0.$$