

Nager dans un fluide parfait : un résultat de contrôle

Thomas Chambrion Alexandre Munnier





INRIA Lorraine, projet CORIDA





SMAI, mai 2009

Quelques références



Contrôle par changement de forme :

-  F. Alouges, A. Lefebvre and A. DeSimone, *Optimal Strokes for Low Reynolds Number Swimmers: An example*, J. of. Nonlinear Science, 2008.
-  A. Bressan, *Impulsive control of Lagrangian systems and locomotion in fluids*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 2008.

Planification de trajectoire :

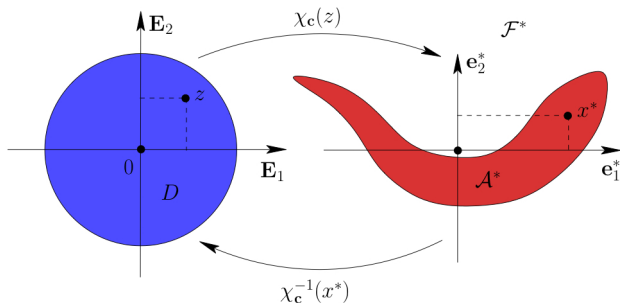
-  R. Mason, *Fluid Locomotion and Trajectory Planning for Shape-Changing Robots*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 2003.
-  J.-B Melli, J.-B. C. W. Rowley et D. S. Rufat, *Motion planning for an articulated body in a perfect planar fluid*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2006.

Contrôle sans déformation :

-  J. San Martín, T. Takahashi et M. Tucsnak, *A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms*, Quart. Appl. Math., 2007.
-  T. Chambrion and M. Sigalotti, *Tracking control for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws*, IEEE Trans. Automat. Control, 2008.

Modélisation : les déformations

- Les déformations sont décrites par des difféomorphismes $\chi_{\mathbf{c}} : D \rightarrow \mathcal{A}^*$.
- Les difféomorphismes dépendent d'une *variable de forme* \mathbf{c} (le contrôle) appartenant à \mathbb{C}^N .



- **Conservation de la densité** : la densité $\rho_{\mathbf{c}}^*$ dans \mathcal{A}^* se déduit d'une densité ρ_0 donnée dans D par la formule :

$$\rho_{\mathbf{c}}^*(x^*) = \frac{\rho_0(\chi_{\mathbf{c}}^{-1}(x^*))}{|\det D\chi_{\mathbf{c}}(\chi_{\mathbf{c}}^{-1}(x^*))|}, \quad (x^* \in \mathcal{A}^*).$$

Modélisation : locomotion auto-propulsée

- L'application $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N \mapsto \chi_{\mathbf{c}} \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^2)$ est *analytique*.
- On se donne : $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{c}(t) \in \mathbb{C}^N$ *régulière*. On note $\dot{\mathbf{c}} = d\mathbf{c}/dt$.

Le couple $(\mathbf{c}, \dot{\mathbf{c}})$ est dit **admissible** lorsqu'il vérifie :

- 1 Conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_D \rho_0 \frac{\partial \chi_{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{c}}(z) \dot{\mathbf{c}} dz = 0, \quad (t \geq 0).$$

- 2 Conservation du moment angulaire :

$$\int_D \rho_0 \frac{\partial \chi_{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{c}}(z) \dot{\mathbf{c}} \cdot \chi_{\mathbf{c}}(z) dx = 0, \quad (t \geq 0).$$

- 3 Conservation du volume du poisson (fluide incompressible) :

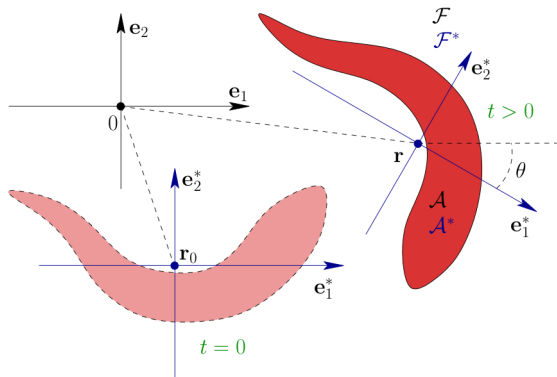
$$\int_D \frac{\partial \chi_{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{c}}(\chi_{\mathbf{c}}^{-1}(z)) \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (t \geq 0).$$

Conclusion : $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$, sous variété analytique de \mathbb{C}^N et $\dot{\mathbf{c}}$ à un sous ev de $T_{\mathbf{c}}\mathcal{E}$.

Modélisation : énoncé du problème

① **Dynamique du problème** : déterminer en fonction de \mathbf{c} :

- La position $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ du centre d'inertie du poisson.
- Son orientation θ par rapport à un repère fixe.



② **Contrôle** : déterminer les déformations (une fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{c}(t)$ **admissible**) permettant au poisson de suivre une trajectoire donnée.

Modélisation : le fluide

On suppose que :

- Le fluide est parfait à écoulement irrotationnel.
- Le système fluide-poisson occupe tout l'espace.

On note $\psi_{\mathbf{c}}$ le potentiel exprimé dans le repère lié au poisson $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ et :

$$u(x) = R(\theta) \nabla \psi_{\mathbf{c}}(R(\theta)^T(x - \mathbf{r}) + \mathbf{r}_0), \quad (x \in \mathcal{F}),$$

est la vitesse eulérienne du fluide.

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_{\mathbf{c}}(x^*) &= 0 & (x^* \in \mathcal{F}^*), \\ \frac{\partial \psi_{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{n}}(x^*) &= v_r(x^*) \cdot \mathbf{n} + v_d(x^*) \cdot \mathbf{n} & (x \in \partial \mathcal{A}^*), \end{aligned}$$

avec $\dot{\mathbf{r}} = R(\theta) \dot{\mathbf{r}}^*$ et :

$$v_r(x^*) = \dot{\theta}(x^*)^\perp + \dot{\mathbf{r}}^* \quad \text{et} \quad v_d(x^*) = \frac{\partial \chi_{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{c}}(\chi_{\mathbf{c}}^{-1}(x^*)) \dot{\mathbf{c}}.$$

Loi de Kirchhoff :

$$\psi_{\mathbf{c}} = \dot{r}_1^* \psi_1^r + \dot{r}_2^* \psi_2^r + \dot{\theta} \psi_3^r + \psi_{\mathbf{c}}^d \dot{\mathbf{c}}.$$

Modélisation : la dynamique

Le Lagrangien du système fluide-poisson s'écrit :

$$L(\dot{\theta}, \dot{\mathbf{r}}^*, \dot{\mathbf{c}}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\mathbf{r}}^* & \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \mathbb{M}(\mathbf{c}) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{r}}^* \\ \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{M}(\mathbf{c})$ est la matrice de masse *virtuelle* du système.
- L'application $\mathbf{c} \mapsto \mathbb{M}(\mathbf{c})$ est analytique.
- Le principe de *moindre action* fournit les équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{N}(\mathbf{c}) \dot{\mathbf{c}},$$

où la matrice $\mathbb{N}(\mathbf{c})$ s'obtient à partir de $\mathbb{M}(\mathbf{c})$.

La matrice $\mathbb{N}(\mathbf{c})$, comme la matrice $\mathbb{M}(\mathbf{c})$, est analytique en \mathbf{c} .

Reformulation du problème de contrôle

Pour tout $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$, on considère des champs de vecteurs analytiques :

$$\{X_1(\mathbf{c}), \dots, X_n(\mathbf{c})\} \subset T_{\mathbf{c}}\mathcal{E},$$

tels que les couples $(\mathbf{c}, X_i(\mathbf{c}))$ soient *admissibles*. On cherche ensuite le contrôle sous la forme :

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) X_i(\mathbf{c}(t)),$$

où $\alpha_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$. La dynamique se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) Y_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{c}),$$

avec :

$$Y_i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{N}(\mathbf{c}) X_i(\mathbf{c}) \\ X_i(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Contrôle géométrique : cas analytique

Soit M une variété **analytique** et $\mathfrak{X} \subset \Gamma(M)$ tel que \mathfrak{X} soit un cône.

- **Orbite de \mathfrak{X} passant par q ($q \in M$)** : notée $\mathcal{O}(q)$, c'est l'ensemble des éléments de M atteignables en suivant successivement et pendant des temps finis les courbes définies par $\dot{q} = X(q)$, ($X \in \mathfrak{X}$).
- **Crochet de Lie** : $[X_1, X_2] = \frac{dX_2}{dq}X_1 - \frac{dX_1}{dq}X_2$, ($X_1, X_2 \in \mathfrak{X}$).
- **Algèbre de Lie** : **Lie \mathfrak{X}** est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des crochets de tous ordres.
Lie_q \mathfrak{X} ($q \in M$), est l'ensemble des vecteurs de Lie \mathfrak{X} au point q .

Théorème de l'orbite

La dimension de **Lie_q \mathfrak{X}** est constante sur les orbites.

Théorème de Rashevsky-Chow

Si **Lie_q $\mathfrak{X} = T_q M$** , $\forall q \in M$, alors $\mathcal{O}(q) = M$, $\forall q \in M$.

Un exemple de contrôlabilité : l'amibe

On pose $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$, $c_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, ($k = 1, 2$).

La fonction de déformation est (en coordonnées polaires) :

$$\chi_{\mathbf{c}}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 a_k \begin{pmatrix} r^k \cos(k\theta) \\ -r^k \sin(k\theta) \end{pmatrix} + b_k \begin{pmatrix} r^k \sin(k\theta) \\ r^k \cos(k\theta) \end{pmatrix}.$$

Les potentiels sont calculés explicitement en utilisant la transformation conforme :

$$\phi_{\mathbf{c}}(z) = z + \sum_{k=1}^2 \frac{c_k}{z^k}, \quad |z| \geq 1.$$

La dynamique est explicite.

Les contraintes sur \mathbf{c} (locomotion auto-propulsée) sont :

$$\sum_{k=1}^2 k(a_k \dot{a}_k + b_k \dot{b}_k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k+1} (\dot{a}_k b_k - \dot{b}_k a_k) = 0.$$

Contrôle de l'amibe

On note :

$$\mathcal{E} := \{\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 : |c_1|^2 + 2|c_2|^2 = 1/2\}.$$

On choisit 2 champs analytiques X_1 et X_2 dans $\Gamma(\mathcal{E})$ satisfaisant les contraintes et on vérifie que

$$\text{Lie}_{\mathbf{c}}(\{X_1(\mathbf{c}), X_2(\mathbf{c})\}) = T_{\mathbf{c}}\mathcal{E}, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{E}.$$

Théorème de Rashevsky-Chow : pour tout \mathbf{c}_0 , il existe des fonctions α_1 et α_2 constantes par morceaux permettant d'atteindre n'importe quel point de \mathcal{E} en temps fini (arbitraire) en intégrant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{c}} = \alpha_1(t)X_1(\mathbf{c}) + \alpha_2(t)X_2(\mathbf{c}) \\ \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0. \end{cases}$$

Contrôle de l'amibe

On s'intéresse ensuite à une partie seulement de la dynamique :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \alpha_1(t)\hat{X}_1(\mathbf{c}) + \alpha_2(t)\hat{X}_2(\mathbf{c}),$$

avec

$$\hat{X}_i(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \Pi_3(\mathbb{N}(\mathbf{c})X_i(\mathbf{c})) \\ X_i(\mathbf{c}) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Les calculs des crochets sont trop compliqués dans le cas général mais on peut prouver que :

$$\dim(\text{Lie}_{(0, \bar{\mathbf{c}})}(\{\hat{X}_1(\bar{\mathbf{c}}), \hat{X}_2(\bar{\mathbf{c}})\})) = 4,$$

pour un $\bar{\mathbf{c}}$ particulier. Comme les champs ne dépendent pas de θ , c'est encore vrai pour tout point $(\theta, \bar{\mathbf{c}})$. Or pour tout (θ, \mathbf{c}) , il existe $\bar{\theta}$ tel que

$$\mathcal{O}((\theta, \mathbf{c})) \ni (\bar{\theta}, \bar{\mathbf{c}}).$$

D'après le **théorème de l'orbite** :

$$\dim(\text{Lie}_{(\theta, \mathbf{c})}(\{\hat{X}_1(\mathbf{c}), \hat{X}_2(\mathbf{c})\})) = 4, \quad \forall (\theta, \mathbf{c}).$$

Rappelons que la dynamique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) Y_i(\theta, \mathbf{c}).$$

Les champs ne dépendent que de θ et \mathbf{c} . On calcule que pour $\theta = 0$ et pour un certain $\bar{\mathbf{c}}$ on a :

$$\dim(\text{Lie}_{(0,0,0,\bar{\mathbf{c}})}(\{Y_1(0, \bar{\mathbf{c}}), Y_2(0, \bar{\mathbf{c}})\})) = 6.$$

Le même raisonnement que précédemment nous dit que :

$$\dim(\text{Lie}_{(\mathbf{r},\theta,\mathbf{c})}(\{Y_1(\theta, \mathbf{c}), Y_2(\theta, \mathbf{c})\})) = 6, \quad \forall (\mathbf{r}, \theta, \mathbf{c}).$$

Contrôle de l'amibe : suivi de trajectoire

- Pour toute trajectoire $t \in [0, T] \mapsto (\bar{\mathbf{r}}(t), \bar{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi$,
- pour toute déformation $t \in [0, T] \mapsto \bar{\mathbf{c}}(t) \in \mathcal{E}$,
- pour toute donnée initiale $(\mathbf{r}_0, \theta_0, \mathbf{c}_0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

il existe des fonctions $\alpha_i : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) constantes par morceaux tel que la solution $(\mathbf{r}, \theta, \mathbf{c})$ de :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) Y_i(\theta, \mathbf{c}), \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0) \\ \theta(0) \\ \mathbf{c}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \theta_0 \\ \mathbf{c}_0 \end{pmatrix},$$

vérifie :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(\mathbf{r}, \theta, \mathbf{c}) - (\bar{\mathbf{r}}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{c}})\| < \varepsilon,$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(T) \\ \theta(T) \\ \mathbf{c}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}(T) \\ \bar{\theta}(T) \\ \bar{\mathbf{c}}(T) \end{pmatrix}.$$

L'amibe peut suivre de façon approchée n'importe quelle trajectoire prescrite, avec des déformations elles aussi prescrites.

Simulations numériques

Quelques exemples de suivi de trajectoires :

