CHAPITRE 5

GEOMETRIE EUCLIDIENNE

CHAPITRE 5

GEOMETRIE EUCLIDIENNE

5.1. — LES ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS :

Définition 5.1.1. —

Un espace vectoriel réel E de dimension finie n muni d'un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire non dégénérée dont la forme quadratique est définie positive) est appelé un espace euclidien.

On note $(.,.)$ le produit scalaire.

Ecriture dans une base orthonormée 5.1.2. —

Soit $(E,(.,.))$ un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$.

Soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de E, i.e. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Soient $x, y \in E$, alors il existe $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$.

Dans cette base, on a $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

La forme quadratique associée est donnée par : $\|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ et ainsi la matrice du produit scalaire dans une base orthonormée est la matrice identité.

Et tout $x \in E$ s'écrit $x = (x, e_1)e_1 + ... + (x, e_n)e_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$.

La norme de E 5.1.3. —

La longueur $\|x\|$ est une norme sur E.

Démonstration : on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 +$

$2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$ d'où $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (cette inégalité est appelée *inégalité de Cauchy-Schwartz*).

La distance sur E 5.1.4. —

La norme définie ci-dessus fait de E un espace métrique muni de la distance $d(x,y)=\|x-y\|$ pour $x,y \in E$.

Propriétés 5.1.5. — Pour tout $x,y \in E$ on a :

i) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y)$. Donc, si $x \perp y$, $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

ii) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

iii) $\|x\|^2-\|y\|^2=(x+y,x-y)$. Donc, $\|x\|=\|y\| \Longleftrightarrow (x+y,x-y)=0$.

iv) $|\|x\|-\|y\|| \leq \|x+y\|$.

Procédé de Gram-Schmidt 5.1.6. —

A partir d'une base $\{u_1,...,u_n\}$ d'un espace euclidien E de dimension n, on fabrique une et une seule base orthonormée $\{e_1,...,e_n\}$ de E telle que $e_i=\sum_{j=1}^{i}\lambda_j u_j$ avec $\lambda_i>0$.

Le procédé de fabrication d'une telle base est appelé *Procédé de Gram-Schmidt*.

En effet, on pose successivement $e_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}$, $e'_i=u_i-\sum_{j=1}^{i-1}(u_i,ej)e_j$ et $e_i=\dfrac{e'_i}{\|e'_i\|}$.

Lemme 5.1.7. — Soit E un espace euclidien et E^* son dual. Soit $\mathcal{R}$ l'isomorphisme induit par le produit scalaire de E sur E^*, on pose :

$$<\alpha,\beta>=(\mathcal{R}^{-1}(\alpha),\mathcal{R}^{-1}(\beta))$$

On a alors :

i) $(\mathcal{R}^{-1}(\alpha),x)=\alpha(x)$ pour tout $x \in E$.

ii) Si (e_i) est une base orthonormée de E, $<\alpha,\beta>=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i)\beta(e_i)$

iii) $<.,.>$ est un produit scalaire sur E^*.

Démonstration :

i) Comme $\mathcal{R}$ est un isomorphisme, alors pour tout $\alpha \in E^*$ il existe un et un seul $y \in E$ tel que $(.,y)=\alpha$ c'est-à-dire $\alpha(x)=(x,y)$ pour tout $x \in E$ et ainsi, comme $y=\mathcal{R}^{-1}(\alpha)$, on a $(\mathcal{R}^{-1}(\alpha),x)=\alpha(x)$ pour tout $x \in E$.

ii) Soit (e_i) est une base orthonormée de E, soit $\alpha, \beta \in E^*$, alors $\alpha(e_i) = \lambda_i$ et $\beta(e_i) = \mu_i$, donc :

$\mathcal{R}^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad et \quad \mathcal{R}^{-1}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$

$< \alpha, \beta >= (\phi^{-1}(\alpha), \mathcal{R}^{-1}(\beta)) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i)\beta(e_i)$ car $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

iii) Il est clair que l'application $\phi : E^* \times E^* \longrightarrow E \times E$ définie par :

$$\phi(\alpha, \beta) = (\mathcal{R}^{-1}(\alpha), \mathcal{R}^{-1}(\beta))$$

est une application bilinéaire et par conséquent $< ., . >$ est une forme bilinéaire. Comme f est symétrique, alors $< ., . >$ est symétrique.

Nous avons démontré que $< ., . >$ est une forme bilinéaire symétrique, et comme : $< \alpha, \alpha >= \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i)^2$, la forme quadratique qui lui est associée est définie positive et ainsi, $< ., . >$ est un produit scalaire sur E^*.

Lemme 5.1.8. — Soit E un espace Euclidien muni du produit scalaire $(., .)$. Soit $f \in \mathcal{B}il(E)$. Alors il existe $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(x, y) = (x, \psi(y))$; $\forall x, y \in E$.

Dans une base donnée, Les matrices de f et de ψ sont égales.

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{B}il(E)$. Le produit scalaire permet de définir un isomorphisme de E sur E^* (car non dégénéré défini positif), alors comme pour tout $y \in E$, $f_{(.,y)} \in E^*$, il existe $\psi(y) \in E$ tel que $f(x, y) = f_{(.,y)}(x) = (x, \psi(y))$ pour tout $x \in E$. On a pour tout $x \in E$:

$(x, \psi(\lambda y + z)) = f(x, \lambda y + z) = \lambda f(x, y) + f(x, z) = \lambda(x, \psi(y)) + (x, \psi(z)) = (x, \lambda\psi(y) + \psi(z))$.

Comme $(., .)$ est non dégénérée, alors $\psi(\lambda y + z) = \lambda\psi(y) + \psi(z)$.

Donc, il existe $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(x, y) = (x, \psi(y))$; $\forall x, y \in E$.

Soit (e_i) une base orthonormée de E pour le produit scalaire $(., .)$. On a $\psi(e_j) = \sum a_{ij} e_i$, donc $A = (a_{ij})$ est la matrice de ψ dans cette base.

Comme $f(e_i, e_j) = (e_i, \psi(e_j)) = a_{ij}$, alors les matrices de f et de ψ sont égales.

Définition 5.1.9. —
Soit E un espace Euclidien muni du produit scalaire $(.,.)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.
On appelle projection orthogonale sur F l'application $proj_F : E \longrightarrow F$ définie par : $proj_F(x+y) = x$ où $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$.

Lemme 5.1.10. — Soit E un espace Euclidien muni du produit scalaire $(.,.)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :
i) $\|proj_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.
ii) Si $F =< u >$ avec $u \neq 0$, alors pour tout $x \in E$ on a : $proj_F(x) = \dfrac{(x,u)}{\|u\|^2}u$.
ii) Si F est un hyperplan avec $F = Ker\varphi$ (φ étant une forme linéaire), alors pour tout $x \in E$ on a : $proj_F(x) = x - \dfrac{\varphi(x)}{\|u\|^2}u$ où u est un vecteur non nul orthogonal à F.

Démonstration :

i) Si F est de dimension r, soit $\{e_1, ..., e_r\}$ une base orthonormée de F et $\{e_{r+1}, ..., e_n\}$ une base orthonormée de $F^{\perp}$. Alors tout $x \in E$ est donné par $x = a_1e_1 + ... + a_re_r + a_{r+1}e_{r+1} + ... + a_ne_n$, et ainsi :
$proj_F(x) = a_1e_1 + ... + a_re_r \quad et \quad proj_{F^{\perp}}(x) = a_{r+1}e_{r+1} + ... + a_ne_n = x - proj_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}(x,e_i)e_i$. On a :
$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{r} a_i^2 = \|proj_F(x)\|.$$

ii) On suppose $dimF = 1$. Soit $\{u\}$ une base de F, alors $\{\dfrac{u}{\| u \|}\}$ est une base orthonormée de F. On a $proj_F(x) = \dfrac{(x,u)}{\| u \|^2}u$.

iii) Soit u un vecteur non nul de E et $F = u^{\perp}$. Comme $proj_F(x) = proj_{u^{\perp}}$, on a $proj_F(x) = x - \dfrac{(x,u)}{\| u \|^2}u$.

Soit F un hyperplan vectoriel de E et soit $\phi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ une forme linéaire sur E telle que $F = Ker\phi$.

On a $dimF^{\perp} = 1$ et pour tout $x \in F$, $(x,a) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$, d'où

$a \in F^{\perp}$ et comme $a \neq 0$, alors il forme une base de $F^{\perp}$. Par ce tout qui précède, $F = a^{\perp}$ donc, $proj_F(x) = x - \dfrac{\phi(x)}{\| a \|^2} a$.

Notation 5.1.11. —

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note O_E le groupe orthogonale au lieu de $O_E(\|.\|^2)$.

On note SO_E le sous-groupe des rotations.

Dans Dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ dans la base canonique, on a :

$O_{\mathbb{R}^n} = O(n) = \{g \in GL(n;\mathbb{R})/g^tg = I_n\}$ et $SO_{\mathbb{R}^n} = SO(n) = O(n) \cap SL(n;\mathbb{R})$.

Proposition 5.1.12. —

Soit E un espace euclidien. Si f est une application de E dans E telle que :

$$\begin{cases} i) \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E \\ ii) \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si $f \in O_E$.

Démonstration :

a) pour tout $x, y \in E$ on a :

$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2(f(x), f(y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(f(x), f(y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x, y)$, d'où $(f(x), f(y)) = (x, y)$.

b) Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de E, alors $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est une base orthonormée de E ; en effet, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0 \Longrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i), f(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f(e_i), f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_j = 0$ pour tout j.

c) Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(x), f(e_i)) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) f(e_i)$

Donc, $c \Longrightarrow f$ est linéaire, $b \Longrightarrow f$ est bijective et $a \Longrightarrow f$ est une isométrie.

L'autre sens est évident.

Lemme 5.1.13. —

Le groupe O_E opère simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthogonormées de E.

Démonstration laissée au lecteur.

Définition 5.1.14. — Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ n vecteurs d'un espace euclidien E.
i) On appelle déterminant de Gram des vecteurs $\{x_1, ..., x_n\}$, noté $Gram(x_1, ..., x_n)$, le nombre réel :

$$Gram(x_1, ..., x_n) = det \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & .... & (x_1, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & .... & (x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

ii) On appelle volume euclidien des vecteurs $\{x_1, ..., x_n\}$ le nombre :

$$\omega(x_1, ..., x_n) = \sqrt{Gram(x_1, ..., x_n)}$$

Lemme 5.1.15. —
i) $Gram(x_1, ..., x_n) \geq 0$.
ii) $Gram(x_1, ..., x_n) = 0 \Longleftrightarrow \{x_1, ..., x_n\}$ lié.

Démonstration :

Soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de E et soit f l'application linéaire définie par $f(e_i) = x_i$. Si on note A la matrice de f dans la base B, on a :

$$\begin{pmatrix} (x_1, x_1) & .... & (x_1, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & .... & (x_n, x_n) \end{pmatrix} = {}^tAA$$

et ainsi,

$$Gram(x_1, ..., x_n) = det(A)^2 \geq 0$$

On sait que $detA = 0 \Longleftrightarrow \{x_1, ..., x_n\}$ lié

Lemme 5.1.16. — L'action du groupe SO_E sur l'ensemble des bases orthonormées admet deux orbites.

Démonstration :

L'application linéaire qui envoie une base orthonormée sur une autre base est une isométrie, donc son détérminant vaut ± 1.

Définition 5.1.17. —

i) On dit que deux bases orthonormées de E définissent la même orientation si elles sont dans la même orbite sous l'action de SO_E.
ii) On appelle orientation de E le choix d'une orbite sous l'action de SO_E. On dit qu'une base est positive (ou directe) si elle est dans l'orientation choisie, elle est négative (ou indirecte) dans le cas contraire.
iii) On dit qu'un automorphisme de E conserve (resp. renverse) l'orientation si son déterminant est positif (resp. négatif).

Exemple 5.1.18. —
i) Soit D une droite euclidienne (i.e. un espace euclidien de dimension 1).
Soit u un vecteur non nul de D, alors $e = \dfrac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire, en fait D n'admet que deux vecteurs unitaires à savoir e et $-e$.
Dans ce cas, le choix d'une orientation est équivalent à celui de l'un des deux vecteurs unitaires.
Soit $\sigma \in O_D$, comme $\sigma(e)$ est un vecteur unitaire, $\sigma(e) = \pm e$ et par conséquent, $\sigma = \pm id_D$ d'où $O_D = \{id_D, -id_D\}$ et $SO_D = \{id_D\}$.

ii) Soit P un plan euclidien (i.e. un espace euclidien de dimension 2).
Soit $B = \{e_1, e_2\}$ une base orthonormée de P. Soit $\sigma \in O_P$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base B. On a alors :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$$
donc $b = -\varepsilon c$ et $a = \varepsilon d$ et par conséquent,
$O_P = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1\} \cup \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1\}$
et $SO_P = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1\}$.
Soit la base orthonormée $B' = \{e_2, e_1\}$, les deux orbites sous l'action de SO_P sont :
$O_1 = \{\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\}/a^2 + b^2 = 1\}$ et $O_2 = \{\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\}/a^2 + b^2 = 1\}$
Dans ce cas, le choix d'une orientation est équivalent à celui de l'une des deux bases orthonormées B ou B'.

iii) Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit $f \in O_3$ et posons $F = \{x \in E / f(x) = x\}$ qui est un sous-espace de E. On a alors quatre cas possibles :

1**er cas :** $dimF = 3$: Dans ce cas $f = id_E$.

2**ème cas :** $dimF = 2$: Dans ce cas F est un plan et $F^{\perp} = D$ est une droite telle que $f_{|D} = -id$ et par conséquent, f est une symétrie orthogonale par rapport à F.

3**ème cas :** $dimF = 1$: Dans ce cas F est une droite et $F^{\perp} = P$ est un plan tel que $f_{|P}$ est sans point fixe, et par conséquent, $f_{|P} \in SO(P)$, donc $f \in SO_3$.

4**ème cas :** $dimF = 0$: Dans ce cas $f(x) \neq x$ pour tout $x \in E - \{0\}$. On pose $D =< f(x) - x >$ la droite engendré par le vecteur non nul $f(x) - x$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $D^{\perp}$. Il est calir que $s \circ f$ admet es points fixes et que $s \circ f \in SO_3$. Ainsi, $f \notin SO_3$.

Dans une base bien choisie : $SO_3 = \{ \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / r \in \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 5.1.19. —
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n. On appelle produit mixte des vecteurs $\{u_1, ..., u_n\}$, qu'on note $(u_1, ..., u_n)$, le déterminant de la matrice $(u_1, ..., u_n)$ dans une base orthonormée directe.

Remarque 5.1.20. —
i) $(u_1, ..., u_n) \neq 0 \Longleftrightarrow \{u_1, ..., u_n\}$ est libre.
ii) $Gram(u_1, ..., u_n) = (u_1, ..., u_n)^2$.

Lemme 5.1.21. —
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n. Soit $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ des vecteurs de E, alors il existe un et un seul vecteur $y \in E$ tel que $(y, x) = (u_1, ..., u_{n-1}, x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration : On se donne une base directe. On sait que l'application det :

$E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme n-linéaire, i.e. linéaire par rapport à chaque variable, en particulier par rapport à la dernière variable :

$det_{(u_1,...,u_{n-1})} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $det_{(u_1,...,u_{n-1})}(x) = det(u_1, ..., u_{n-1}, x)$ est une forme linéaire, i.e. $det_{(u_1,...,u_{n-1})} \in E^*$. Par le lemme 5.1.7., il existe un et un seul vecteur $y \in E$ tel que $(y, x) = (u_1, ..., u_{n-1}, x)$ pour tout $x \in E$.

Définition 5.1.22. —

Dans un espace euclidien orienté E, l'unique vecteur associé à la donnée des vecteurs $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ est appelé produit vectoriel des vecteurs $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$, on le note $u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1}$.
On a : $(u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1}, x) = (u_1, ..., u_{n-1}, x)$.

Propriétés 5.1.23. — Soit E un espace euclidien orienté.
i) $u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow \{u_1, ..., u_{n-1}\}$ lié.
ii) $u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1} \perp u_i$ pour tout i.
iii) Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base orthonormée, alors pour tout $\sigma \in S_n$ (le groupe symétrique) on a : $e_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge e_{\sigma(n-1)} = \varepsilon(\sigma) e_{\sigma(n)}$.

Démonstration : Toutes ses propriétés découlent de celles du déterminant.

5.2. — LES ESPACE AFFINES EUCLIDIENS :

Définition 5.2.1. —

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension n.
On dit que $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien si $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel euclidien i.e. muni d'un produit scalaire $(.,.)$.

Remarque 5.2.2. — Un espace affine euclidien est muni de la distance $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.

Propriétés de la distance 5.2.3. — Pour $M, N, P \in \mathcal{E}$, on a :
i) $d(M, N) = d(N, M)$.
ii) $d(M, P) \leq d(M, N) + d(N, P)$.
iii) $d(M, N) \geq 0$ et $d(M, N) = 0 \Longleftrightarrow M = N$.

Démonstration :

i) $\|\overrightarrow{MN}\| = \|-\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{NM}\|$.

ii) $\|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| \leq \|\overrightarrow{MN}\| + \|\overrightarrow{NP}\|$.

iii) $\|\overrightarrow{MN}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MN} = 0 \Longleftrightarrow M = N$.

Définition 5.2.4. —
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien.
Une isométrie affine σ sur $\mathcal{E}$ est une bijection affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui preséerve la distance, i.e. $d(\sigma(M), \sigma(N)) = d(M, N)$ pour tout $M, N \in \mathcal{E}$.
On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Lemme 5.2.5. — Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien.
Une application affine est une isométrie affine sur $\mathcal{E}$ si et seulement si son application linéaire associée σ est une isométrie de E.

Démonstration :

Pour A fixé dans $\mathcal{E}$, l'application $\phi_A : \mathcal{E} \longrightarrow E$ définie par $\phi_A(M) = \overrightarrow{AM}$ est une bijection.

$\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}, \exists! M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AM}$ on a alors :
$\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})\| = \|\overrightarrow{f(A)f(M)}\| = d(f(A), f(M)) = d(A, M) = \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{x}\|$.

Dans l'autre sens c'est évident.

Lemme 5.2.6. —
i) Les translations sont des isométries affines.
ii) $Is(\mathcal{E})$ est un groupe pour la composition des applications.
iii) Le groupe $Is(\mathcal{E})$ est produit semi-directe des translations par le groupe des isométries laissant un point fixe.

Démonstration :

i) Pour tout $M, N \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on a : $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{v}}(M) t_{\overrightarrow{v}}(N)} = \overrightarrow{MN}$.

ii) $Is(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $AGL(\mathcal{E})$.

iii) Démonstration laissée au lecteur.

Théorème 5.2.7. — Soit $f \in Is(\mathcal{E})$. Il existe un couple unique formé d'une isométrie affine g et d'une translation $t_{\overrightarrow{v}}$ tel que :

i) $F = \{M \in \mathcal{E} / g(M) = M\} \neq \emptyset$.

ii) $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$.

iii) $f = t_{\overrightarrow{v}} o g$

iv) $\overrightarrow{F} = Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$ et $g o t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} o g$.

Démonstration : On montre d'abord que $\overrightarrow{E} = Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}) \oplus^{\perp} Im(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$.

Si $\overrightarrow{x} \in Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}) \cap Im(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$ on a :
$\|\overrightarrow{x}\|^2 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) - \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})) - (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) - (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}$, d'où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Vu que la somme des dimensions des deux espaces vaut n, il reste à montrer qu'ils sont orthogonaux.

Soit $\overrightarrow{v} \in Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{u} \in Im(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$, on a alors : $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})) - (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$.

D'où $\overrightarrow{E} = Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}) \oplus^{\perp} Im(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$.

Soit $M \in \mathcal{E}$, alors il existe $\overrightarrow{v} \in Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{u} \in Im(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

Posons $A = M - \overrightarrow{x}$ avec $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}$.

Alors $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{f(M)f(A)}$
$= \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{f}(-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}$.

Posons $g = t^{-1}_{\overrightarrow{v}} o f$, on voit que A est un point fixe de g et le théorème en découle.

Pour l'unicité : posons $\overrightarrow{F} = Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}})$, alors la projection orthogonale de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\overrightarrow{F}$ est indépendante de M et définit en fait le vecteur $\overrightarrow{v}$.

Corollaire 5.2.8. — Soit $f \in Is(\mathcal{E})$.
Si $Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}) = \{\overrightarrow{0}\}$, alors f admet un point fixe unique.

Exemple 5.2.9. — Isométries affines en dimension 2 et 3.

i) $n = 2$:

Les isométries directes : $\overrightarrow{f}$ est une rotation dans un espace de dimension 2; donc si $\overrightarrow{f} \neq id$, $\overrightarrow{f}$ admmet un seul point fixe à savoir $\overrightarrow{0}$ et par suite f

admet un seul point fixe et f est une rotation autour de ce point.

Les isométries indirectes : $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\overrightarrow{D}$, il en résulte que g est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$ de direction la droite $\overrightarrow{D}$ et $f = t_{\overrightarrow{v}} o g$.
Une telle transformation est appelée une symétrie-translation.

ii) $n = 3$:
Les isométries directes : $\overrightarrow{f}$ est une rotation autour d'un axe $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$; la transformation f est appelée un vissage.
Les isométries indirectes : Il y a deux types distincts ; celles qui sont de la forme $ro\sigma_H$ où r est une rotation d'axe orthogonal à l'hyperplan H et σ_H est la symétrie orthogonale par rapport à H et celle qui s'écrivent $t_{\overrightarrow{v}} o\sigma_H$ où $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{H}$.

5.3. — LES ANGLES ORIENTES :

Soit P un plan euclidien muni du produit scalaire $< .,. >$.
Soit $\mathcal{U} = \{u \in P / \|u\| = 1\}$.
Le groupe $SO(P)$ agit sur $\mathcal{U}$ par : $g.u = g(u)$ et sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ par : $g.(u,v) = (g(u), g(v))$.

Proposition 5.3.1. —
i) L'action de $SO(P)$ sur $\mathcal{U}$ est simplement transitive.
ii) Si on fixe $u \in P$, $\{(u, g(u))/g \in SO(P)\}$ sont les représentants des orbites de l'action de $SO(P)$ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Démonstration :
i) Dans une base orthonormée, $SO(P) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1\}$, soit $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, alors $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
Il est clair que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Donc l'action est transitive.
Si $g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $g = id$. Donc l'action est simple.
ii) On fixe $u \in P$.
*) Pour tout $(v, w) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, il existe un unique couple $(g, h) \in SO(P)^2$ tel que $(v, w) = h.(u, g(u))$.

Car $\exists ! h \in SO(P)$ tel que $h(u) = v$ et $\exists ! g \in SO(P)$ tel que $gh(u) = w$ et ainsi, $(v, w) = (h(u), gh(u)) = (h(u), hg(u))$, ($SO(P)$ est abélien).

Donc, $(v, w) = h.(u, g(u))$.

*) Si $g \neq h$, $(u, g(u))$ et $(u, h(u))$ ne sont pas dans la même orbite.

Car $(u, g(u)) = k.(u, h(u)) \Longrightarrow u = k(u) \Longrightarrow k = id$ et par conséquent, $g(u) = h(u)$, d'où $g = h$.

Définition 5.3.2. — Les orbites de l'action de $SO(P)$ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ s'appellent les angles de P.

On note $\mathcal{A}(P)$ leur ensemble.

Remarque 5.3.3. —

i) L'application $\Lambda : SO(P) \longrightarrow \mathcal{A}(P)$ définie par $\Lambda(g) = (u, g(u))$ est une bijection.

ii) On pose $(u, g(u)) \star (u, h(u)) = (u, gh(u))$.

Alors $(\mathcal{A}(P), \star)$ est un groupe abélien et φ est un siomorphisme de groupes.

On choisit sur $\mathcal{A}(P)$ la notation additive.

Définition 5.3.4. — Pour $g \in SO(P)$, $\Lambda(g)$ est appelé l'angle de la rotation g.

Notation 5.3.5. — Soit $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, il existe un et un seul $g \in SO(P)$ tel que $v = g(u)$. On note l'angle $\widehat{(u, v)} = \Lambda(g)$.

Et par extension pour deux vecteurs non nuls u, v, on pose : $\widehat{(u, v)} = (\widehat{\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}})$.

Lemme 5.3.6. — Le groupe $SO(P)$ est isomorphe au groupe Γ_1 des nombres complexes de module 1 et au groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration : Soient les applications :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma_1, \quad \psi : \Gamma \longrightarrow SO(P)$$

définies par :

$$\varphi(t) = e^{it} \quad et \quad \psi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Il est clair que φ est un homomorphisme surjectf de groupes tel que $Ker\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$, et que ψ est un isomorphisme de groupes.

Propriétés élémentaires 5.3.7. —
i) $\widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} = \widehat{(u,w)}$.
ii) $(u,v) = \|u\|\|v\|\cos(\widehat{(u,v)})$.
iii) $\widehat{(u,v)} = \widehat{(v,u)}$.
iv) $\widehat{(u,-v)} = \pi - \widehat{(u,v)}$.
v) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\widehat{(u,v)})$.
vi) On a $\Lambda(I_2) = 0$: l'angle nul, $\Lambda(-I_2)$: l'angle plat.

Définition 5.3.8. — On appelle angle de deux droites orientées l'angle des vecteurs unitaires qui définissent l'orientation.

5.4. — Les coniques :

Définition 5.4.1. — Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de dimension n associé à l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$.
a) Une appilcation $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite un polynôme de degré 2 sur $\mathcal{E}$ s'il existe un repère $\{O, A_1, ..., A_n\}$ et un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ de degré 2 tels que : $q(O + \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OA_i}) = Q(x_1, ..., x_n)$ pour tous $x_i \in \mathbb{R}$.
b) Deux polynômes q et q' sont équivalents s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une transformation affine σ de $\mathcal{E}$ tels que $q' = \lambda q \circ \sigma$. On note $q = q'$.
c) Deux polynômes q et q' sont isométriques s'il existe $\sigma \in O(\mathcal{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $q' = \lambda q \circ \sigma$.
c) On appelle quadrique affine sur $\mathcal{E}$ la classe d'équivalence d'un polynôme de degré 2 sur $\mathcal{E}$.
d) On appelle points de la conique q rationnels sur $\mathbb{R}$ le sous-ensemble $\Gamma_q = \{T \in \mathcal{P}/q(T) = 0\}$.

Remarque 5.4.2. —
i) Le polynôme Q est unique.
ii) Si $\{O', B_1, .., B_n\}$ un autre repère de $\mathcal{E}$, alors il existe $Q' \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tels

que : $q(O+\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{OB_i}) = Q'(x_1,...,x_n)$ pour tous $x_i \in \mathbb{R}$.
iii) On peut avoir deux coniques non équivalentes telles que leurs points rationnels sur $\mathbb{R}$ coincident.

Proposition 5.4.3. — Soit q une quadrique sur $\mathcal{E}$.
Soit $O \in \mathcal{E}$, alors il existe une forme quadratique Q et une forme linéaire φ_O sur $\overrightarrow{E}$ et un scalaire $\lambda_O \in \mathbb{R}$ tels que :

$$q(X) = Q(\overrightarrow{OX}) + \varphi_O(\overrightarrow{OX}) + \lambda_O$$

Définition 5.4.4. — On appelle forme quadratique associée à q la forme $\Phi_{(q,O)}$ définie sur $\overrightarrow{E} \times \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_{(q,O)}(\overrightarrow{OX}, z) = Q(\overrightarrow{OX}) + \varphi_O(\overrightarrow{OX}).z + \lambda_O.z^2$$

Une quadrique est dite propre si $rg\Phi_{(q,O)} = n+1$.

Proposition 5.4.5. — Soient les polynômes de $\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ suivants :

$$Q_{(r,s)}(X) = X_1^2 + ... + X_r^2 - X_{r+1}^2 - ... - X_{r+s}^2 \quad avec \quad 1 \le r \le r+s \le n, s \le r$$

$$P_{(r,s)}(X) = X_1^2 + ... + X_r^2 - X_{r+1}^2 - ... - X_{r+s}^2 - 1 \quad avec \quad 1 \le r \le r+s \le n$$

$$T_{(s)}(X) = -X_1^2 - ... - X_s^2 - 1 \quad avec \quad 1 \le r \le r+s \le n, s \le r$$

$$L_{(r,s)}(X) = X_1^2 + ... + X_r^2 - X_{r+1}^2 + ... + X_{r+s}^2 - X_n \quad avec \quad 1 \le r \le r+s < n, s \le r$$

Toute quadrique sur un espace affine euclidien de dimension n est dans la classe d'équivalence de l'un des polynômes ci-dessus.

Démonstration : laissée au lecteur

Les quadriques affines euclidiennes en dimension deux 5.4.6. —
Considèrons un polynôme du second degré en x et y de la forme

$$P(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Ex + 2Fy + k$$

(avec l'un des trois termes A, B ou D, au moins, différent de 0)

L'ensemble C_P des points $M(x,y)$ dans un repère donné, tels que $P(x,y)=0$, est appelé une conique du plan, d'équation $P(x,y)=0$.

La quadrique est équivalente à l'une des quadriques suivantes :

I) $Q_{(1,0)}(x,y)=x^2$, C est une droite (ou plutôt deux droites confondues).

Exemple : $P(x,y)=x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$. Alors C est la droite affine d'équation : $x+y+1=0$.

On a : $P(x,y)=Q_{(1,0)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y)=(x+y+1,y)$.

II) $Q_{(1,1)}(x,y)=x^2-y^2$, C deux droites concourantes.

On a la famille de droites concourantes isométriques :

$$C_a(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-a^2\frac{y^2}{b^2},\quad avec\quad 1\geq a>0$$

Exemple : $P(x,y)=x^2-y^2+2xy+2x+2y+1$.

On a : $P(x,y)=Q_{(1,1)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y)=(x+y+1,\sqrt{2}y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

III) $Q_{(2,0)}(x,y)=x^2+y^2$, C est un point.

Exemple : $P(x,y)=x^2+3y^2+2xy+2x+2y+1$.

On a : $P(x,y)=Q_{(2,0)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y)=(x+y+1,\sqrt{2}y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

IV) $P_{(1,0)}(x,y)=x^2-1$, C deux droites parallèles.

On a la famille de deux droites parallèles isométriques :

$$D_{a,b}(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-1,\quad avec\quad a>0$$

Exemple : $P(x,y)=x^2+y^2+2xy+2x+2y$.

On a : $P(x,y)=P_{(1,0)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y)=(x+y+1,y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

V) $P_{(1,1)}(x,y)=x^2-y^2-1$, C est une hyperbole.

On a la famille d'hyperboles isométriques :

$$H_{a,b}(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1,\quad avec\quad a>0,b>0$$

Exemple : $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y$.

On a : $P(x,y) = P_{(1,1)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y) = (x+y+1, \sqrt{2}y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

VI) $P_{(2,0)}(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, C est une ellipse.

On a la famille d'ellipse isométriques :

$$E_{a,b}(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad avec \quad a \geq b > 0$$

Si $a = b$, C est appelé un cercle.

Exemple : $P(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + 2x + 2y$.

On a : $P(x,y) = P_{(2,0)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y) = (x+y+1, \sqrt{2}y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

VII) $T_1(x,y) = -x^2 - 1$, C est l'ensemble vide (ou deux droites imaginaires parallèles).

VIII) $T_2(x,y) = -x^2 - y^2 - 1$, C est l'ensemble vide (ou l'ellipse imaginaire).

IX) $L_{1,0}(x,y) = x^2 - y$, C est une parabole.

On a la famille de paraboles isométriques :

$$P_a(x,y) = a^2x^2 + -y, \quad avec \quad a > 0$$

Exemple : $P(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + y - 1$.

On a : $P(x,y) = P_{(2,0)}(\sigma(x,y))$ avec $\sigma(x,y) = (x+y+1, y)$. Il est clair que σ n'est pas une isométrie.

Les quadriques affines euclidiennes en dimension trois 5.4.7. — Considèrons un polynôme du second degré en x, y et z de la forme

$$P(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Lz + k$$

(avec l'un des termes A, B,C, D, E ou F, au moins, différent de 0)

On a l'ensemble C_P des points $M(x,y,z)$ dans un repère donné, tels que $P(x,y,z) = 0$.

La quadrique est équivalente à l'une des quadriques suivantes :

I) $Q_{(1,0)}(x, y, z) = x^2$, C un plan (ou plutôt deux plans confondus).

II) $Q_{(1,1)}(x, y, z) = x^2 - y^2$, C deux plans qui se coupent.

III) $Q_{(2,0)}(x, y, z) = x^2 + y^2$, C est une droite.

IV) $Q_{(2,1)}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, C est un cône de base elliptique.

V) $Q_{(3,0)}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, C est un point

VI) $P_{(1,0)}(x, y, z) = x^2 - 1$, C deux plans parallèles.

VII) $P_{(1,1)}(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1$, C est un cylindre de base hyperbolique.

VIII) $P_{(2,0)}(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, C est un cylindre de base elliptique.

IX) $P_{(2,1)}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, C est une hyperboloïde à une nappe.

X) $P_{(3,0)}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, C est une ellipsoïde.

XI) $P_{(1,2)}(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$, C est une hyperboloïde à deux nappes.

XII) $T_1(x, y, z) = -x^2 - 1$, C est l'ensemble vide (ou deux plans imaginaires parallèles).

XIII) $T_2(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 1$, C est l'ensemble vide (ou le cylindre imaginaire).

XIV) $T_3(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 - 1$, C est l'ensemble vide (ou l'ellibsoïde imaginaire).

XV) $L_{1,0}(x, y, z) = x^2 - z$, C est un cylindre de base parabolique.

XVI) $L_{1,1}(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$, C est une hyperboloïde parabolique.

XVII) $L_{2,0}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, C est une paraboloïde elliptique.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 5

Exercice 5.1. —

On donne les deux points $A(a,b)$ et $B(c,d)$. Montrer que l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux est le cercle de diamètre $\|\overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 5.2. — On se place dans le cas de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

i) Montrer que $SO(2) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} /\theta \in \mathbb{R}\}$. Tout élément de $SO(2)$ est appelé rotation d'angle θ.

ii) On pose $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$.

Montrer que $SO(2) \cong S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

iii) Montrer que $O(2) \cong D_{S^1}$.

Exercice 5.3. —

On se place dans le cas de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

i) Déterminer les groupes $O(3)$ et $SO(3)$.

ii) On appelle rotation d'angle θ tout élément de $SO(3)$ conjugué à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On appelle renversement les rotations d'angle π.

Montrer qu'un renversement est la symétrie orthogonale par rapport à son axe.

Exercice 5.4. — Calculer les coordonnées des points communs au cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - 5x - y = 0$ et à la droite (D) d'équation $x - y + 1 = 0$.

Exercice 5.5. —

On donne le cercle (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

et la droite (D) d'équation $y = mx$.

a) Calculer les coordonnées du point $M(m)$ commun à (C) et (D) et distinct de l'origine.

b) Ecrire l'équation de la droite joignant les deux points $M(m_1)$ et $M(m_2)$.

Exercice 5.6. —

Soit E un espace Euclidien de dimension 3.

i) On donne la droite D d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

Déterminer la projection orthogonale de D sur le plan d'équation :

$$x+2y+3z-6=0$$

ii) a) Déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites D_1 et D_2 définies respectivement par :

(D_1)
$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

et

(D_2)
$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$$

b) Calculer la plus courte distance de (D_1) et (D_2).

Exercice 5.7. —

Sur l'espace vectoriel réel E, des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$, on définit :

$$< x, y >= \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$$

On considère le sous-espace vectoriel E_{n+1} de E engendré par les polynômes $1, t, t^2, ..., t^n$.

i) On vérifie facilement que $(E_{n+1}, < .,. >)$ est un espace euclidien de dimension $n+1$.

ii)La base $\{p_0(t), ..., p_n(t)\}$ de Schmidt associée pour les premières valaeurs $k=0,1,2,3$ est :

$$p_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad p_2(t)=\sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1) \quad et \quad p_3(t)=\sqrt{\frac{7}{8}}(5t^3-3t)$$

iii) Soit le polynôme de Legendre

$$L_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k]$$

On vérifie facilement les deux relations suivantes :

$$i)(k+1)L_{k+1}(t) - (2k+1)L_k(t) + kL_{k-1}(t) = 0$$

$$ii)[(1-t^2)L'_k(t)]' + k(k+1)L_k(t) = 0$$

On multiplie la relation : $kL_k(t) - (2k-1)L_{k-1}(t) + (k-1)L_{k-2}(t) = 0$ par $(2k+1)L_k(t)$ on obtient :

$$(2k+1)kL_k^2(t) - (2k+1)(2k-1)L_k(t)L_{k-1}(t) + (2k+1)(k-1)L_k(t)L_{k-2}(t) = 0$$

On remplace $(2k+1)L_k(t)$ par $(k+1)L_{k+1}(t) + kL_{k-1}(t)$, on obtient :

$$(2k+1)kL_k^2(t) - (2k-1)[(k+1)L_{k+1}(t) + kL_{k-1}(t)]L_{k-1}(t) + (2k+1)(k-1)L_k(t)L_{k-2}(t) = 0$$

Donc : (*)

$$(2k+1)kL_k^2(t) - (2k-1)kL_{k-1}^2(t) = (2k-1)(k+1)L_{k+1}(t)L_{k-1}(t) - (2k+1)(k-1)L_k(t)L_{k-2}(t)$$

D'autre part, on multiplie la relation ii) (avec l'indice k) par $L_j(t)$ et la relation ii) (avec l'indice j) par $L_k(t)$ et on prend la différence des deux expressions, on obtient :
(**)

$$\{(1-t^2)[L'_k(t)L_j(t) - L'_j(t)L_k(t)]\}' + (k-j)(k+j+1)L_k(t)L_j(t) = 0$$

En intégrant la relation (**) on obtient :

$$\left[(1-t^2)[L'_k(t)L_j(t) - L'_j(t)L_k(t)]\right]_{-1}^{1} + (k-j)(k+j+1)\int_{-1}^{1} L_k(t)L_j(t)dt = 0$$

Donc, si $k \neq j$, on a :

$$\int_{-1}^{1} L_k(t)L_j(t)dt = 0$$

et par conséquent, le système des polynômes de Legendre est orthogonal.
En intégrant la relation (*) et en utilisant le résultat ci-dessus, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} L_k^2(t)dt = \frac{2k-1}{2k+1} \int_{-1}^{1} L_{k-1}^2(t)dt$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} L_k^2(t)dt = \frac{3}{2k+1} \int_{-1}^{1} L_1^2(t)dt = \frac{2}{2k+1}$$

On a :

$$p_k(t) = \sqrt{n+\frac{1}{2}} L_k(t)$$

est la base orthonormée de E_{n+1} qu'on obtient par le procédé d'orthogonalisation de la base $\{1, t, ..., t^n\}$ (vu l'unicité). iv) On pose si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - c_i)$$

où c_i est une racine réelle comprise entre -1 et 1 d'ordre impair de $p_i(t)$ ($R(t) = 1$ en l'absence de telles racines).
Montrer que $< p_i, R > \neq 0$. Conclusion ?

Exercice 5.8. —
a) Si U et V sont deux vecteurs orthogonaux, démontrer la relation :

$$U \wedge (U \wedge V) = -U^5.V$$

b) En déduire la relation :

$$U \wedge (U \wedge W) = (U.W)U - U^5.W$$

Exercice 5.9. —
Soit une droite (D) de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$ et deux points quelconques A, B de cette droite. Soit P un point de l'espace Euclidien.
a) Démontrer $\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{V}$

v) Soit d la distance du point P à la droite (D), en déduire la formule :

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{V}\|}{\|\overrightarrow{V}\|}$$

Exercice 5.10. —

L'espace Euclidien est rapporté à un repère orthonormé Oxy. On considère deux points fixes $A(a, b, c)$ et $B(a', b', c')$.

a) Ecrire les matrices :

M de latransformation $MX = (A.X)B$

N de latransformation $NX = (A.B)X$

R de latransformation $RX = A \wedge X$

S de latransformation $SX = B \wedge X$

b) Montrer que $M^2 = \lambda.M$

c) Calcler la matrice $P = R.S$.

d) En déduire la relation $A \wedge (B \wedge X) = (AX)B - (AB)X$.

Exercice 5.11. —

a) Si $X = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, montrer que son orthogonal est la droite D d'équation $ax + by = 0$ (i.e. $D = \{(x, y) \in R^2/ax + by = 0\}$)

b) Montrer que l'orthogonal de la drote $D = \{(x, y) \in R^2/ax + by = 0\}$ est la droite d'équation $bx - ay = 0$.

Exercice 5.12. —

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit euclidien $< ., . >$ standard et de la loi de multiplication suivante : si $q = (t, x, y, z)$ et $q' = (t', x', y', z')$, alors :

$$qq' = (tt'-xx'-yy'-zz', tx'+t'x+yz'-zy', ty'+t'y+zx'-xz', tz'+t'z+xy'-yx')$$

Les éléments de $\mathcal{H}$ sont appelés des quaternions.

On pose $\overline{q} = (t, -x, -y, -z)$. On dit que q est réel si $q = \overline{q}$ et qu'il est quaternion pur si $\overline{q} = -q$ (on note $\mathbb{R}^3$ leur ensemble). On note S l'ensemble des quaternions de norme 1.

I) a) Montrer que $\overline{q + q'} = \overline{q} + \overline{q'}$, $\overline{qq'} = \overline{q'}.\overline{q}$ et que $< q, q' >= \frac{1}{2}(q\overline{q'} + \overline{q}q')$.

b) Montrer que $\mathcal{H}$ est un corps (non commutatif).

c) Montrer que S est un sous-groupe multiplicatif.

II) a) Soit s un quaternion pur non nul ; montrer que $u_s(q) = -sqs^{-1}$ laisse $\mathbb{R}^3$ stable et que sa restriction à $\mathbb{R}^3$ est une symétrie plane de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera le plan des points fixes.

b) Soit s un quaternion pur non nul ; montrer que $\rho_s(q) = sqs^{-1}$ laisse R^3 stable et que sa restriction à $\mathbb{R}^3$ est une isométrie.

c) Montrer que $\rho_s = \rho_q \Longrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $q = \lambda.s$.

d) Montrer que ρ_s est une isométrie directe.

e) Montrer que l'application ρ de $S \longrightarrow SO(3)$ est homomorphisme surjectif de noyau $\{\pm 1\}$.

III) a) Soit s un quaternion non nul ; montrer que l'application $\phi(q) = sq$ est une application linéaire directe de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

b) Soit ss et r deux quaternions de norme 1 ; montrer que l'application $\tau(s,r)(q) = sq\bar{r}$ est isométrie directe de l'espace $\mathcal{H}$.

c) Montrer que $\tau : S \times S \longrightarrow SO(4)$ est un homomorphisme de groupes, surjectif et de noyau $\{(1,1), (-1,-1)\}$.

IV) On note $tr(q) = 2t$. Montrer que l'application $(q, q') = tr(q.\overline{q'})$ est une application bilinéaire symétrique positive et non dégénérée.

Exercice 5.13. —

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme d'un vecteur du plan vectoriel associé $\overrightarrow{P}$. On se donne $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ quatre droites distinctes de $\mathcal{P}$. On suppose qu'elles se coupent 2 à 2 en 6 points distincts :

$$A = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2, B = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3, C = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_4, D = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3, E = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_4, F = \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_4$$

On note M_1, M_2, M_3 les milieux respectifs des segments $[AF]$, $[BE]$ et $[CD]$.

1) Faire une figure et montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

2) On considère une cinquième droite $\mathcal{D}_5$, distinctes des 4 premières et coupant $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ respectivement en G, H, I.

On note N_1, N_2, N_3 les milieux respectifs des segments $[AI]$, $[BH]$ et $[DG]$. Montrer, **sans aucun calcul**, que les points N_1, N_2, N_3 sont alignés.

3) On suppose que la distance entre les points A, B, D est égale à un nombre $d > 0$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C.

3.i) Montrer que pour tout point $M \in \mathcal{P}$ on a :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MD}\|^2 = \|\overrightarrow{GA}\|^2 + \|\overrightarrow{GB}\|^2 + \|\overrightarrow{GD}\|^2 + 3\|\overrightarrow{GM}\|^2$$

3.ii) Montrer que $\|\overrightarrow{GA}\|^2 = \|\overrightarrow{GB}\|^2 = \|\overrightarrow{GD}\|^2 = \delta$ et calculer δ enfontion de d.

3.iii) Montrer que $< \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BD} >=< \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AD} >=< \overrightarrow{GD}, \overrightarrow{AB} >= 0$.

3.iv) Montrer que $< \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} >=< \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GD} >=< \overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GA} >= \mu$ et calculer μ en fonction de d.

4) Soit la droie $\mathcal{D}_4$ telle que $\|\overrightarrow{AC}\| = 2d$ et $\|\overrightarrow{AE}\| = d/2$.

4.i) Calculer $\|\overrightarrow{AF}\|$ et $\|\overrightarrow{AM_i}\|$ pour $1 \leq i \leq 3$.

4.ii) Calculer $< \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AM_i} >$ pour $1 \leq i \leq 3$.

Exercice 5.14. — Soit E un un espace vectoriel euclidien de dimension n.

i) Montrer que dans E, il n'est pas possible de trouver $n+2$ vecteurs $u_0, ..., u_{n+1}$ tels que : $u_i.u_j < 0 \quad ; \quad \forall i \neq j$.

ii) Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ n vecteurs de E. On note $G(u_1, ..., u_n)$ le déterminant de la matrice $(a_{ij} = u_i.u_j)$.

a) Montrer que le système $\{u_1, ..., u_n\}$ est libre si et seulement si $G(u_1, ..., u_n) \neq 0$.

b) Montrer que :

$$G(u_1, ..., u_n) \leq \|u_1\|^2 .... \|u_n\|^2$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 5.15. —

0) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soit $M_1, ..., M_n$ n points queconques de $\mathcal{E}$, et G l'isobarycentre de $M_1, ..., M_n$. Etablir, pour tout $M \in \mathcal{E}$ la formule :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GM_i}^2 + nGM^2$$

1) Dans toute la suite, on suppose que la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à l et que $M_1, ..., M_n$ n points tels que pour $i \neq j$ la distance de M_i à M_j est égale à un nombre $d > 0$, indépendant de i et j.
i) Montrer que $\overrightarrow{GM_i}^2$ est indépendant de i et égal à un nombre δ que l'on calculera en fonction de d.
ii) Montrer que si i, j, k sont trois entiers distincts compris entre 1 et n, alors :

$$\overrightarrow{GM_i}.\overrightarrow{M_j M_k} = 0$$

iii) Montrer que pour $i \neq j$, le produit $\overrightarrow{GM_i}.\overrightarrow{GM_j} = 0$ est égale à une constante μ indépendante de i et j, que l'on exprimera en fonction de d.
iv) Soit I et J deux sous-ensembles disjoints de $\{1, ..., n\}$, et $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\nu_j)_{j \in J}$ deux familles de réels positifs ou nuls. On suppose que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_{j \in J} \nu_j \overrightarrow{GM_j}$$

Montrer qu'alors ou bien $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$, ou bien $\nu_j = 0$ pour tout $j \in J$.
En déduire que si $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$

alors $\gamma_1 = ... = \gamma_n = 0$.
v) En déduire que $n \leq l + 1$ et que si $n = l + 1$, alors la famille $\{M_1, ..., M_n\}$ est affinement libre.

Exercice 5.16. — Soit P un plan affine euclidien. Soit C une partie de P. Montrer que : P est une parabole si et seulement si : il existe une droite D et un point $F \notin D$ tel que $C = \{M \in P / d(M, D) = \||F - M\|\}$.
Déterminer les isométries qui laissent invariant la parabole.

Exercice 5.17. — Soit P un plan affine euclidien. Soit C une partie de P. Montrer que : P est une ellipse si et seulement si : il existe une droite D, un point $F \notin D$ et un réel $e \in]0, 1[$ tel que $C = \{M \in P / e.d(M, D) = \||F - M\|\}$.

Déterminer les isométries qui laissent invariant l'ellipse.

Exercice 5.18. — Soit P un plan affine euclidien. Soit C une partie de P. Montrer que : P est une hyperbole si et seulement si : il existe une droite D, un point $F \notin D$ et un réel $e > 1$ tel que $C = \{M \in P / e.d(M, D) = \||F - M\|\}$. Déterminer les isométries qui laissent invariant l'hyperbole.

Devoir sur le chapitre 5

Problème 5.1. —

Soit K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, E un espace vectoriel de dimension 2 sur K et L l'espace des endomorphismes linéaires de E. Pour tout $f \in L$, on note $Kerf$ le noyau de f, Imf son image et $det(f)$ son déterminant. Soit l'application $Q : L \longrightarrow K$ définie par : $Q(f) = det(f)$ pour tout $f \in L$.

0) Quelle est la dimension de L ?

i) Montrer que Q est une forme quadratique non dégénérée sur L. La forme Q Est-elle hyperbolique ?

ii) Montrer que si deux éléments isotropes f et g de L vérifient $Kerf = Kerg$ et $Imf = Img$, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $g = \lambda f$.

iii) Soit deux éléments f et g de L tels que f, g et $h = f + g$ soient isotropes. Montrer que ou bien $Kerf = Kerg$ ou bien $Imf = Img$ et que si $Kerf = Kerg$ alors $Imf \neq Img$.

iv) Soit D une droite de E. On note $F_D = \{f \in L/D \subset Kerf\}$ et $G_D = \{f \in L/D \subset Imf\}$. Montrer que F_D et G_D sont des plans vectoriels de L.

v) Soit D et Δ deux droites distinctes de E.

a) Montrer que $L = F_D \oplus F_\Delta = G_D \oplus G_\Delta$.

b) Montrer que $F_D \cap G_\Delta$ est une droite de L.

vi) Montrer que tout sous-espace totalement isotrope maximal de (L, Q) est de la forme F_D ou G_D pour une droite D de E.

vii) Montrer que toute droite isotrope de (L, Q) est de la forme $F_D \cap G_\Delta$ pour un couple de droites (D, Δ) de E.

Problème 5.2. —

Soit un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 associé à un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ orienté.

On considère un ensemble $\{0, A, B, C\}$ constitué de quatre points tels que les vecteurs $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$ et $w = \overrightarrow{OC}$ soient unitaires et que les trois produits scalaires (u, v), (w, u) et (v, w) soient égaux à $-\dfrac{1}{3}$.

i) Montrer qu'un tel ensemble existe.

ii) Que dire du vecteur $t = -u-v-w$? Soit $D \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OD} = t$. Quelle figure géométrique est représentée par les points A, B, C, D ? on la note $(ABCD)$.

iii) On considère les trois rotations vectorielles α, β et γ définies par :

$\alpha(u) = u$ et $\alpha(v) = w$, $\beta(u) = v$ et $\beta(w) = w$ et $\gamma(w) = u$ et $\gamma(v) = v$.

a) Montrer que si un sous-groupe de O_E contient α et γ alors il contient β.

b) Décrire le sous-groupe G de O_E engendré par α, β et γ.

c) Préciser les symétries de G.

d) Que représente le groupe G pour la figure géométrique $(ABCD)$?

iv) Montrer que $\{u, v\}$ est libre.

v) Montrer qu'il existe x dans le plan engendré par u et v tel que $\|x\| = 1$, $(x, u) = 0$ et (x, v) soit positif.

vi) **Définition :** On appelle angle des vecteurs u et v l'unique nombre réel $\alpha \in [0, \pi]$ défini par $(u, v) = \|u\|\|v\| \cos(\alpha)$.

a) Montrer que $v = u\cos(\alpha) + x\sin(\alpha)$ et $u \wedge x = \dfrac{1}{\sin(\alpha)} u \wedge v$.

b) Montrer que $\{u, x, u \wedge x\}$ est une base orthonormée directe.