Université Henri Poincaré-Nancy 1
Institut Elie Cartan-Département de Mathématiques
CESS de Bar le Duc
Cours de Mortajine A. Latif
Mathématiques-UE33-2006/2007

CHAPITRE 5

Les séries

CHAPITRE 5

LES SERIES

5.1. — Les séries numériques :

Définition 5.1.1. — Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, ou complexes. La somme :

$$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

s'appelle la somme partielle à l'ordre n de la suite (u_n).
La suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est appelée la série de terme général u_n. On la note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
Si la suite s_n admet une limite finie s, on dit que la série converge vers s, et on pose :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s$$

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.
Si la série converge vers s, le nombre $R_n = s - s_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série. C'est l'erreur commise en remplaçant la somme s par la somme partielle s_n.
Il est clair que le reste R_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Proposition 5.1.2. —
i) Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. (ce qui nous fournit une condition nécessaire, mais non suffisante, de la convergence des séries).
ii) Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge.

Preuve : Comme $|s_n - s_{n-1}| = |u_n|$, alors si la suite (s_n) converge vers s, la suite (u_n) converge vers 0.

Remarque 5.1.3. —
Il est clair que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ sont de même nature pour tout N.

Définition 5.1.4. —
Si la suite (u_n) est telle que $u_n \geq 0$ pour tout n, on dit que la série est à termes positifs.
Ceci implique que la suite (s_n) est croissante, donc :
i) La série converge si et seulement si la suite (s_n) est majorée.
ii) La série diverge vers $+\infty$ si et seulement si la suite (s_n) n'est pas majorée.

Proposition 5.1.5. — Supposons que pour tout n, on ait : $o \leq u_n \leq v_n$, alors :
i) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.
ii) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge vers v, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge vers u et $u \leq v$.

Proposition 5.1.6. — Supposons qu'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que pour tout n, on ait : $o \leq \alpha v_n \leq u_n \leq \beta v_n$, alors : les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Proposition 5.1.7. — Supposons que pour tout n, on ait : $o \leq u_n$, $0 \leq v_n$ et que les deux suites sont équivalentes à l'infini, alors : les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Proposition 5.1.8. — Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie, continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) < +\infty \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$$

Preuve : Soit $N \geq a$. Soient $S_n^- = \sum_{k=N}^{n-1} f(k+1)$ et $S_n^+ = \sum_{k=N}^{n-1} f(k)$ les somme de Darbeaux inférieure et supérieure associée à la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[N, n]$ et la subdivision $\sigma = \{a_i = i/N \leq i \leq n\}$, alors, il est clair que la somme partielle s_n associée à la suite $(f(n))$ est telle que :

$$s_n - s_{N-1} - f(N) = S_n^- \leq \int_N^n f(x)dx \leq S_n^+ = s_n - s_{N-1} - f(n)$$

Ainsi, la suite (s_n) et l'intégrale sont de même nature.

Exemples 5.1.9. —

i) Les séries géométriques :

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $u_n = a^n$. Il est clair que si $|a| \geq 1$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série de terme général u_n diverge.

Si $|a| < 1$, on a :

$$s_n = 1 + a + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}$$

Comme : $\lim_{n \to +\infty} a^{n+1} = 0$, alors la série de terme général a^n converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

ii) La série harmonique :

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est divergente par la proposition ci-dessus.

On remarque que la suite $(\frac{1}{n})$ converge, pourtant, vers 0.

ii) Les séries de Riemann : Soit α un nombre réel différent de 1. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann.

Par la proposition ci-dessus, les séries de Riemann convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

Convergence absolue 5.1.10. — Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge.

Critère de Cauchy 5.1.11. — $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon, \exists N/ \quad \forall m > n \geq N, \quad |\sum_{k=n+1}^{m} u_k| < \varepsilon$$

Proposition 5.1.12. —

Une série absolument convergente est une série convergente.

La réciproque est fausse.

Règle de Cauchy 5.1.13. —

Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Supposons que : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q$.

i) Si $q > 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

ii) Si $q < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Règle de D'Alembert(*)5.1.14. —

Soit (u_n) une suite de nombres complexes non nuls. Supposons que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{u_n|} = q$.

i) Si $q > 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

ii) Si $q < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Définition 5.1.15. —

Une série alternée est une série de terme général $(-1)^n u_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout n.

(*) Jean le Rond D'Alembert : Mathématicien français, Paris 1717-Paris 1783. Fils illégitime d'un commissaire d'artillerie et d'une marquise qui l'abondonne sur le parvis de l'église Saint-Jean-Le-Rond, près de Notre-Dame, ce qui lui vaut son nom, il prendra plus tard le nom de D'Alembert pour des raisons inconnues. Après des études brillantes de droit et de médecine, il se tourne rapidement vers les mathématiques. A partir de 1745, D'Alembert est pris dans la vie philosophique et intellectuelle des lumières. Il travaille l'encyclopédie, dont il rédige le Disciurs préliminaire et un grand nombre d'articles scientifiques. il entre à l'Académie française en 1754.

Critère de Leibniz 5.1.16. —
Soit (u_n) une suite de nomrbres strictement positifs, décroissante et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors , la série alternée de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Les séries de Riemann alternées 5.1.17. —
Soit α un nobre réel. La série de terme général $(-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Critère d'Abel 5.1.18. — Supposons que pour tout entier naturel n, $u_n = a_n b_n$ où :
i) La suite (a_n) est une suite réelle à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.
ii) Les b_n sont des nombres complexes tels qu'il existe un réel M qui vérifie pour tout $m \geq n \geq 0$:

$$|b_n + b_{n+1} + ... + b_m| \leq M$$

Alors, la série de terme général $u_n = a_n b_n$ converge.

> **Exemple 5.1.19. —**
> *Soit (a_n) une suite réelle à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.*
> *Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|z| = 1$, alors : la série de terme général $a_n z^n$ converge.*
> *On en déduit que les séries de termes généraux $a_n \cos(n\theta)$ et $a_n \sin(n\theta)$ convergent ($\theta \in]0, 2\pi[$).*

Produit de deux séries 5.1.20. —
Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries, on définit la série produit

$$(\sum_{n\geq 0} u_n)(\sum_{n\geq 0} v_n) = \sum_{n\geq 0} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Fonction exponentielle complexe 5.1.21. —
Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$e^z = exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Cette série converge absolument et normalement, donc uniformément, sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$.
La fonction $exp(z)$ est continue sur $\mathbb{C}$. Pour $z = x$ réel, la fonction coincide avec la fonction exponentielle usuelle.
Grâce au théorème de multiplication des séries, nous avons l'équation fonctionnelle de l'exponentielle :

$$exp(z + z') = exp(z).exp(z')$$

Ainsi, on a :

$$exp(0) = 1 \quad et \quad exp(-z) = \frac{1}{z}$$

Si on pose $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on écrit $exp(z) = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$. Ainsi :

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i\sin(y)$$

Ceci démontre que :

$$exp(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a : $exp(2ki\pi) = 1$. D'où, $exp(z + 2i\pi) = exp(z)$.
La fonction $exp(z)$ est périodique de période $2i\pi$. Donc, il suffit de l'étudier dans la bande $B = \{z = x + iy/0 \leq y \leq 2\pi\}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un $k \in \mathbb{Z}$ et un $b \in B$ tel que : $z = b + 2ki\pi$; donc, $exp(z) = exp(b)$.

De même on a : $exp(i\pi) = -1$.

On remarque donc que $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et cette fonction transforme l'addition en multiplication (on dit que c'est un homomorphisme du groupe additif vers le groupe multiplicatif).

Nous remarquons que :

i) Pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, les solutions de l'équation $exp(z) = w$ sont l'infinité de nombres complexes :

$$z = Ln(|w|) + iarg(w) + 2ki\pi$$

ii) L'application est surjective et non injective.

iii) $\{z \in \mathbb{C}/exp(z) = 1\} = C(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$.

iv) Soit r une constante complexe.

La fonction de variable réelle, à valeurs complexes, $f_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f_r(x) = exp(rx)$ est dérivable et sa dérivée est : $f_r'(x) = rf_r(x)$.

On a :

$$\int f_r(x)dx = \frac{1}{r}f_r(x) + c$$

Nous prolongeons, ainsi, à l'ensemble $\mathbb{C}$ les fonction hyperboliques et les fonctions trigonométriques :

$$ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad et \quad sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad et \quad \sin(z) = \frac{1}{i}sh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Théorème 5.1.22. —

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes (respectivement vers u et v) dont l'une converge absolument, alors la série produit converge absolument vers uv.

Si les deux séries convergent absolument, la série produit converge absolument.

Application 5.1.23. — $exp(z + z') = exp(z).exp(z')$.

Groupement des termes 5.1.24. —

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$.

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série, et considérons la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ où :

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$$

Alors, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge vers u, la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge aussi vers u.

Remarque 5.1.25. —

i) La réciproque n'est pas vraie en général

ii) Si la série est à termes positifs, la réciproque est vraie.

iii) Si (u_n) tend vers 0 à l'infini et si l'application $[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$ est bornée, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Permutation des termes 5.1.26. —

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente vers u et soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Considérons la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ où $v_n = u_{\sigma(n)}$.

Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge absolument vers u.

Application 5.1.27. —

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes (respectivement vers u et v), alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n - v_n)$ sont absolument convergentes vers $u + v$ et $u - v$.

5.2. — Séries de fonctions :

Définition 5.2.1. — Considérons une suite de fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Associons à cette suite la suite de fonctions $S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n$.

L'étude de la série de fonctions de terme général f_n est, par définition, l'étude de la suite de fonctions (S_n).

Nous noterons $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la série de terme général f_n.

Définition de la convergence simple 5.2.2. —
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions définies dans $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction définie dans D.

On dit que la série converge simplement vers f sur $E \subset D$ si pour tout $z \in E$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge vers $f(z)$.

L'ensemble E est appelé domaine de la convergence simple de la série.

Définition de la convergence uniforme 5.2.3. —
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions définies dans $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction définie dans D.

On dit que la série converge uniformément vers f sur $E \subset D$ si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers f sur E.

Définition de la convergence normale 5.2.4. —
On dit que la série a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur $E \subset D$
sur E si et seulement s'il existe une suite numérique positive (u_n) telle que :

i) Pour tout $z \in E$ et tout entier n, $|f_n(z)| \leq u_n$

ii) La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$

Proposition 5.2.5. —
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions définies dans $D \subset \mathbb{C}$.

la série converge normalement sur $E \subset D$ si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_E < +\infty$.

Proposition 5.2.6. —
Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur E, alors :
i) La série converge simplement sur E
ii) La série converge absolument sur E
iii) La série converge uniformément sur E
iv) La suite (f_n) converge uniformément vers 0

Proposition 5.2.7. —
Si la série de fonctions continues $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur E, alors la fonction somme est continue sur E.

Proposition 5.2.8. —
Si la série de fonctions réelles continues $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers f sur E, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$ de fonctions définies par :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

(pour $a, x \in E$) est uniformément convergente sur E et a pour somme la fonction définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

C'est-à-dire :

$$\int_a^x \Big[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big]dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\int_a^x f_n(t)dt\Big]$$

Proposition 5.2.9. —
Si la série de fonctions réelles dérivables $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est telle que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge vers $f(x_0)$ pour un $x_0 \in E$, et si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ converge unifomément sur E, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est unformément convergente sur E

et sa somme est dérivable sur E et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n = \Big[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big]'$$

5.3. — Séries entières :

Définition 5.3.1. — On appelle série entière toute série de fonctions du type :

$$a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où les a_n et la variable z sont des nombres complexes.
Si on se restreint à la variable réelle, on note $z = x$ et on dit série entière à variable réelle.

Proposition 5.3.2. — Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée. Alors, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument dans le domaine $D(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C}/0 \leq |z| < |z_0|\}$.

Proposition 5.3.3. — Il existe un et un seul nombre réel R tel que :
i) $0 \leq R \leq +\infty$
ii) La série converge absolument dans le domaine

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}/0 \leq |z| < R\}$$

iii) La série diverge dans le domaine $\mathbb{C} - \overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C}/R < |z|\}$.

Définition 5.3.4. — Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série entière. Le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé domaine de convergence de la série entière.
Il est clair que dans le cas des séries entières à variable réelle, le disque ouvert n'est autre que l'intervalle ouvert $]-R, +R[$.

Proposition 5.3.5. — Si $\lim_{n \to +\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = R$ existe (finie ou infinie), alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Remarque 5.3.6. — La proposition 5.3.3. ne dit rien pour $|z| = R$.

Exemples 5.3.7. — *Soit la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k z^n$. *Il est clair que* $R = 1$.

i) Si $k < -1$, *la série converge absolument pour tout* $|z| = 1$

ii) Si $k \geq 0$, *la série diverge pour tout* $|z| = 1$

iii) Si $-1 \leq k \leq 0$, *la série diverge pour* $z = 1$ *et converge (non absolument) pour tout* $|z| = 1$ *et* $z \neq 1$.

Remarque 5.3.8. — Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors, la série converge normalement (donc uniformément) dans tout disque fermé $\overline{D(0,r)} = \{z \in \mathbb{C}L|z| \leq r\}$ avec $0 \leq r < R$.

Conséquences 5.3.9. — Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans $]-R, R[$.

i) La fonction f est continue sur $]-R, R[$.

ii) La fonction f est indéfiniment dérivable dans $]-R, R[$ et on a :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

dans le domaine $]-R, R[$.

iii) Pour tout $0 \leq r < R$, et pour tout $|x| \leq r$, la fonction :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\int_0^x t^n dt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Opérations sur les séries entières 5.3.10. —

Soient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_1 et R_2. On pose $R = Min(R_1, R_2)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

i) La série entière $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence R.

ii) La série entière $\lambda f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n$ a pour rayon de convergence R_1.

iii) La série entière $f(z).g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p+q=n} a_p b_q) z^n$ a pour rayon de convergence R' avec $R < R'$.

iv) Si $|g(z)| < R_1$ pour tout $|z| < R_2$, on a :

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(z)^n$$

Définition 5.3.11. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe un nombre réel positif r et une suite de nombres complexes (a_n) tels que :

i) $]-r, +r[\subset I$

ii) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq r$.

iii) Pour tout $|x| \leq r$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque 5.3.12. — Il est clair que :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Définition 5.3.13. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Soit f une fonction indéfiniment dérivable au voisinage de 0. On appelle série de Mac Laurin (ou de Taylor à l'origine) de f la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition 5.3.14. —

La série de Mac Laurin de f est convergente au voisinage de 0 et a pour somme f si et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right) = 0$$

Exemples 5.3.15. —

i) Pour $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ii) Pour $|x| < 1$ *:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$arxsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$Ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$arctg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

5.4. — Les séries de Fourier :

Notation 5.4.1. — On note E l'espace vectoriel complexe des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes et qui sont :

i) Périodiques de période 2π : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+2\pi) = f(t)$.
ii) Continues par morceaux : il existe une subdivisions $\sigma = \{a_i/0 \leq i \leq n\}$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq i-1$.
Nous considérons comme égales deux telles fonctionc si elles ne différent qu'au plus en un nombre fini de points par période.

Remarque 5.4.2. —
i) Il est clair que si deux fonctions f et g sont égales, leurs intégrales sur une période sont égales : $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} g(t)dt$.
ii) Si $f \in E$, alors :

$$\int_a^{2\pi+a} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$$

Produit scalaire 5.4.3. —
On définit le produit scalaire de deux fonctions $f, g \in E$ par :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$ qu'on appelle norme (de la convergence en moyenne quadratique) de la fonction f.

Définition 5.4.4. — Deux fonctions f et g dans E sont dites orthogonales si $< f, g >= 0$.
Dans ce cas on a la relation de Pythagore : $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Exemples 5.4.5. — Les exemples les plus simples de fonctions dans E sont les exponentielles.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$e_n(t) = exp(int) = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Elles forment un système orthonormé dans E. On a :

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

Définition 5.4.5. —
Pour tout $f \in E$, on pose, par définition : $c_n(f) =< f, e_n >$; et on l'appelle le nième coefficient de Fourier de la fonction f.

Proprités 5.4.5. — Soient $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
i) $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$
ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
iii) Si $f_a(t) = f(t-a)$, on a : $c_n(f_a) = e^{-ina}c_n(f)$
iv) Si $P(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ où a_N et a_{-N} ne sont pas tous deux nuls, alors : $c_n(P) = a_n$ si $|n| \leq N$ et $c_n(P) = 0$ si $|n| > N$.
v) Soit $f \in E$ telle que f soit continue sur $\mathbb{R}$ avec $f' \in E$, alors :

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

vi) Plus généralement, si $f \in E$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p-1$ et une dérivée p-ième $f^{(p)} \in E$, alors :

$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f)$$

Définition 5.4.6. — Soient $f, g \in E$, on définit le produit de convolution de f et g par :

$$(f \star g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)ds$$

Proposition 5.4.7. — Soient $f, g, h \in E$, on a :
i) $f \star g \in E$
i) $f \star g = g \star f$
iii) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$
iii) $c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$

Définition 5.4.8. — On appelle noyau de Dirichlet de dgré N le polynôme trigonométrique :

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$$

Remarque 5.4.9. —
i) Il est clair que :

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})t]}{\sin(\frac{t}{2})}$$

ii) Pour tout $f \in E$, on a :

$$D_N \star f = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})s]}{\sin(\frac{s}{2})}ds$$

Proposition 5.4.10. — Soit N un entier positif et soit $f \in E$. On a :

$$i) \quad \|f - D_N \star f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

ii) Inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

iii) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ converge et par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$.

Définition 5.4.11. — Soit $f \in E$.
La série de Fourier associée à f est la série suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}$$

On écrira symboliquement :

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}$$

Proposition 5.4.12. — Pour tout $f \in E$, la série de Fourier associée à f converge en moyenne quadratique vers la fonction f. i.e. :

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - D_N \star f\| = 0$$

Remarque 5.4.13. —
i) On l'égalité de Parseval :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2$$

ii) Pour $f, g \in E$, on a :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} =< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

iii) Pour $f, g \in E$ on a :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n(g)) \Longrightarrow f = g$$

Proposition 5.4.14. — Soit $f \in E$ et soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que f soit continue en t_0 et qu'elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int_0}$ converge et a pour somme $f(t_0)$.

Proposition 5.4.15. — Soit $f \in E$.
Si la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ converge, alors la série de Fourier associée à f converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Proposition 5.4.16. — Soit $f \in E$.
Si la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in E$, alors la série de Fourier associée à f converge absolument (donc uniformément) dans $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 5

Exercices 5.1. — Déterminer la somme :

$$1+2\sum_{n\geq 1} r^n \cos(n\theta)$$

pour $(r,\theta)\in[0,1[\times[0,2\pi[$.

Exercices 5.2. —

Montrer que la série de terme général :

$$Arcttg(\frac{1}{n^2+n+1})$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercices 5.3. —

Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme dans les cas suivants :

i) $u_n=\dfrac{n^k}{n!}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et k un entier fixé dans $\{1,2,3,4,5\}$.

ii) $u_0=u_1=u_2=0$ et $u_n=\dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ pour $n\geq 3$

iii) $u_0=0$ et $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour $n\geq 1$

Exercices 5.4. — Soit $a\in\mathbb{C}$ et soit p un entier.

Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n=\frac{a^n}{n!},\quad v_n=\frac{n^p}{a^n}\quad et\quad w_n=\frac{n^n}{n!}$$

Exercices 5.5. —

Etudier la série de fonctions définies sur $[0,1]$ de terme général :

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\in[0,\frac{1}{n}[\\ \frac{1}{n} & si \quad x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\\ 0 & si \quad x\in]\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

Exercices 5.6. —

Soient α,a,b des nombres réels tels que $\alpha>0$, $0<a<b$.

Montrer que la série de terme général défini par :

$$u_0(x) = 0 \quad et \quad u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \quad si \quad n \geq 1$$

est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$.

Exercices 5.7. —

Montrer que la série de terme général $x(1-x)^n$ est simplement convergente sur le segment $[0, 1]$. Calculer sa somme.

La convergence est-elle uniforme ?

Exercices 5.8. —

Soit $\alpha < 2$, et soit $x \in [0, +\infty[$. On considère la série de terme général défini par :

$$f_0(x) = 0 \quad et \quad f_n(x) = x^{2-\alpha}e^{-nx} \quad si \quad n \geq 1$$

i) Montrer que cette série est simplement convergente sur $[0, +\infty[$

ii) Montrer qu'elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha < 1$.

iii) Que peut-on dire si $\alpha = 1$?

Exercices 5.9. — Montrer que la série de terme général défini par :

$$f_0(x) = 0 \quad et \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \quad si \quad n \geq 1$$

est uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ mais elle n'est absolument convergente pour aucune valeur de x.

Exercices 5.10. — Soit α un réel strictement positif.

Montrer que la série de terme général défini par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}$$

est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$. Soit $f(x)$ sa somme.

Calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ où $\alpha < a < b$.

Exercices 5.11. — Montrer que la série de terme général défini par :

$$f_0(x) = 0 \quad et \quad f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \quad si \quad n \geq 1$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de la série de terme général $f_n'(x)$?

Exercices 5.12. — Montrer que la série de terme général défini par :

$$f_0(x) = 0 \quad et \quad f_n(x) = \frac{x\sin(nx)}{2\sqrt{n} + \cos(x)} \quad si \quad n \geq 1$$

est simplement convergente sur $]0, 2\pi[$.

Montrer qu'elle uniformément convergente sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

Exercices 5.13. —

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2(x)} dx$$

Montrer que :

$$I = \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n (n!)^2}$$

Exercices 5.14. —

Montrer que la série de terme général :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

converge normalement pour $x \geq 0$ et que ses dérivées premières et secondes terme à terme convergent normalement pour $x \geq a$ pour tout $a > 0$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, la fonction somme est solution de l'équation :

$$y" + y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Exercices 5.15. — Etudier les séries entières :

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} [\frac{1}{3} + ... + \frac{1}{4n^2 - 1}] z^n$$

$$g(z) = \sum_{n\geq 1} [\sum_{k=1}^{n} (k.k!)] \frac{z^n}{n!}$$

$$h(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} z^{2n+1}$$

Exercices 5.16. —
En multipliant la série $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, pour tout $|z| < 1$, par elle même, montrer que :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$$

et déterminer le développement de :

$$\frac{1}{(1-z)^3}$$

Exercices 5.17. — En décomposant la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - 6x^2}$$

déterminer le développement en série entière de la fonction $f(z)$ pour tout $|z| < 1/3$.

Exercices 5.18. —
i) Ecriver une série entière dont la somme soit, pour tout x réel, la fonction $F(x) : \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.
ii) Montrer qu'il existe une fonction $g(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$ et une seule qui soit développable en série entière pour tout x réel telle que $g(0) = 0$ et qui soit solution de de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 2xy = 1$$

iii) Vérifier que $e^{x^2} F(x)$ est solution de (E), et concide avec $g(x)$. Déduisez-en que :

$$F(x) = e^{-x^2} \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(n!)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Puis calculer les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} C_n^k$$

Exercices 5.19. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$$

i) Calculer les coefficients a_n du développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.

ii) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$?

Exercices 5.20. —

Quels sont les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C} / exp(z) \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} / exp(z) \in i\mathbb{R}\}$

Exercices 5.21. — Montrer que :

$$exp(z) = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$$

Exercices 5.22. — Trouver les solutions de l'équation :

$$\sin(z) = \frac{5}{3}$$

Exercices 5.23. — Montrer que :

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4.....(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercices 5.24. —

i) Montrer que, si pour tout $|z| < 1$, on pose :

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4.....(2n)} z^{2n}$$

alors, on a l'identité : $(1+z^2)[f(z)]^2 = 1$.

ii) En déduire que pour tout $|\theta| < \pi/2$,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4.....(2n)} \cos(2n\theta) = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\cos(\theta)}}$$

Exercices 5.25. — Soit $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 / |x^2 - 2tx| < 1\}$. Posons :

$$(1 - 2tx + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(t) x^n$$

i) Montrer que la série converge absolument dans E.

ii) Déterminer le degré et le coefficient de plus haut degré du polynôme $P_n(t)$.

iii) Montrer que :

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0$$

iv) En déduire $P_n(t)$ pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$,

Exercice 5.26. —

i) Soit $f \in E$ et soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Calculer $e_n \star f$ et $e_n \star e_m$.

ii) Calculer $P \star f$.

Exercice 5.27. — Soit $\theta \in]0, \pi]$.

Soit la fonction f paire, périodique de période 2π et telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [0, \theta[\\ 0 & si \quad t \in [\theta, \pi] \end{cases}$$

i) Déterminer la série de Fourier associée à f.

ii) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

iii) Regarder le cas $t = 0$ et le cas $\theta = \pi/2$.

iv) Donner la formule de Parseval dans ce cas. Et regarder le cas $\theta = \pi/2$.

v) En déduire la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercie 5.28. — Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ impaire, périodique et de période 2π qui vaut t quand $|t| < \pi$.
Préciser les formules obtenues pout $t = 0$ et $t = \pi$, ainsi que la formule de Parseval.

Exercie 5.29. — Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ périodique et de période 2π qui vaut t^2 quand $|t| \leq \pi$.
Préciser les formules obtenues pout $t = 0$ et $t = \pi$, ainsi que la formule de Parseval.

Exercie 5.30. — Soit a un nombre réel.
i) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ paire, périodique et de période 2π qui vaut $\cos(at)$ quand $|t| \leq \pi$.
Préciser les formules obtenues pout $t = 0$ et $t = \pi$, ainsi que la formule de Parseval.
En déduire la somme de la série :

$$\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$$