Découverte des mathématiques, 2009-2010

Feuille 2. Théorie d'ensembles, relations binaires.

Soit E un ensemble. Le complementaire d'un sous-ensemble $A \subset$ dans E sera noté $\bar{A}$.

1. Soit $A_1, A_2, B \subset E$. Est-ce que les égalités suivants sont vraies?

- $(A_1 \cap A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B)$
- $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$
- $(A_1 \cap A_2) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B)$

Soit E un ensemble, soit I un ensemble d'indices. On se donne pour chaque $i \in I$ une partie $A_i \subset E$. Soit $B \subset X$. On note $\bar{B}$ le complémentaire de B dans E. Est-ce que les égalités suivantes sont vraies?

- $(\cap_{i \in I} A_i) \cup B = \cap_{i \in I}(A_i \cup B)$
- $(\cup_{i \in I} A_i) \cap B = \cup_{i \in I}(A_i \cap B)$
- $\overline{(\cup_{i \in I} A_i)} = \cap_{i \in I} \bar{A}_i$

2. Combien existe-t-il de nombre de 5 chiffres? Combien existe-t-il de nombre de 5 chiffres dont tous les chiffres soient distincts?

3. Soit $A, B \subset E$. En utilisant $\in, \notin, \subset, \forall, \exists, \Rightarrow, \emptyset$ écrire les phrases:

- si tout élément x de A est un élément de B, alors A est inclus dans B.
- si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est inclus dans $\bar{A}$ ou dans $\bar{B}$.

4. Parmi les relations suivantes quelles sont des relations d'equivalences, d'ordre?

- $a, b \in \mathbb{Q},\ \ a \sim b \Leftrightarrow a + b \in \mathbb{Z}$
- $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\},\ \ a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$
- $a, b \in \mathbb{Q},\ a \sim b \Leftrightarrow a \leq 3b$
- $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ \ (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c \text{ et } b \leq d)$
- $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $a \sim b \Leftrightarrow a$ et b sont premiers entre eux.

5. a) Soit $E = \mathbb{Q} - \{\sqrt{2}\}$ et $A = \{a \in E \mid a < \sqrt{2}\}$. Est-ce que A est majoré? Est-ce que A admet une borne supérieure dans E?
b) Soit X un ensemble et $A \subset X$ une partie. Montrer que si A admet une borne supérieure dans X, alors A est majoré. Est-ce que le réciproque est vrai? Donner un example.

6. Soit X un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de X admet un plus petit élément. Montrer que l'ordre est total.

7. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Dessiner un diagramme qui décrit l'ordre par inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Est-ce que cet ordre est total? Est-ce que $\mathcal{P}(E)$ admet un élément le plus grand?

8. Pour une application $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ verifier si elle est injective, surjective, bijective:

- $f(x) = x + 2/3$
- $f(x) = x^2 + 2$
- $f(x) = x^3 - 3/4$

9. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ des applications. Montrer les énoncés suivants:

- si f et g sont injective, alors $g \circ f$ l'est aussi;
- si f et g sont surjective, alors $g \circ f$ l'est aussi;
- si f et g sont bijective, alors $g \circ f$ l'est aussi?

Qu'est-ce qu'on peut dire a propos des éconcés réciproques?

10. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Est-ce que f est injective, surjective? Soit $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \text{ divise } m \text{ ou } 3 \text{ divise } m\}$. Est-ce que l'image de f est égale a A?

11. Donner un example d'une application $f : E_1 \to E_2$ et de deux parties $A, B \subset E_1$ telles que $f(A \cap B)$ est strictement inclut dans $f(A) \cap f(B)$.

12. Donner un example de deux application $A \xrightarrow{f} B$ et $B \xrightarrow{g} A$ telles que $g \circ f = \mathrm{id}$, mais f n'est pas surjective (resp., g n'est pas injective).

13. Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que toute injection $f : E \to E$ est bijective. Montrer que toute surjection $f : E \to E$ est bijective.