Algèbre 2008-2009

Feuille 2

1. Soit p un nombre premier. a) Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau local, quel est son ideal maximal? b) Soit k un corps et x. La même question pour $k[x]/(x^n)$, où $k[x]$ est l'anneau des polynômes en une variable x.

2. Soit $A = k[x,y]$ et $I = (x,y) \subset A$ l'idéal engendré par x, y. Montrer que I est sans torsion, mais I n'est pas libre en tant que A-module.

3. Soit k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $f \in \operatorname{End}_k(E)$ est un diviseur de zéro dans $\operatorname{End}_k(E)$ si et seulement si f n'est pas un isomorphisme.

4. Soit $I \subset A$ un idéal dans un anneau A. Montrer que $\operatorname{Mat}_n(I) \subset \operatorname{Mat}_n(A)$ est un idéal bilatère et $\operatorname{Mat}_n(A)/\operatorname{Mat}_n(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mat}_n(A/I)$.

5. Soit A un anneau, $I_1, I_2 \subset A$ des idéaux. On dit que I_1 et I_2 sont premiers entre eux si $I_1 + I_2 = A$. Supposons que I_1 et I_2 sont premiers entre eux et $I_1 \cap I_2 = 0$. Etablir un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} (A/I_1) \times (A/I_2)$ (Théorème des restes chinois).

6. Soit A un anneau commutatif. Soit (p) le noyau de l'homomorphisme $\mathbb{Z} \to A$ qui envoie a sur $a \cdot 1$. On dit que A est *de caracteristique* p. Supposons $p > 0$.

a) Montrer que l'application $A \to A$, $x \mapsto x^p$ est un homomorphisme d'anneaux.

b) Supposons que A est un corps. Montrer que si $p > 0$ alors p est premier.

c) Supposons que A est un corps fini a q element. Montrer que sa caracteristique p est un nombre premier et $q = p^r$ pour certain $r > 0$.

7. Soit A un anneau et $N_1 \subset N_2 \subset N_3$ trois A-modules à gauche.

a) Montrer que $(N_3/N_1)/(N_2/N_1) \xrightarrow{\sim} N_3/N_2$.

b) Soit M un A-module et $M_1, M_2 \subset M$ les sous-modules. Montrer que

$$(M_1 + M_2)/M_2 \xrightarrow{\sim} M_1/(M_1 \cap M_2)$$

8. Soit

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\operatorname{Mat}_3(\mathbb{Q})$. On pose

$$x = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où 0 et 1 sont des matrices zéro et l'unité dans $\operatorname{Mat}_3(\mathbb{Q})$. Donc, $x, y \in \operatorname{Mat}_6(\mathbb{Q})$. Vérifier les équations $x^3 = 0 = y^2$ et $yx = x^2 y$.

Soit R le sous-anneau de $\operatorname{Mat}_6(\mathbb{Q})$ engendré par $\mathbb{Q}$, x et y. Montrer que tout élément z de R est de la forme $z = f(x) + g(x)y$, où $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ avec $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$. Montrer que

a) si $c = 0$ alors z est nilpotent;
b) si $c \neq 0$ alors z est inversible.

9. Montrer que pour des entiers $n, m > 0$ on a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où $d = pgcd(n, m)$. En particulier, ce produit tensoriel est nul su n et m sont premiers entre eux.

10. Soit A un anneau commutatif. Pour un A-module M sur A notons $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$, c'est un A-module. Montrer que pour les A-modules libres de type fini on a les isomorphismes canoniques

- $\mathrm{Hom}_A(E_1, E_2) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V_1, V_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(E_1 \otimes V_1, E_2 \otimes V_2)$;
- $\mathrm{End}_A(E) \otimes_A \mathrm{End}_A(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(E \otimes V)$;
- $E^* \otimes F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(E, F)$
- $E^* \otimes F^* \xrightarrow{\sim} (E \otimes F)^*$

11. Soit A un anneau commutatif et $S \subset A$ une partie multiplicatif. Montrer que si une suite des A-modules $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est exacte alors $0 \to S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2 \to S^{-1}M_3 \to 0$ est aussi exacte.

12. Soit $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ une suite exacte des A-modules et N un A-modules. Montrer que la suite $0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(M_1, N)$ est exacte. Est-ce qu'elle est toujours exacte à droite, c.-à-d., est-ce que f est toujours surjectif? Même question pour la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M_1) \to \mathrm{Hom}(N, M_2) \to \mathrm{Hom}(N, M_3)$$

13. Soit A un anneau commutatif. Etablir un isomorphisme $A[x, y] \xrightarrow{\sim} A[x] \otimes_A A[y]$ pour les anneaux des polynômes (c'est un isomorphisme des A-algèbres).

14. Soit A un anneau commutatif, M_i un A-module libre de rang n_i. Montrer que $M_1 \otimes M_2$ est un A-module libre de rang $n_1 n_2$.

15. Soit $A = \mathbb{R}[x]/(x^2 - 2)$. Etablir un isomorphisme des $\mathbb{C}$-algèbres $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Quelle est la structure de l'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$?

16. Soit A un anneau et $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes. Etablir un isomorphisme des A-algèbres $B[x_{n+1}] \xrightarrow{\sim} A[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

17. Soit A un anneau commutative, B est une A-algèbre et $I \subset A[x]$ un idéal. Etablir les isomorphismes $A[x] \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B[x]$ et $(A[x]/I) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B[x]/\tilde{I}$, où $\tilde{I}$ est l'idéal engendré par $\sigma(f(x))$ pour $f(x) \in I$. Ici $\sigma : A[x] \to B[x]$ est l'application naturelle.

18. Soit k un corps et $a, b \in k$. Soit $A = k[x]$ et $M = k[x]/(x-a)$. Soit $S = \{f \in k[x] \mid f(b) \neq 0\}$. Décrire $M \otimes_A S^{-1}A$ en tant que $S^{-1}A$-module.

19. Soit k un corps et $a \in k$. Calculer le groupe d'éléments inversibles dans $k[x, \frac{1}{x-a}]$.

20. Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte des A-modules et B est une A-algèbre, montrer que $M_1 \otimes B \to M_2 \otimes B \to M_3 \otimes B \to 0$ est exacte.

21. Soit M un A-module de type fini, B est une A-algèbre. Montrer que $M \otimes_A B$ est un B-module de type fini.

21. Donner un example d'un A-module M avec un sous-module $N \subset M$ tel que il n'y a pas de complementaire de N dans M (c.a.d., un sous-module $V \subset M$ tel que $V \oplus N = M$).

22. Soit A un anneau local commutatif, M et N les A-modules libres de rang n, m. Si $f : M \to N$ est un homomorphisme surjectif des A-modules, alors il admet une section $s : N \to M$ (c.a.d., $f \circ s = \mathrm{id}$). En plus, $\operatorname{Ker} f$ est libre de rang $n - m$ et $M = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} f$.

23. Soit A un anneau local commutatif, M et N les A-modules et $f : M \to N$ un homomoprhisme des A-modules. Alors, f est surjectif ssi $M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ l'est, où k est le corps résiduel.

24. Soit A un anneau local commutatif, $f : A^n \to A^n$ application A-linéaire donnée par une matrice $B \in \mathrm{Mat}_n(A)$. Alors, f est un isomorphisme des A-modules ssi B est inversible ssi B mod $\mathfrak{m}$ est inversible. Ici $\mathfrak{m} \subset A$ est l'idéal maximal.