GÉOMÉTRIE 2009-2010

Feuille 1

1. Soit E un espace affine et F un sous-espace affine de E. Montrer que F a une structure naturelle d'un espace affine.

2. Soit E un espace affine et F, G sous-espaces affines de E.
i) Si $F \mid\mid G$, alors $F = G$ ou $F \cap G = \emptyset$.
ii) Si $P \in E$ alors il existe un unique sous-espace affine F' de E passant par P et paralléle à F.

3. Soit $f : E \to F$ une application affine entre deux espace affines.
i) Montrer que f est injective (resp., surjective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.
ii) Montrer que si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.

4. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 4 = 0\}$. Montrer que l'application $a : \mathbb{R} \times E \to E$ donnée par $(\lambda, (x, y)) \mapsto (x + \lambda, y - \lambda)$ est bien définie et fait de E un espace affine (avec espace vectoriel directeur $\mathbb{R}$).

5. Soit $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Soit $a : \mathbb{R} \times E \to E$ l'application $(\lambda, x) \mapsto xe^{\lambda}$. Est-ce que avec cette structure E est un espace affine?

6. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\}$. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ et determiner son espace directeur.

7. La partie $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ de $\mathbb{R}$ est-elle un sous-espace affine de $\mathbb{R}$?

8. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $P = (1, 2)$, $Q = (0, 3)$, $R = (-1, 3)$. Quel est le sous-espace affine engendré par P, Q, R?

9. Soit E l'espace vectoriel des toutes les applications $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = 3, f(1) = 2\}$. Montrer que V est un sous-espace affine de E.

10. Soit E un espace affine et $F \subset E$ une partie non vide. Montrer que F est un sous-espace affine si et seulement si pour tout $P, Q \in F$ on a $(PQ) \subset F$.

11. Soit D, D' et D'' trois droites paralléles munies de points A, B, A', B' et A'', B'' respectivement. Montrer que

$$(AA') \mid\mid (BB') \text{ et } (A'A'') \mid\mid (B'B'') \Rightarrow (AA'') \mid\mid (BB'')$$

12. Montrer que dans un plan affine, deux droites distinctes sont paralléles si et seulement si leur intersection est vide.

13. Soit E un espace affine. Montrer que par trois points non-alignés de E, il passe un plan et un seul.

14. Soit F, G deux sous-espaces affine paralléles distincts de dimension r. Quel est la dimension du sous-espace affine engendré par F et G?

15. Soit H, H' deux hyperplans dans un espace affine qui ne se rencontrent pas. Montrer que $H \mid\mid H'$.

16. Donner une équation de la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $P = (1, 3)$ dirigé par $u = (3, 5)$. Donner aussi une equation de $\vec{D}$.

17. Donner une équation de la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $P = (1, 3)$ et $Q = (4, 2)$. Donner aussi une equation de $\vec{D}$.

18. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ distincts non-nuls avec $\mid a \mid \neq \mid b \mid$. Donner une équation de la droite D dans $\mathbb{R}^2$ passant par $P = (a, b)$ et par l'intersection des droites d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

19. Soit $P = (-1, 0)$, $Q = (0, 2)$, $R = (2, 1)$ et $S = (3, -2)$. On pose $D = (PQ)$ et $D' = (RS)$. Déterminer un vecteur directeur pour chacune de ces droites. Donner une équation pour chacune de ces droites. Est-ce que (P, Q, S, R) est un parallélogramme?