

## Feuille 1

1. Soit  $A$  un anneau intègre. Supposons que soit  $A$  est fini, soit  $A$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie, où  $k$  est un corps. Montrer que  $A$  est un corps.
2. Soit  $k$  un corps et  $a \in k$ . Montrer que l'idéal  $(x - a)$  dans  $k[x]$  coïncide avec  $\{p \in k[x] \mid p(a) = 0\}$ .
3. Montrer que les idéaux premiers dans  $\mathbb{Z}$  sont de la forme  $(n)$ , où  $n$  est premier ou  $n = 0$ . Les idéaux maximaux de  $\mathbb{Z}$  sont de la forme  $(n)$ , où  $n$  est premier.
4. Soit  $k$  un corps. Si  $a_1, \dots, a_n \in k$  alors l'idéal  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$  est maximal. Montrer que si  $n > 1$  alors il n'est pas principal.
5. Soit  $A$  un anneau. Montrer que l'ensemble  $I$  des éléments nilpotents de  $A$  est un idéal et  $A/I$  n'a pas de nilpotents  $\neq 0$ . (Cet idéal s'appelle le *nilradical* de  $A$ ).
6. Soit  $k$  un corps et  $B \subset k[t]$  la sous-algèbre engendrée sur  $k$  par  $t^2$  et  $t^3$ , c.a.d.,  $B = k[t^2, t^3]$ . Montrer que les monômes  $1$  et  $t^i$  pour  $i \geq 2$  forment une base du  $k$ -espace vectoriel  $B$ .  
Soit  $A = k[x, y]$ . Soit  $f : A \rightarrow B$  l'homomorphisme de  $k$ -algèbres défini par  $f(x) = t^2$ ,  $f(y) = t^3$ . Soit  $I \subset A$  l'idéal engendré par  $x^3 - y^2$ . Montrer que  $I \subset \text{Ker } f$  et tout élément de  $A/I$  s'écrit comme  $P(x) + yQ(x)$  avec  $P, Q \in k[x]$ . Montrer ensuite que les éléments  $x^p$  et  $yx^q$  pour  $p, q \geq 0$  forment une base dans le  $k$ -espace vectoriel  $A/I$ . En déduire que  $I = \text{Ker } f$  et  $A/I \xrightarrow{\sim} B$ .
7. Soit  $A = k[u, v, z]$  et  $B = k[x, y]$ . Soit  $f : A \rightarrow B$  l'homomorphisme défini par  $f(u) = x^2$ ,  $f(v) = y^2$  et  $f(z) = xy$ . Soit  $I$  l'idéal de  $A$  engendré par  $uv - z^2$ . Montrer que  $I = \text{Ker } f$  et  $A/I$  est isomorphe au sous- $k$ -algèbre de  $B$  engendré par  $x^2, y^2$  et  $xy$ .
8. Soit  $n$  en entier positif. Calculer le radical de l'idéal  $(n)$  dans  $\mathbb{Z}$ .
9. Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Alors, on a les égalités des idéaux dans  $\mathbb{Z}$

$$(a) + (b) = (d) \quad \text{et} \quad (a) \cap (b) = (m),$$

où  $d = \text{pgcd}(a, b)$  et  $m = \text{ppcm}(a, b)$ . Comme  $(a)(b) = (ab)$ , on obtient que  $(a)(b) = (a) \cap (b)$  ssi  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

10. Soit  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$  des idéaux tels que  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  ou  $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ . Montrer que

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$$

11. Soit  $A$  un anneau,  $x \in A$  un nilpotent,  $a \in A^*$ . Montrer que  $a + x \in A^*$ .
12. Soit  $A$  un anneau et  $A[[x]]$  l'anneau des séries formelles en une variable  $x$ .  
a) Décrire le groupe d'éléments inversibles dans  $A[[x]]$ .

b) Soit  $A[x]$  l'anneau des polynômes sur  $A$  en une variable  $x$ . Soit  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$ . Montrer que

i)  $f$  est inversible ssi  $a_0 \in A^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  sont nilpotents;

ii)  $f$  est nilpotent ssi  $a_0, \dots, a_n$  sont nilpotents; iii)  $f$  est un diviseur de zéro ssi il existe  $b \in A$  tel que  $bf = 0$ .

13. Soit  $A$  un anneau,  $A[[t]]$  l'anneau des séries formelles sur  $x$  s'une variable  $t$ . Soit  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ . Montrer que

i)  $f$  est inversible ssi  $a_0 \in A^*$ ;

ii) si  $f$  est nilpotent alors  $a_n$  est nilpotent pour tout  $n \geq 0$ .

14. Soit  $A = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ . Calculer le groupe  $A^*$ .

15. Soit  $A$  un anneau et  $S \subset A$  une partie multiplicative. Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. Montrer que  $S^{-1}M = 0$  ssi il existe  $s \in S$  tel que  $sM = 0$ .

16. Soit  $A$  un anneau. On suppose que pour tout idéal premier  $\mathfrak{p} \subset A$  l'anneau  $A_{\mathfrak{p}}$  n'a pas de nilpotents ( $\neq 0$ ). Montrer que  $A$  n'a pas de nilpotents.

17. Soit  $A$  un anneau et  $S$  l'ensemble de tous les éléments de  $A$  qui ne sont pas les diviseurs de zero. Montrer que  $S$  est une partie multiplicative et l'homomorphisme canonique  $A \rightarrow S^{-1}A$  est injective. Montrer que tout élément de  $S^{-1}A$  est soit inversible soit un diviseur de zéro.

Supposons que tout élément de  $A$  est soit inversible, soit un diviseur de zero. Montrer alors que  $A \rightarrow S^{-1}A$  est un isomorphisme.

18. Soit  $A$  un anneau ou tout idéal est principal (anneau d'idéaux principaux). Si  $f : A \rightarrow B$  est un homomorphisme surjective d'anneau, montrer que tout idéal de  $B$  est principal.

19. Soit  $A$  un anneau intègre. Montrer que  $A[x]$  et  $A[[x]]$  sont intègres. Décrire le groupe d'éléments dans  $A[x]$  et dans  $A[[x]]$ . Montrer que  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$  est nilpotent ssi tous les  $a_i \in A$  sont nilpotents.

20. Soit  $\mathbb{H}$  l'ensembles de toutes les matrices  $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $a, b \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\mathbb{H}$  est une  $\mathbb{R}$ -sous-algèbre de  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ . Est-ce une  $\mathbb{C}$ -sous-algèbre? Montrer que  $\mathbb{H}$  est une algèbre à division.

Soit  $B$  la partie de  $H$  donnée par la condition que tous les éléments de la matrice (1) sont dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $B$  est une  $\mathbb{R}$ -sous-algèbre de  $\mathbb{H}$ . Établir un isomorphisme des  $\mathbb{R}$ -algèbres  $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} B$ .

Montrer que le centre de  $\mathbb{H}$  s'identifie à l'image de l'homomorphisme  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $a \mapsto \text{diag}\{a, a\}$ .

21. Un *idempotent* dans un anneau  $A$  est un élément  $e \in A$  tel que  $e^2 = e$ . Supposons que  $A$  est intègre. Montrer que 0 et 1 sont les seuls idempotents dans  $A$ .