Algèbre 2009

Devoir à la maison

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier et $r \geq 1$. Montrer que $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe a une somme directe de deux sous-modules sur $\mathbb{Z}$.

2. Soit A un anneau qui n'est pas un corps, euclidien pour une application $\phi : A - \{0\} \to \mathbb{N}$. L'ensemble des $\phi(a)$ pour a non inversible et non nul a un plus petit élément $\phi(x)$ avec x non inversible et non nul dans A.

i) Montrer que l'application $A^* \cup \{0\} \to A/(x)$ est surjective (ici A^* est l'ensemble des éléments inversibles de A).

ii) Montrer que l'idéal (x) est maximal.

3. Soit A l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$. Notons x et y les images de X et Y dans A.

i) Montrer que tout élément a de A s'écrit $a = P(x)y + Q(x)$, où P et Q sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $a = 0$ équivaut a $P(X) = Q(X) = 0$ dans $\mathbb{R}[X]$.

ii) Montrer que la donnée d'un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de A dans $\mathbb{C}$ équivaut à la donnée d'un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u^2 + v^2 + 1 = 0$.

iii) Soit $P(x)y + Q(x)$ un élément inversible de A et $R(x)y + S(x)$ son inverse. Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$ on a $P(X)S(X) + Q(X)R(X) = 0$ et $-(1 + X^2)P(X)R(X) + Q(X)S(X) = 1$.

iv) Montrer que R est alors un multiple de P. On posera $R = PV$. Supposons que P est non nul.

v) Montrer que V est inversible dans A puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $V(X) = \frac{1}{\lambda}$.

vi) Montrer que l'on doit avoir

$$(1 + X^2)R(X)^2 = -\frac{1}{\lambda} - S(X)^2$$

et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mid S(x) \mid \leq \sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$.

vii) En déduire que S est une constante et $R = 0$. Obtenir une contradiction qui montre que $P = 0$.

viii) Montrer que $Q(X)$ et $S(X)$ sont des réels non nuls, puis que les inversibles de A sont les éléments de $\mathbb{R}^*$.

ix) Supposons l'anneau A euclidien. D'apres l'exercice 2, il existe $a \in A$ non inversible tel que l'application $A^* \cup \{0\} \to A/(a)$ est surjective et $A/(a)$ est un corps. Montrer que l'on a $A/(a) = \mathbb{R}$.

x) Montrer qu'on ne peut pas avoir un homomophisme des $\mathbb{R}$-algèbres $A \to \mathbb{R}$. Aboutir a une contradiction, qui montre que A n'est pas euclidien.

4. Soit A un anneau intègre et noethérien. On suppose que tout idéal maximal de A est principal. Soit p un element de A.

i) Montrer que si (p) est un idéal premier alors p est irréductible.

ii) Montrer que si p est irréductible, alors (p) est maximal (et donc premier). En déduire que A est factoriel.

iii) Montrer que tout idéal $I = (a, b)$ est égal a l'idéal (c) avec $c = pgcd(a, b)$.

iv) Conclure que A est principal. (Cet exercice et une étude des idéaux maximaux de $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$ permettrait de montrer que A est principal et non euclidien).

5. Soit $M \subset \mathbb{Q}$ un sous-$\mathbb{Z}$-module de type fini. Montrer que M est libre de rang 0 ou 1.