Feuille d'exercices 4

Exercice 1
On considère un système de taille n, fonctionnant lorsqu'une proportion k/n de composants fonctionnent. Chaque composant a la même probabilité p de fonctionner. On veut déterminer une proportion k/n suffisante de composants en état de marche pour que le système fonctionne avec une probabilité supŕieure à 95%.

Notons $X_1, \cdots, X_n$ les v.a. de Bernoulli rendant compte de l'état des n composants et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Comment s'exprime l'événement "le système fonctionne" en fonction de la v.a. S_n ?

2) Quelle est la loi de S_n ? Calculer la probabilité de l'événement "le système fonctionne". Comment choisir k si $n = 12$ et $p = 0.9$?

Exercice 2
On estime que la durée de vie d'un système suit la loi de Weibull, de fiabilité $R(t) = e^{-(t/\eta)^\beta} \mathbb{1}_{t \geq 0}$. Des essais statistiques sur un grand nombre d'appareils ont donné les résultats suivants :

75% des appareils étaient en fonction à la date $t_1 = 5000$h,

20% des appareils étaient encore en fonction à la date $t_2 = 10000$h.

1) Déterminer η et β.

2) Trouver le taux de défaillance en t_1, puis en t_2.

3) Calculer l'espérance de vie de ce type de matériel.

4) On suppose qu'après réglage, le matériel est considéré "comme neuf". Le cahier des charges d'un atelier impose d'avoir une fiabilité d'au moins 85% pour cette sorte de matériel. Quelle est la périodicité de réglage systématique ?

Exercice 3
Considérons un matériel dont la durée de vie suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Un 15-échantillon a donné les dates de défaillance de chaque matériel suivantes : 12, 24, 56,70, 84, 116, 145, 164, 211, 257, 284, 345, 440, 542, 775.

1) Déterminer l'estimation de λ par représentation graphique d'une régression linéaire.

2) Estimer λ par régression linéaire au moyen de la méthode des moindres carrés.

3) Estimer λ par le maximum de vraisemblance.

4) Déterminer l'intervalle de niveau de confiance 0,90 dans lequel on peut placer λ.

Exercice 4
Soit un matériel dont la durée de vie T suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. L'estimation de la MTTF (ie $\mathbb{E}(T)$) est recherchée par un 15-échantillon. On décide d'arrêter l'essai à partir de $t_i = 100$. Le relevé de défaillance en jours est le suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i	4	9	14	21	29	38	50	68	98

Estimer $\mathbb{E}(T)$ par régression linéaire (au sens des moindres carrés), puis par le maximum de vraisemblance.

Exercice 5

Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

1) Donner la densité de X, sa fonction de répartition et sa fiabilité.

2) Calculer l'espérance de X et sa variance.

3) Calculer la durée de vie résiduelle (MRTF) au temps t.

Notons R_n la fiabilité de la loi d'Erlang $\gamma(n, \alpha)$ de paramètres $n \geq 1$ et $\alpha > 0$.

4) Vérifier que $R_n(t) = R_{n-1}(t) + e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}$. En déduire que

$$R_n(t) = e^{-\alpha t} \left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Exercice 6

n machines identiques sont testées en parallèle jusqu'à ce que r d'entre elles tombent en panne $(1 \leq r \leq n)$. On note $T_1, \cdots, T_n$ les durées de fonctionnement des machines, qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ inconnu. Notons $T_{(1)} < \cdots < T_{(r)}$ les temps successifs d'arrêt des r premières machines.

1) On définit $S_1 = T_{(1)}$, $S_2 = T_{(2)} - T_{(1)}, \cdots, S_r = T_{(r)} - T_{(r-1)}$ les temps séparant les temps de panne successifs. On admet que ces v.a. sont indépendantes (car la loi exponentielle est sans mémoire) de loi respective $\mathcal{E}(n\lambda), \mathcal{E}((n-1)\lambda), \cdots, \mathcal{E}((n-r+1)\lambda)$. Calculer les moyennes des durées $T_{(1)}, \cdots, T_{(r)}$.

2) La quantité $(nS_1, (n-1)S_2, \cdots, (n-r+1)S_r)$ est un r-échantillon de la loi exponentielle de paramètre λ. On définit alors l'estimateur $\widehat{T} = \frac{nS_1 + (n-1)S_2 + \cdots + (n-r+1)S_r}{r}$. Calculer l'espérance et la variance de cet estimateur.

3) Exprimer $\widehat{T}$ en fonction des temps successifs d'arrêt des r premières machines. Montrer qu'il est non biaisé. On peut aussi prouver qu'il s'agit de l'estimateur de variance minimale.

Exercice 7

Un industriel se demande s'il peut garantir un de ses produits pendant cinq ans. Il commande une étude statistique en précisant qu'il peut fournir $n = 460$ durées de fonctionnement. On suppose que ces durées $T_1, \ldots, T_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre λ inconnu.

1) Quelle loi suit la v.a. $T_1 + \ldots + T_n$?

2) Calculer l'espérance et la variance de $\bar{T}_n = \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n}$ en fonction de λ.