

Границы случайной триангуляции диска.*

М. Крикун[†]

17 ноября 2003 г.

Аннотация

Мы рассматриваем случайные триангуляции диска с k дырками и заданным числом треугольников N при $N \rightarrow \infty$. Триангуляции с суммарным числом граничных ребер m присваивается коэффициент λ^m , $\lambda > 0$. В случае двух границ мы выделяем три области значений параметра λ , в каждой из которых находим предельное совместное распределение длин границ. Для большего числа границ мы приводим алгоритм вычисления производящих функций многокорневых триангуляций относительно количества треугольников и длины каждой из границ. В приложении обсуждается соотношение многокорневых триангуляций и триангуляций без корня и приводятся аналоги предельных распределений для некорневых триангуляций.

1 Введение

Задача перечисления плоских карт возникла в комбинаторике достаточно давно, и значительное развитие получила в работах Татта в шестидесятых годах прошлого века. Идея удаления корневого ребра и аналитический квадратичный метод ([5]) с тех пор многократно применялись и развивались. В частности в работах Э. Бендера [7, 8] были получены асимптотические формулы для перечисления различных классов карт.

Изначально интерес к плоским картам исходил из области комбинаторики, однако в восьмидесятых годах оказалось что карты можно использовать в теоретической физике в качестве дискретной аппроксимации теории струн ([10, 9]). Были разработаны методы теории матриц. В связи с физическими приложениями интерес представляют вероятностные задачи, в частности метрические свойства случайных карт.

В данной статье рассматриваются случайные триангуляции с несколькими границами (стоит отметить, что триангуляции с границами естественным образом возникают при подсчете числа триангуляцией замкнутых поверхностей) и исследуется поведение длины границы в пределе по числу

* исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант 02-01-00415.

[†]Лаборатория больших случайных систем, Мех-мат МГУ.
krikun@lbss.math.msu.su

треугольников. Описание используемой вероятностной модели (в качестве частного случая более общей), а также качественное описание поведения границы в случае одной границы были даны в [3] (часть 4.2), В [2] в случае одной границы были получены предельные распределения. Мы развиваем метод удаления корневого ребра и аналитические методы, примененные в [2]. Некоторые вычисления, в частности разложения функций в ряд в формулах (22), (25), (26), (29), (31) и (32), были выполнены с помощью Maple(TM).

1.1 Основные результаты

Корневой триангуляцией с $k + 1$ ($k \geq 0$) границей называется плоская корневая карта, в которой k не-корневых граней помечены числами $1, \dots, k$, и которая удовлетворяет следующим условиям:

- все грани кроме корневой и помеченных граней являются треугольниками.
- карта не содержит точек сочленения первого или второго рода (определение будет дано далее).

Мы будем называть корневую грань внешней границей триангуляции, а выделенные грани – ее внутренними границами.

Многокорневой триангуляцией с $k + 1$ границей называется корневая триангуляция с $k + 1$ границей, в которой на каждая внутренняя граница снабжена выделенным ребром.

На множестве $\mathcal{T}^*(N, k)$ многокорневых триангуляций с $k + 1$ границей, состоящих из N треугольников введем распределение вероятностей, присвоив триангуляции T с общим числом граничных ребер $M(T)$ вероятность

$$\mathbb{P}^N\{T\} = Z^{-1}\lambda^{M(T)}, \quad Z = \sum_{T \in \mathcal{T}^*(N, k)} \lambda^{M(T)}, \quad (1)$$

где Z – нормирующий множитель, а λ – положительный параметр. Случайная величина с таким распределением называется случайной триангуляцией с $k + 1$ границей.

Мы исследуем распределение границ t, t' случайной триангуляции с двумя границами в пределе $N \rightarrow \infty$. Оказывается что оно существенно зависит от λ , и меняется при критическом значении параметра $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Теорема 1 *В субкритической области $\lambda < \lambda_0$ при условии на четность длин границ t и t' их предельное распределение существует, причем в пределе они независимы а маргинальные распределения совпадают с предельным распределением (для предела соответствующей четности) длины границы для диска с единственной границей.*

Теорема 2 В точке $\lambda = \lambda_0$ моменты масштабированных случайных величин $(\eta_1, \eta_2) = (N^{-1/2}m, N^{-1/2}m')$ сходятся к

$$\mathbb{E} \eta_1^k \eta_2^l = \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(k+3/2)\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(k/2+l/2+2)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+l}. \quad (2)$$

Теорема 3 При $\lambda > \lambda_0$ для случайной величины $S = m + m'$ выполняются соотношения

$$\mathbb{E} S = a(\lambda)N(1 + O(\frac{1}{N})), \quad \frac{S - \mathbb{E} S}{\sqrt{b(\lambda)N}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Маргинальные предельные распределения $\zeta_1 = \frac{m}{a(\lambda)N}$, $\zeta_2 = \frac{m'}{a(\lambda)N}$, существуют и имеют плотность

$$p_\zeta(x) = \frac{8}{\pi} \sqrt{x(1-x)}, \quad x \in [0, 1].$$

Кроме того, мы приводим алгоритм вычисления производящих функций для числа многокорневых триангуляций с несколькими границами относительно числа треугольников и длин границ. В приложении обсуждается соотношение многокорневых триангуляций и триангуляций без корня и приводятся аналоги предельных распределений для некорневых триангуляций.

1.2 Определения

Ниже мы перечислим основные определения, используемые в данной работе. Классические понятия, такие как плоская корневая карта, точка сочленения и корневая почти-триангуляция, приводятся согласно книге [1]. Триангуляция с несколькими границами и многокорневая триангуляция являются естественным расширением понятия корневой почти-триангуляции.

Плоской картой называется вложенный в плоскость непустой связный граф (допускаются петли и кратные ребра). Корневой плоской картой называется плоская карта в которой выделено одно ребро внешней грани и ему присвоено направление против часовой стрелки.

Точка сочленения первого рода определяется как обычная точка сочленения для графов: если граф можно представить в виде объединения двух графов, имеющих единственную общую вершину, эта вершина называется точкой сочленения. Точкой сочленения второго рода называется общая вершина двух выделенных граней или выделенной грани и внешней грани. Это определение имеет смысл лишь для триангуляций с несколькими границами.

Дадим аналогичное определение для ребер. Ребро называется секущим если оба его конца лежат на границе триангуляции или на различных ее границах, но само ребро является внутренним.

Кратко перечислим свойства рассматриваемого класса триангуляций:

- Они не содержат петель, однако могут содержать кратные ребра.
- Вершина не может принадлежать двум различным границам одновременно, либо встречаться дважды при обходе одной границы.
- Существует особая триангуляция состоящая из двух вершин и одного ребра. Для этой триангуляции считается что длина границы равна двум, так как при обходе внешней грани ребро проходится дважды. Эта триангуляция нужна в основном для упрощения рекуррентных соотношений.
- Свойство четности. Общее число граничных ребер и число треугольников всегда имеют одну четность. Это объясняется тем, что утроенное число треугольников плюс число граничных ребер равняется удвоенному числу ребер триангуляции.

Так как нас интересуют длины границ при заданном количестве треугольников, мы будем использовать следующие обозначения: скобка $(N, m, k; \alpha)$ обозначает корневую триангуляцию с N треугольниками, m ребрами на внешней границе и с k внутренними границами, имеющими длины $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. $\mathcal{T}(N, m, k; \alpha)$ обозначает класс таких триангуляций, а $C(N, m, k; \alpha)$ их количество. Мы будем опускать число k в тех случаях когда задана длина вектора α , и оба обозначения k и α , когда имеется в виду триангуляция диска без дырок.

Обозначим класс многокорневых триангуляций, которые получаются из $\mathcal{T}(N, m, k; \alpha)$ добавлением выделенных ребер на внутренних границах, символом $\mathcal{T}^*(N, m, k; \alpha)$. Число таких триангуляций равно $\alpha_1 \cdots \alpha_k C(N, m, k; \alpha)$, поэтому не имеет смысла вводить для него собственное обозначение.

2 Рекуррентные соотношения

Чтобы получить рекуррентные соотношения для $C(N, m, k; \alpha)$ мы развиваем метод удаления корня, первоначально примененный Таттом в [4]. Рекурсия основывается на отображении δ которое каждой триангуляции (кроме особой) ставит в соответствие одну или две триангуляции таким образом, что суммарное число треугольников уменьшается на единицу.

Введем следующее обозначение — вершины триангуляции $T \in \mathcal{T}(N, k)$, лежащие на внешней границе обозначим символами b_0, b_1, \dots, b_{m-1} , так что b_0, b_1 — соответственно начало и конец корня. Это обозначение будет использоваться далее в качестве стандартного. Если $N > 0$, то в T есть единственный треугольник с вершинами b_0, b_1 . Пусть u — третья вершина этого треугольника. Когда мы удаляем корневое ребро, возможны три случая, в каждом из которых результат применения δ определяется отдельно.

- u является внутренней вершиной T . Тогда если мы сделаем b_0u новым корнем, T' будет допустимой триангуляцией типа $(N - 1, m + 1, k; \alpha)$ (легко проверить что T' не содержит точек сочленения первого или второго рода).

- u принадлежит внешней границе. Пусть $u = b_l$, тогда u – точка сочленения первого рода в T' , и можно разрезать T' на две части T_1 и T_2 , так что T_1 содержит b_0 а T_2 содержит b_1 (отметим, что пара T_1, T_2 является упорядоченной). Новыми корневыми ребрами в этом случае будут b_0u и ub_1 а триангуляции будут иметь тип $T_1(N_1, m_1, k_1; \alpha_\omega)$ и $T_2(N_2, m_2, k_2; \alpha_{I_k \setminus \omega})$, где $N_1 + N_2 = N - 1$, $m_1 + m_2 = m + 1$, $k_1 + k_2 = k$, ω – подмножество (возможно пустое) множества индексов $I_k = \{1, \dots, k\}$, а α_ω – вектор, содержащий компоненты α индексы которых перечислены в ω в порядке возрастания (т.е. если $\omega = \{1, 3, 5\}$, то $\alpha_\omega = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$).
- u принадлежит внутренней границе, скажем j . Тогда u – точка сочленения второго рода в T' , и можно разрезать T' в точке u так что получится триангуляция T'' типа $T''(N - 1, m + \alpha_j + 1, k - 1; \alpha_{I_k \setminus \{j\}})$. Новым корнем будет b_0u .

Теперь можно формально определить отображение δ . Оно состоит из трех частей.

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad & \mathcal{T}(N, m; \alpha) \rightarrow \mathcal{T}(N - 1, m + 1; \alpha), \\ \delta_2 : \quad & \mathcal{T}(N, m; \alpha) \rightarrow \mathcal{T}(N_1, m_1; \alpha_\omega), \mathcal{T}(N_2, m_2; \alpha_{I_k \setminus \omega}), \omega \\ \delta_3 : \quad & \mathcal{T}(N, m; \alpha) \rightarrow \mathcal{T}(N - 1, m + 1; \alpha_{I_k \setminus \{j\}}), j, \alpha_j. \end{aligned}$$

Причина, по которой результат отображения δ_2 нельзя определить просто

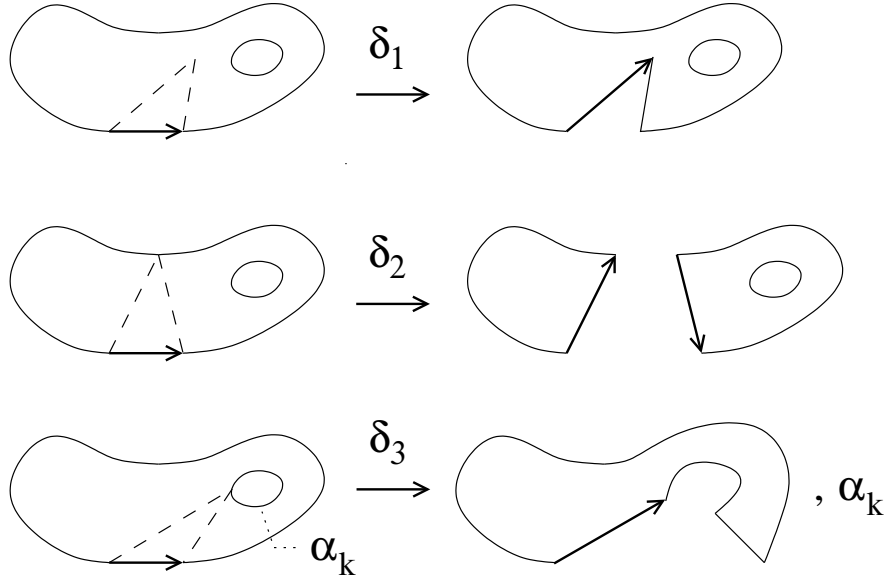


Рис. 1: Отображение δ

как упорядоченную пару триангуляций состоит в том, что этого недостаточ-

но чтобы восстановить отношение порядка на оригинальной триангуляции. То же относится к δ_3 .

Следующая лемма показывает что отображение δ сохраняет всю необходимую информацию для восстановления оригинальной триангуляции.

Лемма 1 *Отображение δ обратимо.*

Доказательство. Мы покажем существование обратного отображения ρ , задав в явном виде три его части $\rho_i = \delta_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, а заодно определим образы δ_i .

Результатом δ_1 может быть любая триангуляция $T(N, m, k; \alpha)$ с $m \geq 3$. Для такой триангуляции добавим ребро $b_0 b_1$ и сделаем его корнем. Получим допустимую триангуляцию $\rho_1(T) = T'(N + 1, m - 1, k; \alpha)$.

Результатом δ_2 будет тройка – две триангуляции $T_1(N_1, m_1; \alpha)$, $T_2(N_2, m_2; \beta)$ и подмножество $\omega \subset I_k$ из j элементов, такая что T_1 имеет j дырок а $T_2 - k - j$ дырок. Возьмем любую такую тройку. Чтобы восстановить оригинальную триангуляцию, склеим конец корня T_1 с началом корня T_2 и добавим новый корень, начало которого совпадает с началом корня T_1 а конец с концом корня T_2 . Очевидно что в полученной триангуляции нет точек сочленения, и значит это допустимая триангуляция. Остается смешать порядок дырок в $T_1 T_2$. Дадим дыркам из T_1 номера перечисленные в ω , так чтобы сохранить изначальный порядок, а дыркам из T_2 дадим номера перечисленные в $I_k \setminus \omega$ (например, если $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ и $\omega = \{1, 4, 5\}$ то получится такой порядок: $\{\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_3\}$).

Отображение δ_3 дает тройки вида $T(N, m + m' + 1, k; \alpha)$, j, m' , где $N \geq 0$, $m \geq 2$, $m' \geq 2$, $1 \leq j \leq k + 1$. Однако не все такие тройки могут быть результатом применения δ_3 . Чтобы обратить отображение δ_3 , нужно склеить вершины $b_1, b_{m'+1}$ и добавить новый корень $b_0, b_{m'+2}$. Результат будет допустимой триангуляцией, если только между склеиваемыми вершинами не было секущего ребра. В противном случае возникнет точка сочленения первого рода (см. рис. 2). Лемма доказана.

Перейдем к рекуррентным соотношениям. Пусть $D(N, m, m'; \alpha)$ – подкласс $C(N, m; \alpha)$, состоящий из триангуляций содержащих секущее ребро между вершинами $b_1, b_{m'+1}$ внешней границы. Тогда, как следствие леммы 1, получаем:

Лемма 2 *Для $N \geq 2$, $k \geq 0$, $m \geq 2$ и α такого что $\alpha_i \geq 2, i = 1, \dots, k$, выполняется соотношение*

$$\begin{aligned}
C(N, m, k; \alpha) &= C(N - 1, m + 1, k; \alpha) \\
&+ \sum_{\substack{N_1 + N_2 = N - 1 \\ m_1 + m_2 = m + 1}} \sum_{\omega \subset I_k} C(N_1, m_1, \alpha_\omega) C(N_2, m_2, \alpha_{I_k \setminus \omega}) \\
&+ \sum_{j \in I_k} \left(C(N - 1, m + \alpha_j + 1; \alpha_{I_k \setminus \{j\}}) \right. \\
&\left. - D(N - 1, m + 1, \alpha_j; \alpha_{I_k \setminus \{j\}}) \right). \tag{3}
\end{aligned}$$

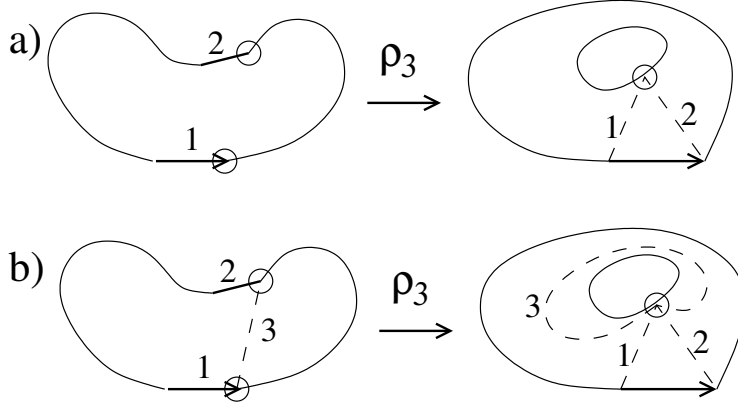


Рис. 2: сверху: корректное отображение ρ_3 , внизу: секущее ребро

Определим производящие функции для многокорневых триангуляций.

$$\begin{aligned}
 U_k(x, y, \mathbf{z}) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 2} C(N, m, k; \mathbf{z}) x^N y^{m-2} \alpha_1 \cdots \alpha_k z_1^{\alpha_1-2} \cdots z_k^{\alpha_k-2}, \\
 D_k(x, y, t, \mathbf{z}) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m, m'=2}^{\infty} \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 2} D(N, m, m', k; \mathbf{z}) x^N y^{m-1} w^{m'-1} \\
 &\quad \times \alpha_1 \cdots \alpha_k z_1^{\alpha_1-2} \cdots z_k^{\alpha_k-2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 U_k(x, y, \mathbf{z}) &= xy^{-1} \left(U_k(x, y, \mathbf{z}) - U_k(x, 0, \mathbf{z}) \right) \\
 &\quad + xy \sum_{\omega \subset I_k} U_{|\omega|}(x, y, \mathbf{z}_\omega) U_{k-|\omega|}(x, y, \mathbf{z}_{I_k \setminus \omega}) \\
 &\quad + \sum_{j \in I_k} z_j^{-1} \frac{\partial}{\partial z_j} z_j^2 Q_k(x, y, z; \mathbf{z}_{I_k \setminus \{j\}}), \tag{6} \\
 Q_k(x, y, w; \mathbf{z}) &= \frac{xy^{-2}}{y-w} \left(U_{k-1}(x, y, \mathbf{z}) - ([t^0] + y[t^1] + y^2[t^2]) U_{k-1}(x, t, \mathbf{z}) \right) \\
 &\quad - \frac{xw^{-2}}{y-w} \left(U_{k-1}(x, w, \mathbf{z}) - ([t^0] + w[t^1] + y^2[t^2]) U_{k-1}(x, t, \mathbf{z}) \right) \\
 &\quad - xy^{-2} w^{-1} \left(D_{k-1}(x, y, w, \mathbf{z}) \right. \\
 &\quad \left. - ([t^0] + y[t^1] + y^2[t^2]) ([s^0] + w[s^1]) D_{k-1}(x, s, t, \mathbf{z}) \right) \tag{7}
 \end{aligned}$$

Здесь $[t^k]$ обозначает линейный оператор который берет коэффициент при t^k в ряде Тейлора своего аргумента, так что выражение в последних скобках имеет тот же ряд Тейлора что и $D(x, y, w, \mathbf{z})$, за исключением того что члены содержащие y в степенях 0, 1, 2 отсутствуют.

Функции $D_k(x, y, w, \mathbf{z})$ можно выразить через U_j , $j \leq k$. Мы приведем это выражение в явном виде для $k = 0$; общая формула может быть получена аналогичным образом без каких-либо сложностей.

Лемма 3 *Производящие функции $D_k(x, y, w, \mathbf{z})$ могут быть выражены через U_0, \dots, U_k . В частности,*

$$D_0(x, y, w) = U_0(x, y)U_0(x, w)U_0^{-1}(x, 0). \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 0$. Обозначим $R(N, m; \alpha)$ подкласс $C(N, m; \alpha)$ состоящий из триангуляций не содержащих секущего ребра между b_0 и b_1 (т.е. секущего ребра параллельного корню).

Каждую триангуляцию T из класса $D(N, m, m')$ можно разрезать вдоль одного из секущих ребер на две части, триангуляцию общего вида $T_1 \in \mathcal{T}(N_1, m + 1)$ и $T_2 \in R(N_2, m' + 1)$. Таким образом

$$D_0(x, y, w) = U_0(x, y)R_0(x, w), \quad (9)$$

где

$$R_0(x, w) = \sum R(N, m)x^N w^{m-2}.$$

Далее, любая триангуляция T может быть разрезана на $T_1 \in \mathcal{T}(N_1, 0)$ и $T_2 \in R(N_2, m)$ вдоль секущего ребра, параллельного корню (если такого секущего ребра нет, то $T_1 = T(2, 0)$). Следовательно

$$C(N, m) = \sum_{N_1+N_2=N} C(N_1, 2)R_0(N_2, m),$$

и

$$U_0(x, y) = U_0(x, 0)R_0(x, y). \quad (10)$$

Доказательство для $k = 0$ закончено.

Для общего класса $D(N, m, m'; \alpha)$ применимо то же рассуждение. Единственная разница состоит в том что каждый раз при разрезании триангуляции следует учитывать возможное распределение дырок между полученными частями. Тогда вместо (9),(10) мы получим

$$D_k(x, y, w, \mathbf{z}) = \sum_{\omega \subset I_k} R_{|\omega|}(x, w, \mathbf{z}_\omega)U_{k-|\omega|}(x, y, \mathbf{z}_{I_k \setminus \omega}), \quad (11)$$

$$U_k(x, y, \mathbf{z}) = \sum_{\omega \subset I_k} R_{|\omega|}(x, y, \mathbf{z}_\omega)U_{k-|\omega|}(x, 0, \mathbf{z}_{I_k \setminus \omega}). \quad (12)$$

Очевидно, что из этих уравнений можно последовательно выразить R_k и D_k через U_0, \dots, U_k . Лемма доказана.

Лемма 4 *Уравнения (6) достаточно чтобы найти все функции U_k .*

Доказательство. Функция U_0 известна – это классический результат, см. например [1], стр. 141. Явный вид этой функции будет приведен ниже.

Предположим, нам известны U_0, \dots, U_{k-1} , $k \geq 1$. Перепишем (6) так:

$$xU_k(x, 0, \mathbf{z}) = \left(2xy^2U_0(x, y) + x - y\right)U_k(x, y, z) + W_{k-1}(x, y, \mathbf{z}). \quad (13)$$

Здесь W_{k-1} обозначает члены не содержащие U_k . Туда же включена функция D_{k-1} , так как согласно предыдущей лемме она может быть выражена через U_0, \dots, U_{k-1} .

Подставим $y = h$ в (13). Тогда выражение в скобках перед $U_k(x, y, z)$ обращается в ноль и мы получаем выражение для $U_k(x, 0, \mathbf{z})$. Подставим его снова в (13). Получим

$$U_k(x, y, \mathbf{z}) = \frac{W_{k-1}(x, h, \mathbf{z}) - W_{k-1}(x, y, z)}{2xy^2U_0(x, y) + x - y}. \quad (14)$$

Таким образом по индукции могут быть найдены все функции U_k .

Далее нам понадобится явный вид функции $U_1(x, y, z)$. Выпишем его и упростим $Q(x, y, z)$.

$$U_1(x, y, z) = \frac{z^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^2 \left(hQ(x, h, z) - yQ(x, y, z) \right) \right]}{2xy^2U_0(x, y) + x - y}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= \frac{xy^{-2}}{y-z} \left(U_0(x, y) - U_0(x, 0) \right) - \frac{xz^{-2}}{y-z} \left(U_0(x, z) - U_0(x, 0) \right) \\ &\quad - \frac{x}{y^2z} \left(U_0(x, y) - U_0(x, 0) \right) \left(U_0(x, z) - U_0(x, 0) \right) U_0^{-1}(x, 0) \\ &\quad + \frac{xU_0'(x, 0)U_0(x, z)}{yzU_0(x, 0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, можно опустить последний член в Q так как он исчезает в выражении $hQ(x, h, z) - yQ(x, y, z)$.

3 Предельные распределения

Вначале перечислим результаты, касающиеся триангуляций диска с единственной границей.

Задача о перечислении триангуляций типа (N, m) была решена Таттом [4]. Доказательство и ссылки на оригинальные публикации можно найти в книге [1]. Нам потребуется лишь выражение для функции $U_0(x, y)$, которое получается из уравнения, аналогичного (6),

$$U_0(x, y) = \frac{y - x + (h - y) \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 4xy}}{2xy^2}. \quad (17)$$

Здесь $h = h(x)$ – ветвь решения уравнения $x = h - 2h^3$, такая что $h(0) = 0$.

В [2] получены предельные распределения для границы триангуляции диска. Они получаются с помощью анализа минимальных особенностей функции $U_0(x, y)$ при $y = \lambda$. При $\lambda \leq \lambda_0 = 1/\sqrt{6}$ есть две таких особенности $x = \pm x_0$, $x_0 = \sqrt{2/27}$; а при $\lambda > \lambda_0$ единственная особенность

$$x_{cr}(\lambda) = 2\lambda + 8\lambda^3 - 4\lambda^2\sqrt{4\lambda^2 + 2}. \quad (18)$$

Соответственно существуют три области значений параметра λ где применяются различные скейлинги и получаются пределы разного вида.

Обозначим $m(N)$ длину границы (случайного) диска с N треугольниками. В субкритической области $\lambda < \lambda_0 = 6^{-1/2}$ существует предел $m(N)$ и скейлинг не требуется, однако, из-за свойства согласования четности, следует отдельно рассмотреть предел по четным и нечетным значениям N . Соответствующие производящие функции имеют вид (знак плюс соответствует четным N , минус – нечетным)

$$f(t)_{even/odd} = \frac{\Phi(\lambda t) \pm \Phi(-\lambda t)}{\Phi(\lambda) \pm \Phi(-\lambda)}, \quad \Phi(y) = \frac{1}{(1 - \sqrt{6}y)^{3/2}}. \quad (19)$$

В критической точке $\lambda = \lambda_0$ существует предел масштабированной случайной величины $\eta = N^{-1/2}m(N)$. Она имеет моменты

$$\mathbb{E} \eta^k = \frac{\Gamma(3/4 + k/2)}{\Gamma(3/4)} 3^k, \quad (20)$$

и плотность

$$p_\eta(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{t^{1/2} \exp(-t^2/9)}{\Gamma(3/4)}.$$

В суперкритической области

$$\mathbb{E} m(N) = a(\lambda)N(1 + O(\frac{1}{N})), \quad \frac{m(N) - \mathbb{E} m(N)}{\sqrt{N}} \rightarrow \mathcal{N}(0, b(\lambda)).$$

Параметры $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ выражаются через $x_{cr}(\lambda)$ как

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(-\ln x_{cr}(\lambda e^s) \right) \right|_{s=0} \\ &= \frac{24\lambda^3 + 8\lambda - (12\lambda^2 + 1)\sqrt{4\lambda^2 + 2}}{\sqrt{4\lambda^2 + 2}(1 + 4\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{4\lambda^2 + 2})}, \\ b(\lambda) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(-\ln x_{cr}(\lambda e^s) \right) \right|_{s=0} \\ &= 4\lambda \frac{32\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1 - (16\lambda^3 + 4\lambda)\sqrt{4\lambda^2 + 2}}{(2\lambda^2 + 1)\sqrt{4\lambda^2 + 2}(1 + 4\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{4\lambda^2 + 2})^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь перейдем к анализу $U_1(x, y, z)$.

Лемма 5 *Зафиксируем y, z и рассмотрим $U_1(x, y, z)$ как функцию переменной x . Тогда минимальные особенности $U_1(x, y, z)$ совпадают с особенностями $U_0(x, \max\{y, z\})$.*

Доказательство. Рассмотрим дробь в правой части (15). С учетом (17), ее знаменатель равняется

$$(h - y) \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 4xy}.$$

Множитель $(h - y)$ не дает полюса функции $U_1(x, y, z)$, так как числитель дроби обращается в ноль при $h = y$. Выражение под корнем не обращается в ноль при $|x| < \min\{x_0, x_{cr}(y)\}$. Следовательно минимальные особенности $U_1(x, y, z)$ определяются особенностями $U_0(x, y)$, $U_0(x, z)$. Как мы покажем далее, эти особенности не исчезают. Лемма доказана.

3.1 Субкритическая область

При $y, z < \lambda_0$ функцию $U_1(x, y, z)$ можно разложить по степеням $t^{1/2}$ вблизи точек $x = \pm x_0$,

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) \Big|_{x=x_0-t} &\approx a_1(y, z) + b_1(y, z)t^{1/2} + O(t), \\ U_1(x, y, z) \Big|_{x=-x_0+t} &\approx a_2(y, z) + b_2(y, z)t^{1/2} + O(t), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} b_1(y, z) &= -9 \frac{6^{1/4}}{(1 - \sqrt{6}y)^{3/2}(1 - \sqrt{6}z)^{3/2}}, \\ b_2(y, z) &= -9 \frac{6^{1/4}}{(1 + \sqrt{6}y)^{3/2}(1 + \sqrt{6}z)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Далее применим следующую схему:

$$P_N\{m, m'\} = \frac{[x^N s^m t^{m'}]U_1(x, \lambda t, \lambda s)}{[x^N]U_1(x, \lambda, \lambda)},$$

$$[x^N]U_1(x, y, z) = b_1(y, z)[x^N](x_0 - x)^{1/2} + b_2(y, z)[x^N](x_0 + x)^{1/2} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

таким образом, в зависимости от четности N существуют два предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N\{m, m'\} = \frac{[s^m t^{m'}] \left(b_1(\lambda s, \lambda t) \pm b_2(\lambda s, \lambda t) \right)}{b_1(\lambda, \lambda) \pm b_2(\lambda, \lambda)},$$

знак плюс соответствует четным значениям N , минус – нечетным. Соответственно существуют два предела для производящей функции совместного распределения $(m - 2, m' - 2)$ (для краткости используем функцию Φ из (19)),

$$f_{\pm}(s, t) = E s^{m-2} t^{m'-2} = \frac{\Phi(\lambda s)\Phi(\lambda t) \pm \Phi(\lambda s)\Phi(\lambda t)}{\Phi(\lambda)\Phi(\lambda) \pm \Phi(\lambda)\Phi(\lambda)}. \quad (23)$$

Видно, что границы не являются независимыми. Однако можно показать, что эта зависимость существует исключительно благодаря согласованию

четности. Рассмотрим условные распределения m, m' с условием на четность каждой из компонент. Им соответствуют четыре функции, в которых уничтожены четные или нечетные степени s, t :

$$\begin{aligned} f_{odd,odd}(s, t) &= f_+(s, t) + f_+(-s, t) + f_+(s, -t) + f_+(-s, -t), \\ f_{even,even}(s, t) &= f_+(s, t) - f_+(-s, t) - f_+(s, -t) + f_+(-s, -t), \\ f_{even,odd}(s, t) &= f_-(s, t) - f_-(-s, t) + f_-(s, -t) - f_-(-s, -t), \\ f_{odd,even}(s, t) &= f_{even,odd}(t, s). \end{aligned}$$

Если нормировать эти функции условием $f(1, 1) = 1$, так чтобы получились производящие функции соответствующих условных распределений, оказывается что они равны произведениям функций, заданных уравнением (19),

$$f_{even/odd, even/odd}^{(norm)}(s, t) = f_{even/odd}(s) f_{even/odd}(t). \quad (24)$$

Теорема 1 доказана.

3.2 Критическая точка

Здесь мы следуем методу примененному в [2]: вычислить асимптотику факториальных моментов границ, затем выбрать скейлинг, получить (обычные) моменты масштабированной случайной величины и попытаться определить некоторые свойства ее распределения.

Вычислив явно несколько производных $U_1(x, y, z)$ по y, z в точке $y = z = \lambda$ и разложив их по полуцелым степеням $t = (x_0 - x)$, получим что

$$\left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial y^k \partial z^l} U_1(x, y, z) \right|_{\substack{x=x_0-t \\ y=\lambda, z=\lambda}} = a_{k,l} t^{-1-(k+l)/2} \quad (25)$$

по крайней мере для $k, l = 0, 1, 2, 3$. Предположим что (25) выполняется для всех k, l . Чтобы проверить это, построим следующее разложение

$$U_1(x_0 - t, \lambda_0 + ut^{1/2}, \lambda_0 + vt^{1/2}) = A(u, v) t^{-1} + O(t^{-1/2}), \quad (26)$$

$$A(u, v) = \frac{3}{2} \frac{(\sqrt{c-u} - \sqrt{c-v})^2}{\sqrt{c-v}\sqrt{c-u}(u-v)^2}, \quad c = \frac{1}{3} 6^{3/4}. \quad (27)$$

Здесь $A(u, v)$ содержит все члены вида $u^k v^l$ с ненулевыми коэффициентами, т.е. для любых k, l коэффициент $[u^k v^l] A(u, v)$ отличен от нуля, а точнее

$$[u^k v^l] A(u, v) = \frac{3}{\pi} \frac{\Gamma(k+3/2)\Gamma(l+3/2)}{(k+l+2)k!l!} c^{-(k+l)-2}.$$

Таким образом $a_{k,l} = [u^k v^l] A(u, v) \neq 0$ и (25) выполняется для всех k, l . Факториальные моменты m, m' определяются соотношением

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N X_1^k X_2^l &= \frac{a_{k,l} k! l! [x^N](x_0 - x)^{-1-(k+l)/2}}{a_{0,0} [x^N](x_0 - x)^{-1}} \\ &\approx \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(k+3/2)\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(k/2+l/2+2)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+l} N^{(k+l)/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) ясно что границы имеют порядок $N^{1/2}$. Переписав (28) для масштабированных случайных величин $(\eta_1, \eta_2) = (N^{-1/2}X_1, N^{-1/2}X_2)$, получим утверждение Теоремы 2.

3.3 Суперкритическая область

В суперкритической области границы сильно зависимы. Мы начнем с распределения их суммы, затем найдем маргинальные распределения. Оказывается что этого достаточно чтобы получить полную картину.

Вычислим первые и вторые производные $U_1(x, y, z)$ по y, z и совместные моменты m, m' . Получим что $\mathbf{E} m, \mathbf{E} m'$ имеют порядок N и что

$$\mathbf{E} m^2 \approx \mathbf{E}(m')^2 \approx \frac{5}{4}(\mathbf{E} m)^2, \quad \mathbf{E} m m' \approx \frac{3}{4}(\mathbf{E} m)^2. \quad (29)$$

(эти соотношения следует понимать как эквивалентность с точностью до членов порядка меньше N). Из (29) видно, что вариация суммы $S = m + m'$ имеет порядок $O(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Характеристическая функция суммы $S = m + m'$ для фиксированного N есть

$$\varphi_N(s) = \frac{[x^N]U_1(x, \lambda e^s, \lambda e^s)}{[x^N]U_1(x, \lambda, \lambda)}. \quad (30)$$

(для удобства ограничимся действительными значениями аргумента). Нам интересуют семиинварианты S ,

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} \ln \varphi_N(s), \quad k \geq 1.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} \ln \varphi_N(s) = \frac{\partial^k}{\partial s^k} \ln [x^N]U_1(x, \lambda e^s, \lambda e^s).$$

Разложим $U_1(x, y, y)$ в ряд вблизи точки $x_{cr}(y)$,

$$U_1(x_{cr} - t, y, y) = f(y)t^{-2} + O(t^{-1}), \quad (31)$$

(функция $f(y)$ не приводится в явном виде, так как это не играет роли в дальнейшем). Отсюда

$$\begin{aligned} [x^N]U_1(x_{cr}(y) - t, y, y) &= f(y)[x^N](x_{cr}(y) - x)^{-2}(1 + O(\frac{1}{N})) \\ &= f(y)N x_{cr}(y)^{-2-N}(1 + O(\frac{1}{N})), \end{aligned}$$

$$\ln [x^N]U_1(x_{cr}(y) - t, y, y) = -N \ln x_{cr}(y) + \ln N + O(\frac{1}{N}).$$

Следовательно все семиинварианты S имеют порядок N , и все семиинварианты случайной величины $\xi = N^{-1/2}(S - \mathbf{E} S)$ кроме первого стремятся

к нулю, то есть ξ сходится к нормальному распределению. Предел математического ожидания S/N и дисперсия нормального распределения здесь в точности те же, что и в случае одной границы, (см. (21))

$$E \frac{S}{N} = a(\lambda), \quad E \left(\frac{S - ES}{\sqrt{N}} \right)^2 = b(\lambda).$$

Чтобы получить маргинальное распределение m мы будем действовать тем же способом, что и в критической точке. Моменты m определяются производными $U_1(x, y, \lambda)$ по y .

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} U_1(x, y, \lambda) \Big|_{y=\lambda, x=x_{cr}(\lambda)} = a_k(\lambda) t^{-2-k} (1 + O(t)).$$

Асимптотику моментов мы получаем из разложения

$$U_1(x, \lambda + ut, \lambda) \Big|_{x=x_{cr}(\lambda)-t} = A(\lambda, u) t^{-2} (1 + O(t)). \quad (32)$$

Здесь выражение $A(\lambda, u)$ имеет вид

$$A(\lambda, u) = c_1 \frac{-2 + c_2 u + 2\sqrt{1 - c_2 u}}{\sqrt{1 - c_2 u} (c_2 u)^2}. \quad (33)$$

где c_1, c_2 зависят от параметра λ . Явный вид этой зависимости не важен, так как основное свойство A которое нас интересует состоит в том, что

$$[u^k] A(\lambda, u) = -\frac{1}{2} c_1(\lambda) \frac{(k+1)\Gamma(k+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+3)} c_2(\lambda)^{k+2},$$

и следовательно моменты m равны (с точностью до членов меньшего порядка по N)

$$E m^k \approx 4 \frac{\Gamma(k+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+3)} \left(\frac{c_2(\lambda)}{x_{cr}(\lambda)} \right)^k N^k. \quad (34)$$

Заметим, что моменты случайной величины ζ распределенной на $[0, 1]$ и имеющей плотность

$$p_\zeta(x) = \frac{8}{\pi} \sqrt{x(1-x)} \quad (35)$$

равны

$$E \zeta^k = 4 \frac{\Gamma(k+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+3)}, \quad (36)$$

и $E \zeta = 1/2$. Сравнив (34) и (36), а также учитывая равенство $E m = \frac{1}{2} E S$, получим

$$\frac{m}{a(\lambda)N} \rightarrow \zeta.$$

Таким образом Теорема 3 доказана.

4 Приложение: триангуляции без корня

Многокорневые триангуляции диска с несколькими границами являются в определенном смысле более естественным объектом чем триангуляциям с единственным корнем, так как они не делают различий между границами. Еще более естественно было бы рассматривать триангуляции без корня, однако нет метода их непосредственного перечисления, и кроме того возникает вопрос о наличии нетривиальной группы автоморфизмов. Пренебрегая этим вопросом (который не является существенным в пределе $N \rightarrow \infty$), будем считать что число триангуляций без корня с границами $m, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ равно $(m\alpha_1 \cdots \alpha_k)^{-1} C(N, m; \alpha)$. Тогда оказывается, что результаты полученные для многокорневых триангуляций легко переносятся на триангуляции без корня.

Определим две случайные величины, соответствующие триангуляциям с корнем (X_N) и без корня (\hat{X}_N),

$$P\{X_N = m\} = \frac{mC(N, m)}{\sum_{j=0}^{\infty} jC(N, j)}, \quad P\{\hat{X}_N = m\} = \frac{C(N, m)}{\sum_{j=0}^{\infty} C(N, j)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E \hat{X}_N &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} jC(N, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} C(N, j)} = \left(E \frac{1}{X_N} \right)^{-1}, \\ E \hat{X}_N^k &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j^k C(N, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} jC(N, j)} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} jC(N, j)}{\sum_{j=0}^{\infty} C(N, j)} = \left(E \frac{1}{X_N} \right)^{-1} E X_N^{k-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

То же выполняется для двумерных случайных величин, определенных как

$$\begin{aligned} P\{(X_N, Y_N) = (m, l)\} &= \frac{mlC(N, m, l)}{\sum_{i, j=0}^{\infty} ijC(N, i, j)}, \\ P\{(\hat{X}_N, \hat{Y}_N) = (m, l)\} &= \frac{C(N, m, l)}{\sum_{i, j=0}^{\infty} C(N, i, j)}. \end{aligned}$$

В этом случае

$$E(\hat{X}_N^k \hat{Y}_N^l) = \left(E \frac{1}{X_N Y_N} \right)^{-1} E(X_N^{k-1} Y_N^{l-1}). \quad (38)$$

Из (37) видно, что если $N^{-q} X_N$ сходится, то и $N^{-q} \hat{X}_N$ сходится, так как моменты X_N и \hat{X}_N — одного порядка. То же свойство выполняется и для двумерных случайных величин.

Если мы применим этот факт и уравнения (37), (38) к предельным распределениям полученным во второй части статьи, получим следующее соотношение многокорневых и не-корневых триангуляций.

- В субкритической области существует предельное распределение \hat{m} , и совместное предельное распределение \hat{m}, \hat{m}' . Теорема 1 выполняется в точности, производящие функции распределений получаются из (19) и (24) заменой $\Phi(y)$ на

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - \sqrt{6}y})^2 \sqrt{1 - \sqrt{6}y}}.$$

- В критической точке для одной границы существует предел $\hat{\eta} = N^{-\frac{1}{2}} \hat{m}$,

$$\mathbb{E} \hat{\eta}^k = \frac{\Gamma(1/4 + k/2) \Gamma(3/4) 3^k}{\pi \sqrt{2}}, \quad p_{\hat{\eta}}(x) = \frac{\Gamma(3/4) \exp(-t^2/9)}{\pi \sqrt{6} \sqrt{t}}.$$

Для двух границ

$$\mathbb{E} \hat{\eta}_1^k \hat{\eta}_2^l = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(k + 1/2) \Gamma(l + 1/2)}{\Gamma(k/2 + l/2 + 1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+l}.$$

- В суперкритической области при переходе к триангуляциям без корня в случае одной границы поведение сохраняется в точности. В случае двух границ придется сделать дополнительные выкладки. Из (35) получим совместные моменты η, η'

$$\mathbb{E} \eta^k \eta'^j = \int_0^1 \frac{8}{\pi} x^{k+1/2} (1-x)^{l+1/2} dx = \frac{8}{\pi} \frac{\Gamma(l + 3/2) \Gamma(k + 3/2)}{\Gamma(l + k + 3)},$$

откуда вследствие (38)

$$\mathbb{E} \hat{\eta}^k \hat{\eta}'^l = \frac{\Gamma(l + 1/2) \Gamma(k + 1/2)}{\pi \Gamma(l + k + 1)}, \quad \mathbb{E} (\hat{\eta} + \hat{\eta}')^k = 1.$$

Следовательно, поведение суммы границ сохраняется – $\hat{S}/N \rightarrow a(\lambda)$, а маргинальные распределения имеют плотность

$$p_{\hat{\eta}}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Список литературы

- [1] Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1990.

- [2] Krikun M., Malyshev V. A. Random Boundary of a Planar Map In: *Trends in Mathematics. Mathematics and Computer Science II. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities* (Chauvin Ed.B., Flajolet Ph., Gardy D., Mokrakadem A. Eds.). BirkHauser, 2002.
- [3] Малышев В. А. Гиббсовские и квантовые дискретные пространства. *Успехи матем. наук* (2001) **56**, No 5, 117–172.
- [4] Tutte W. T. A Census of Planar Triangulations. *Canad. J. Math.* (1962) **14**, 21–38. (перевод: Татт У. Т., Перечисление плоских триангуляций, Кибернетический сборник. Нов. сер. 1997, 14, 25–45).
- [5] Tutte W. T. The enumerative theory of planar maps. In: *Surveys of Combinatorial Theory* (Srivastava J. N. Ed.). North-Holland, New York, 437–448.
- [6] Tutte W. T. Chromatic Sums for Rooted Planar Triangulations, IV: The case $\lambda = \infty$. *Canad. J. Math.* (1973) **25**, 929–940.
- [7] Bender E. A., Wormald N. C. The Asymptotic Number of Rooted Nonseparable Maps on a Surface. *Journal of Combinatorial Theory* (1988) A 49, 370-380.
- [8] Bender E. A., Canfield E. R., Richmond L. B. The Asymptotic Number of Rooted Nonseparable Maps on a Surface II: Enumeration by Vertices and Faces. *Journal of Combinatorial Theory* (1993) A 63, 318–329.
- [9] Ambjorn J. *Quantization of geometry*. Lectures at the 1994 Les Houches Summer School “Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory“, arXiv:hep-th/9411179, 1994.
- [10] Polyakov A. M. *Gauge fields and strings*. Harwood, Chur, 1987. (перевод: Поляков А. М. *Калибровочные поля и струны*. Удмуртский университет, Ижевск, 1999).