

LICENCE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ANNÉE

Unité d'enseignement LCMA 4U11

ANALYSE 3

Françoise GEANDIER

Université Henri Poincaré Nancy I
Département de Mathématiques

Table des matières

I Séries numériques	1
1. Séries - Somme d'une série.	
2. Séries absolument convergentes.	
3. Séries à termes positifs.	
4. Séries semi-convergentes.	
II Suites et séries de fonctions	21
1. Convergence simple.	
2. Convergence uniforme.	
3. Propriétés des limites uniformes de suites de fonctions.	
4. Séries de fonctions.	
5. Propriétés des sommes de séries de fonctions.	
III Séries entières	35
1. Séries entières - Rayon de convergence.	
2. Opérations sur les séries entières.	
3. Convergence uniforme - Propriétés des sommes de séries entières.	
4. Fonctions développables en série entière.	
5. Développements en série entière des fonctions usuelles.	
6. Exponentielle complexe.	
7. Résolution d'équations différentielles.	
IV Séries de Fourier	59
1. Fonctions périodiques.	
2. Séries trigonométriques.	
3. Séries de Fourier.	

V Intégrales généralisées 75

1. Rappels sur les intégrales de Riemann.
2. Intégrales convergentes.
3. Intégrale généralisée d'une fonction positive.
4. Critère de Cauchy.
5. Intégrales absolument convergentes.
6. Intégrales semi-convergentes.
7. Comparaison série-intégrale.
8. Suites d'intégrales généralisées.

VI Intégrales dépendant d'un paramètre 95

1. Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre.
2. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

I SÉRIES NUMÉRIQUES

1. Séries - Somme d'une série

1.1 Définitions et proposition

On considère n éléments u_1, u_2, \dots, u_n d'un K -espace vectoriel E ; on notera

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

L'indice k est appelé indice de sommation et peut être remplacé par une autre lettre (autre que u et n) : il s'agit d'un indice dit "muet".

On a la propriété de linéarité suivante : si $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ sont des éléments de E et λ et μ des scalaires, on a

$$\sum_{k=1}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k + \mu \sum_{k=1}^n v_k.$$

D'autre part, on peut faire une "translation d'indices" dans une somme, i.e, si a est un entier, en posant $p = k + a$, on a :

$$\sum_{p=1}^n u_p = \sum_{k=1-a}^{n-a} u_{k+a}.$$

1.2 Définitions

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On peut alors définir une autre suite à partir de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On appelle série numérique de terme général u_n et on note $\sum u_n$ le couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Le nombre S_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

1.3 Définition

Si une suite (u_n) de nombres réels ou complexes n'est définie qu'à partir du rang n_0 , on peut considérer pour tout $n \geq n_0$ la somme partielle $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et définir ainsi la série

$((u_n)_{n \geq n_0}, (S_n)_{n \geq n_0})$ que l'on notera $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Réciproquement, à la série $\sum u_n$ et à l'entier n_0 , on peut associer la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, dite série déduite de $\sum u_n$ par troncature au rang n_0 .

1.4 Définitions

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge, et qu'elle diverge si la suite des sommes partielles diverge.

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on appelle somme de la série la limite de la suite des sommes partielles et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on appelle reste d'ordre n de la série le nombre

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

qui converge alors vers 0.

On dit que deux séries sont de même nature lorsqu'elles convergent toutes les deux ou lorsqu'elles divergent toutes les deux. Une série et sa série déduite par troncature sont ainsi de même nature ; toutefois elles n'ont pas la même somme.

1.5 Exemples

a) Soit $a \in \mathbb{C}$; la série $\sum a^n$, appelée série géométrique de raison a , converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

En effet $S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$ et $S_n = n+1$ si $a = 1$, d'où le résultat.

b) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, appelée série harmonique, diverge ; en effet :

si $k \geq 1$, pour tout $x \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, d'où $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$. En sommant ces inégalités on obtient alors

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

or

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$$

d'où

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ et ainsi la série harmonique diverge.

c) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, en effet si $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0 \text{ et } S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0.$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

on en déduit que la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante et la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 : les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes et par conséquent convergent vers la même limite l , donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers l , i.e la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

1.6 Procédé télescopique

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes et considérons $u_n = v_{n+1} - v_n$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Preuve :

En effet, on a $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$ d'où le résultat.

□

1.7 Exemples

a) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge ; en effet, on a pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) La série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge ; en effet, on a pour tout $n \geq 1$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

1.8 Proposition

Si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Preuve :

En effet, si la série $\sum u_n$ converge, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge vers une limite finie S ; alors on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0.$$

□

Remarque Cette condition nécessaire de convergence d'une série n'est pas suffisante : en effet, la série harmonique diverge alors que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

1.9 Proposition

Considérons deux séries à termes réels ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} non nul.

a) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Si l'une des deux séries converge et l'autre diverge, la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

b) Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda u_n)$ sont de même nature et si $\sum u_n$ converge, alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Preuve : découle immédiatement des propriétés des limites de suites.

□

Remarque On ne peut rien dire de la série $\sum(u_n + v_n)$ si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. En effet les deux séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}\right)$ divergent alors que la série somme est la série nulle donc converge; par contre, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

1.10 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes; on suppose que les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent alors la série $\sum u_n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}.$$

Preuve :

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{p=0}^n u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \sum_{p=0}^n u_{2p} + \sum_{p=0}^n u_{2p+1}$$

or les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent donc $T_n = \sum_{p=0}^n u_{2p}$ a une limite finie L et

$V_n = \sum_{p=0}^n u_{2p+1}$ a une limite finie L' ; on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n + V_{n-1}) = L + L'$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n + V_n) = L + L'.$$

Comme l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de \mathbb{N} , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L + L'$$

donc la série $\sum u_n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}.$$

□

2. Séries absolument convergentes

2.1 Critère de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes ; la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

puisque $S_m - S_{n-1} = \sum_{k=n}^m u_k$.

2.2 Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes converge absolument, ou est absolument convergente, si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

2.3 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes ; si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente, de plus on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve :

La série $\sum |u_n|$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy 2.1 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous n et $m \in \mathbb{N}$,

$$m > n \geq N \implies \sum_{k=n}^m |u_k| < \varepsilon.$$

Or l'inégalité triangulaire nous donne

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k|$$

d'où

$$m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon$$

et ainsi la série $\sum u_n$ converge, toujours d'après le critère de Cauchy.

D'autre part, on a également pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=0}^m u_k \right| \leq \sum_{k=0}^m |u_k|$$

on obtient alors, quand $m \rightarrow +\infty$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

□

Remarque Une série peut être convergente sans être absolument convergente ; par exemple on a vu en 1.5 que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge puisqu'on a

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{n+1} - 1) \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

3. Séries à termes positifs

3.1 Proposition

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels positifs et considérons la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$; alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : elle converge donc si et seulement si elle est majorée. De plus dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majore tous les termes de la suite.

□

3.2 Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels vérifiant :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies 0 \leq u_n \leq v_n$$

alors

a) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge.

b) Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.

Preuve : comme une série et sa série déduite par troncature au rang N sont de même nature, on fera la démonstration dans le cas $N = 0$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. En sommant les inégalités $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq S_n \leq T_n.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également et ainsi la série $\sum u_n$ converge d'après 3.1.

Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ également et ainsi la série $\sum v_n$ diverge.

□

3.3 Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies v_n$ est de signe constant ;

b) $u_n \sim v_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve :

On peut supposer que la suite (v_n) est à termes positifs à partir du rang N (sinon on raisonne sur $-v_n$) ;

De plus $u_n \sim v_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$, donc il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle que pour n assez grand, $u_n = \alpha_n v_n$ et $v_n \geq 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$, il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_0 \implies \frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{3}{2} \text{ et } v_n \geq 0$$

d'où

$$n \geq N_0 \implies \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

les propositions 1.9 et 3.2 nous permettent alors de conclure.

□

Exemple Reprenons $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ pour tout $n \geq 1$ étudié dans 1.7 : on a $u_n > 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$ or la série harmonique diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

Remarque

La proposition 3.3 n'est valable que pour les séries à termes de signe constant comme le prouve le contre-exemple suivant :

considérons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$; on a vu en 1.6 que la série $\sum v_n$ converge et que la série harmonique diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge d'après 1.9. Cependant, on a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow 1 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

donc $u_n \sim v_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

3.4 Proposition

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur un intervalle $[N, +\infty[$ ($N \in \mathbb{N}$); alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) la série $\sum_{n \geq N} f(n)$ converge;

b) la série $\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge;

c) la fonction $F(x) = \int_N^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Preuve :

a) \implies b) : comme f est décroissante sur $[N, +\infty[$, on a pour tout $n \geq N$

$$\forall t \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

d'où

$$0 \leq f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n) \quad (*)$$

donc, si la série $\sum_{n \geq N} f(n)$ converge, alors la série $\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge d'après 3.2.

b) \implies c) : supposons que la série $\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge.

D'après la relation de Chasles on a

$$\sum_{k=N}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_N^{n+1} f(t) dt = F(n+1)$$

donc la suite $(F(n+1))_{n \geq N}$ possède une limite finie l . Or la fonction f étant positive sur $[N, +\infty[$, la fonction F est croissante sur $[N, +\infty[$ donc possède une limite quand $x \rightarrow +\infty$ qui ne peut donc être que l .

c) \implies a) : Si $F(x)$ admet une limite finie l en $+\infty$, alors la suite $(F(n+1))_{n \geq N}$ converge vers l , i.e la série $\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge. On en déduit alors que la série $\sum_{n \geq N} f(n+1)$ converge grâce à l'encadrement (*), donc la série $\sum_{n \geq N} f(n)$ converge également.

□

3.5 Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors on a

- a) si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge ;
- b) si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.

Preuve :

On a pour tout $n \geq n_0 - 1$,

$$0 \leq \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

$$0 \leq \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}$$

⋮

$$0 \leq \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

alors, en multipliant ces inégalités, on obtient pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

i.e

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \right) v_n.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer 3.2 pour obtenir la proposition.

□

3.6 Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

alors on a

- a) si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- b) si $l > 1$ ou $l = 1^+$, la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve :

a) Si $l < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a = l + \varepsilon < 1$; d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon = a.$$

Posons $v_n = a^n$, on a alors

$$n \geq N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Or $a < 1$ donc la série $\sum v_n$ converge, par conséquent la série $\sum u_n$ converge d'après 3.5.

b) Si $l > 1$ ou $l = 1^+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 = \frac{1^{n+1}}{1^n}.$$

Comme la série $\sum 1^n$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge, toujours d'après 3.5.

□

Remarques

a) On ne peut pas conclure si $l = 1$: en effet si $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Mais la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

b) Une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs peut converger sans que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ ait une limite.

3.7 Règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors on a

a) Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

b) Si $l > 1$ ou $l = 1^+$, la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve :

a) Si $l < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a = l + \varepsilon < 1$; d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon = a$$

d'où

$$n \geq N \implies u_n \leq a^n.$$

Or $a < 1$ donc la série $\sum a^n$ converge, par conséquent la série $\sum u_n$ converge d'après 3.2.

b) Si $l > 1$ ou $l = 1^+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \sqrt[l]{u_n} \geq 1$$

et donc

$$n \geq N \implies u_n \geq 1.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : la série $\sum u_n$ diverge donc.

□

Remarques

a) La règle de Cauchy ne permet pas de conclure quand $l = 1$: en effet si $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[l]{u_n} = 1$. Mais la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

b) On peut montrer que si $\sum u_n$ est une série à termes réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[l]{u_n} = l$. Par conséquent si on se trouve dans le cas douteux $l = 1$ pour la règle de d'Alembert, il est inutile d'essayer la règle de Cauchy.

c) Une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs peut converger sans que la suite $(\sqrt[l]{u_n})$ ait une limite.

3.8 Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

Si $\alpha \leq 0$, la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 0$, considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$: elle est continue, décroissante et positive et si on note $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, on a

$$F(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \text{ et } F(x) = \ln x \text{ si } \alpha = 1.$$

par conséquent $F(x)$ possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$: on déduit

alors de 3.4 que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

□

3.9 Règle de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n^\alpha u_n)_{n \geq 1}$ possède une limite l . Alors on a

- a) Si l est finie non nulle, les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.
- b) Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- c) Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve : tout d'abord, remarquons que $l \geq 0$ nécessairement.

a) Si l est finie non nulle, alors $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$; on déduit alors de 3.3 que les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

b) Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies n^\alpha u_n \leq 1$$

d'où

$$n \geq N_1 \implies u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

On déduit alors de 3.2 et 3.8 que la série $\sum u_n$ converge.

c) Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \implies n^\alpha u_n \geq 1$$

d'où

$$n \geq N_2 \implies u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

On déduit alors de 3.2 et 3.8 que la série $\sum u_n$ diverge.

□

Remarques

a) Si $l = 0$ et $\alpha \leq 1$, on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $n^\alpha \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $n^\alpha \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow 0$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

b) De même on ne peut pas conclure si $l = +\infty$ et $\alpha > 1$: avec $\alpha = \frac{7}{4}$, on a $n^\alpha \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $n^\alpha \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

Exemples

a) Posons $u_n = e^{-n^2}$: on a $u_n > 0$ et $n^2 u_n \longrightarrow 0$ donc la série $\sum e^{-n^2}$ converge.

b) Posons $u_n = \frac{1}{\ln n}$ pour tout $n \geq 1$: on a $u_n > 0$ et $n u_n \longrightarrow +\infty$ donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.

4. Séries semi-convergentes

4.1 Définition

On dit qu'une série à termes réels ou complexes est semi-convergente si et seulement si elle est convergente sans être absolument convergente.

4.2 Critère de Leibniz (dit des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, tendant vers 0 (donc à termes positifs). Alors la série (dite alternée) $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, de plus on a la majoration du reste suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}.$$

Preuve : Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle de la série $\sum u_n$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \text{ et } S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geq 0.$$

Ainsi la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante. De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$$

donc la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ tend vers 0. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes et ainsi convergent toutes les deux vers une même limite finie S . Par conséquent la suite (S_n) converge vers S , i.e, la série $\sum u_n$ converge. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + u_{2n+2}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}$$

de même

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n} - u_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, -u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0.$$

On en déduit que, pour tout entier n

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| = |S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

□

4.3 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente et soit $\sum v_n$ une série absolument convergente ; alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est semi-convergente.

Preuve :

La série $\sum v_n$ étant absolument convergente est convergente, donc la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente. D'autre part, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|.$$

donc, si la série $\sum (u_n + v_n)$ était absolument convergente, la série $\sum u_n$ le serait également : par conséquent la série $\sum (u_n + v_n)$ est semi-convergente.

□

Remarque La somme de deux séries semi-convergentes peut être absolument convergente : soient $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont semi-convergentes alors que leur somme est la série nulle donc est absolument convergente.

4.4 Critère d'Abel

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0 et soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists M > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \implies |w_n + w_{n+1} + \dots + w_m| \leq M.$$

Alors la série $\sum v_n w_n$ converge et on a

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} v_k w_k \right| \leq M v_n.$$

Preuve :

La preuve repose sur l'écriture suivante, appelée transformation d'Abel :

$$\sum_{k=n}^m v_k w_k = v_m \left(\sum_{k=n}^m w_k \right) + (v_{m-1} - v_m) \left(\sum_{k=n}^{m-1} w_k \right) + \cdots + (v_n - v_{n+1}) \left(\sum_{k=n}^n w_k \right).$$

On en déduit

$$\left| \sum_{k=n}^m v_k w_k \right| \leq |v_m| \left| \sum_{k=n}^m w_k \right| + |v_{m-1} - v_m| \left| \sum_{k=n}^{m-1} w_k \right| + \cdots + |v_n - v_{n+1}| \left| \sum_{k=n}^n w_k \right|.$$

d'où

$$\left| \sum_{k=n}^m v_k w_k \right| \leq M (|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}|).$$

Or la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît vers la limite 0 donc elle est à termes positifs et ainsi on a

$$|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}| = v_m + v_{m-1} - v_m + \cdots + v_n - v_{n+1} = v_n$$

d'où

$$\left| \sum_{k=n}^m v_k w_k \right| \leq M v_n \quad (*).$$

De plus, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies 0 \leq v_n \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m v_k w_k \right| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy permet alors de conclure que la série $\sum v_n w_n$ converge. De plus en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité (*) on obtient

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} v_k w_k \right| \leq M v_n.$$

□

5. Produit de séries

5.1 Définition et théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs convergentes. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

alors la série $\sum w_n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

La série $\sum w_n$ est appelée produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons les sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et

$W_n = \sum_{k=0}^n w_k$. D'autre part, notons

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 / p + q \leq n\} \text{ et } J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 / p \leq n \text{ et } q \leq n\}.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset J_n \subset I_{2n}$, donc, comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs, on en déduit

$$\sum_{(p,q) \in I_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in J_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in I_{2n}} u_p v_q$$

or

$$\sum_{(p,q) \in J_n} u_p v_q = \left(\sum_{p=0}^n u_p \right) \left(\sum_{q=0}^n v_q \right) = U_n V_n$$

et

$$\sum_{(p,q) \in I_n} u_p v_q = \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p+q=s} u_p v_q \right) = \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p=0}^s u_p v_{s-p} \right) = \sum_{s=0}^n w_s = W_n$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n} \quad (*)$$

Or les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs et convergent donc les suites à termes positifs $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont majorées par conséquent la suite $(U_n V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi majorée : on en déduit que la suite (croissante) $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge i.e la série $\sum w_n$ converge. De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

5.2 Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels ou complexes. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur série produit $\sum w_n$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve :

Avec les notations de la preuve de 5.1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|w_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|$$

or les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, on en déduit alors d'après 5.1 que la série produit des séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ converge, donc que la série $\sum w_n$ converge absolument d'après 3.2.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n V_n - W_n = \sum_{(p,q) \in J_n} u_p v_q - \sum_{(p,q) \in I_n} u_p v_q = \sum_{(p,q) \in J_n - I_n} u_p v_q$$

d'où

$$|U_n V_n - W_n| = \left| \sum_{(p,q) \in J_n - I_n} u_p v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in J_n - I_n} |u_p| |v_q| = \sum_{(p,q) \in J_n} |u_p| |v_q| - \sum_{(p,q) \in I_n} |u_p| |v_q|$$

or

$$\sum_{(p,q) \in J_n} |u_p| |v_q| = \left(\sum_{p=0}^n |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^n |v_q| \right)$$

et

$$\sum_{(p,q) \in I_n} |u_p| |v_q| = \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p+q=s} |u_p| |v_q| \right) = \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p=0}^s |u_p| |v_{s-p}| \right)$$

d'où

$$|U_n V_n - W_n| \leq \left(\sum_{p=0}^n |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^n |v_q| \right) - \sum_{s=0}^n \left(\sum_{p=0}^s |u_p| |v_{s-p}| \right)$$

mais le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après 5.1 donc $U_n V_n - W_n$ également d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

□

Exemple

Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$; alors la série géométrique $\sum z^n$ converge absolument : faisons le produit de cette série par elle-même. Le coefficient de cette série produit est donné par

$$w_n = \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} = \sum_{k=0}^n z^n = (n+1)z^n.$$

Le théorème 5.2 permet alors d'affirmer que la série $\sum (n+1)z^n$ converge absolument et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

II SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1. Convergence simple

1.1 Définition

Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et f une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f , ou que f est la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$:

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{x,\varepsilon} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarque : il est naturel de se demander si les propriétés des fonctions f_n se transmettent à leur limite simple f ; l'exemple suivant montre que la limite simple de fonctions continues n'est pas continue en général :

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$; alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$: ainsi la limite simple f n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n l'est.

1.2 Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} convergeant simplement vers f , alors on a :

- Si les fonctions f_n sont positives sur I à partir d'un certain rang, f est positive sur I ;
- Si les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes) sur I à partir d'un certain rang, f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Preuve : La preuve repose sur la conservation des inégalités larges par passage à la limite.

□

2. Convergence uniforme

2.1 Norme infinie

Considérons une fonction f définie sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on suppose que f est bornée sur I i.e

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

Alors la fonction $|f|$ est majorée donc admet une borne supérieure que l'on note $\|f\|_\infty$ et que l'on appelle norme infinie de f :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Par définition de la borne supérieure on a alors :

- a) $\forall x \in I, |f(x)| \leq \|f\|_\infty$;
 b) Si M est une constante telle que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$, alors $\|f\|_\infty \leq M$.
 Si f n'est pas bornée sur I , on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

2.2 Proposition

La norme infinie est effectivement une norme sur l'ensemble \mathcal{B} des fonctions bornées de I dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), i.e elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

- a) $\forall f \in \mathcal{B}, \|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$;
 b) $\forall f \in \mathcal{B}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$;
 c) $\forall f$ et $g \in \mathcal{B}, \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

De plus, on a

- d) $\forall f$ et $g \in \mathcal{B}, \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

D'autre part, si f ou g n'est pas bornée sur I les propriétés a), b), c) et d) sont encore vérifiées.

Preuve :

- a) Soit $f \in \mathcal{B}$; si $f = 0$ il est clair que $\|f\|_\infty = 0$; réciproquement si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\forall x \in I, |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ i.e $\forall x \in I, f(x) = 0$: f est donc la fonction nulle sur I .
 b) Soit $f \in \mathcal{B}$; on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) et pour tout $x \in I$

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|$$

d'où le résultat.

- c) Soient f et $g \in \mathcal{B}$; on a pour tout $x \in I$:

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

d'où

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

par passage à la borne supérieure.

- d) Soient f et $g \in \mathcal{B}$; on a pour tout $x \in I$:

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

d'où

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

par passage à la borne supérieure.

□

2.3 Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.4 Proposition et définition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et f une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) Soit J une partie non vide de I : si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors la suite des restrictions à J des fonctions f_n converge uniformément vers la restriction à J de la fonction f : on dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur J .

b) Soient I_1 et I_2 deux parties non vides de I ; si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I_1 et sur I_2 , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I_1 \cup I_2$.

On dira qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} converge uniformément localement sur I si elle converge uniformément sur tout segment contenu dans I .

Preuve :

a) provient de l'inégalité

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

b) provient de l'égalité

$$\sup_{x \in I_1 \cup I_2} |f_n(x) - f(x)| = \max \left(\sup_{x \in I_1} |f_n(x) - f(x)|, \sup_{x \in I_2} |f_n(x) - f(x)| \right).$$

□

2.5 Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} telles que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I .

Exemple

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$; alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, ce ne peut être que vers sa limite simple f d'après 2.5, étudions donc la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$:

si $x \in [0, 1[$, $|f_n(x) - f(x)| = x^n$ et $|f_n(1) - f(1)| = 0$ donc

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 = \sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$$

et ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, ni sur $[0, 1[$.

Par contre si on fixe $a \in [0, 1[$, alors

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n \longrightarrow 0$$

et ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$: on constate donc que la convergence uniforme locale sur $[0, 1[$ n'entraîne pas la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Il n'est pas toujours possible de calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ comme on vient de le faire, d'où l'utilité de la proposition suivante :

2.6 Proposition

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Preuve :

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , il suffit de prendre $a_n = \|f_n - f\|_\infty$.

Réciproquement, s'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

alors on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n - f\|_\infty \leq a_n$$

et ainsi $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

□

2.7 Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I telle que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I .

Preuve :

En effet, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Alors si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I on a $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$; on en déduit alors $|f_n(x_n) - f(x_n)| \longrightarrow 0$ ce qui est absurde; donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I .

□

2.8 Proposition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de limites uniformes respectives f et g ; alors la suite $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f + g$ et si λ est un scalaire, la suite $(\lambda f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers λf .

Preuve :

en effet on a d'après 2.2

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty$$

et

$$\|\lambda f_n - \lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f_n - f\|_\infty.$$

□

2.9 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Preuve :

Supposons le critère de Cauchy vérifié, alors on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

par conséquent pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc converge vers une limite que l'on notera $f(x)$. Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I . Or si on fait tendre m vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

Réciproquement, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors l'inégalité triangulaire nous donne

$$m > n \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et le critère de Cauchy de convergence uniforme est vérifié.

□

3 Propriétés des limites uniformes de suites de fonctions

3.1 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de limite uniforme f sur I . Alors la fonction f est bornée sur I si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, la fonction f_n est bornée sur I .

Preuve :

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies \|f_n - f\|_\infty < 1.$$

Supposons qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que les fonctions f_n soient bornées sur I pour tout $n \geq N_2$, alors pour $m = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_m\|_\infty + \|f_m\|_\infty < 1 + \|f_m\|_\infty$$

et ainsi f est bornée sur I .

Réciproquement, si f est bornée sur I , on a pour tout $n \geq N_1$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + \|f\|_\infty$$

et ainsi les fonctions f_n sont bornées sur I pour tout $n \geq N_1$.

□

3.2 Théorème d'interversion des limites

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de limite uniforme f sur I et soit a un point de \bar{I} .

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x)$ admet une limite finie u_n quand x tend vers a . Alors la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie l et la fonction $f(x)$ admet l pour limite quand x tend vers a , i.e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

Preuve :

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy : puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , on a d'après le critère de Cauchy uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

alors en faisant tendre x vers a , on obtient

$$m > n \geq N \implies |u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc possède une limite finie l . Montrons que $f(x)$ tend l quand x tend vers a :

Considérons $\varepsilon > 0$; comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

de plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$: comme $f_N(x)$ tend vers u_N quand x tend vers a , il existe donc un voisinage \mathcal{V} de a dans \bar{I} tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}, |f_N(x) - u_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On obtient alors

$$\forall x \in \mathcal{V}, |l - f(x)| \leq |l - u_N| + |u_N - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

et ainsi $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a .

□

3.3 Théorème

a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} convergeant uniformément vers une fonction f sur I et soit x_0 un point de I ; si f_n est continue en x_0 pour n assez grand, alors f est continue en x_0 .

b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} convergeant uniformément localement vers une fonction f sur I ; si f_n est continue sur I pour n assez grand, alors f est continue sur I .

Preuve :

a) On applique le théorème 3.2 pour $a = x_0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

or la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément donc simplement vers f sur I , et pour tout n , f_n est continue en x_0 d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

i.e

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

donc f est continue en x_0 .

b) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction f sur I , alors pour tout $x \in I$, on considère un segment I_x de I contenant x et on applique a) : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I_x et les fonctions f_n sont continues en x donc f est continue en x . Donc f est continue sur I .

□

3.4 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} convergeant uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$; alors la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$, i.e on peut intervertir l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Preuve :

On suppose $a \leq b$ (sinon on écrit $\int_a^b f_n(x) dx = - \int_b^a f_n(x) dx$). On a alors

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

or on a pour tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, d'où

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b - a) \|f_n - f\|_\infty.$$

Or $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

3.5 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;
- la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction g sur I ;
- il existe un point a de I telle que la suite numérique $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur I vers une fonction f qui est de classe C^1 sur I et telle que $f' = g$.

Preuve :

Notons l la limite de la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ et posons pour tout $x \in I$

$$f(x) = l + \int_a^x g(t) dt.$$

La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme des fonctions continues f'_n , f est dérivable sur I et $f' = g$.

D'autre part, les fonctions f'_n étant de classe C^1 sur I , on a pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

d'où pour tout $x \in I$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - l + \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt.$$

Considérons maintenant deux éléments u et v de I tels que $u < v$ et montrons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[u, v]$: pour tout $x \in [u, v]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - l| + \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right|.$$

Or pour tout $x \in [u, v]$, x et a appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où $[\alpha, \beta]$ désigne $[u, v]$ si $u \leq a \leq v$, $[a, v]$ si $a < u$ et $[u, a]$ si $a > v$, d'où

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - l| + |x - a| \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f'_n(t) - g(t)|.$$

Or, pour tout $x \in [u, v]$, on a $|x - a| \leq M = \max(|a - u|, |v - a|, |v - u|)$ suivant que $a \in [u, v]$ ou pas, d'où

$$\sup_{x \in [u, v]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - l| + M \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f'_n(t) - g(t)|.$$

Or la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers g sur I donc la suite $(\sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f'_n(t) - g(t)|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ; d'autre part la suite $(|f_n(a) - l|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on en déduit aussitôt que la suite $(\sup_{x \in [u, v]} |f_n(x) - f(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 i.e que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[u, v]$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers f sur I .

□

Remarque

Une limite uniforme de fonctions dérivables n'est pas dérivable en général : considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

alors pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur \mathbb{R} , mais la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la fonction $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

3.6 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et soit k un entier ≥ 1 ; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- la suite des dérivées k -ièmes $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction g sur I ;
- il existe un point a de I telle que pour tout entier $m \in [0, k - 1]$, la suite numérique $(f_n^{(m)}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur I vers une fonction f qui est de classe C^k sur I et telle que $f^{(k)} = g$.

Preuve : récurrence sur k en utilisant 3.5.

4 Séries de fonctions

4.1 Définitions

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; considérons la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

- On dit que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, i.e la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite finie.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série réelle $\sum |u_n(x)|$ converge, i.e la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_n(x) = \sum_{k=0}^n |u_k(x)|$ possède une limite finie.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I i.e, si S désigne la limite uniforme de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $\|S_n - S\|_\infty$ tend vers 0.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument uniformément sur I si la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .
- On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement sur I si la suite numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

4.2 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Preuve : il s'agit tout simplement d'écrire le critère de Cauchy uniforme 3.9 pour la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$.

□

4.3 Proposition

- a) Une série de fonctions convergeant normalement sur un intervalle I de \mathbb{R} converge absolument uniformément sur I ;
- b) une série $\sum u_n$ convergeant absolument uniformément sur I converge uniformément sur I et absolument simplement sur I ;
- c) une série $\sum u_n$ convergeant uniformément sur I converge simplement sur I ;
- d) une série $\sum u_n$ convergeant absolument simplement sur I converge simplement sur I .

Preuve :

a) Considérons une série de fonctions $\sum u_n(x)$ convergeant normalement sur un intervalle I de \mathbb{R} ; on a pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u_k\|_\infty$$

alors, comme la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge, on a d'après le critère de Cauchy des séries numériques,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \sum_{k=n+1}^m \|u_k\|_\infty < \varepsilon$$

donc la série de fonctions $\sum |u_n(x)|$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I : la série $\sum u_n(x)$ converge donc absolument uniformément sur I .

b) On a pour tout $x \in I$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)|$$

donc une série $\sum u_n$ convergeant absolument uniformément sur I converge uniformément sur I par le critère de Cauchy uniforme. De plus la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

c) La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

d) La convergence absolue d'une série numérique entraîne la convergence.

□

4.4 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I .

Preuve :

En effet si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I , la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction S sur I et alors la suite $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers $S - S = 0$.

□

4.5 Critère de Weierstrass

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on suppose qu'il existe une série réelle convergente $\sum a_n$ telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leq a_n$$

alors la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur I .

Preuve :

On a par hypothèse

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leq a_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_\infty \leq a_n$$

on en déduit aussitôt que la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge par les règles de comparaison des séries positives : ainsi la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur I .

□

4.6 Critère d'Abel uniforme

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} convergeant uniformément vers 0 sur I , et soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} vérifiant

$$\exists M > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \implies \forall x \in I, |w_n(x) + w_{n+1}(x) + \dots + w_m(x)| \leq M.$$

Alors la série de fonctions $\sum v_n w_n$ converge uniformément sur I .

Preuve :

Appliquons le critère d'Abel aux séries numériques $\sum v_n(x)w_n(x)$ pour tout $x \in I$: on a alors

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)w_k(x) \right| \leq M|v_{n+1}(x)|$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)w_k(x) \right| \leq M\|v_{n+1}\|_\infty.$$

Or la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I donc $\|v_{n+1}\|_\infty$ tend vers 0 et ainsi le reste de la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément vers 0, i.e la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément.

□

4.7 Critère de Leibniz uniforme

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} convergeant uniformément vers 0 sur I ; alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge uniformément sur I .

Preuve :

Il suffit d'appliquer le critère d'Abel uniforme à la suite $w_n = (-1)^n$.

□

5 Propriétés des sommes de séries de fonctions

5.1 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} convergeant uniformément localement sur I ; alors si les fonctions u_n sont continues sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum u_n$ est une fonction continue sur I .

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 3.3 à la suite des sommes partielles.

□

5.2 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} convergeant uniformément sur $[a, b]$; alors la série numérique $\sum \left(\int_a^b u_n(x) dx \right)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx.$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 3.4 à la suite des sommes partielles.

□

5.3 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^1 sur I ;

- b) la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément localement sur I ;
 c) il existe un point a de I telle que la série numérique $\sum u_n(a)$ converge.

Alors la série $\sum u_n$ converge uniformément localement sur I , sa somme est une fonction de classe C^1 sur I et on peut “dérivée terme à terme”

$$\forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 3.5 à la suite des sommes partielles.

□

5.4 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et soit k un entier ≥ 1 ; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^k sur I ;
 b) la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément localement sur I ;
 c) il existe un point a de I tel que pour tout entier $j \in [0, k - 1]$ la série numérique $\sum u_n^{(j)}(a)$ converge.

Alors la série $\sum u_n$ converge uniformément localement sur I , sa somme est une fonction de classe C^k sur I et on peut “dérivée terme à terme”

$$\forall x \in I, \forall j \in [0, k] , \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à la suite des sommes partielles.

□

III SÉRIES ENTIÈRES

1. Séries entières - Rayon de convergence

1.1 Définition

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes ; on appelle série entière de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n(x)$ définies sur \mathbb{C} par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C}, f_n(x) = a_n x^n.$$

1.2 Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit x_0 un nombre complexe tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Preuve :

La suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x_0^n| \leq M.$$

Si $x_0 = 0$, alors il n'existe aucun $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$.

Si $x_0 \neq 0$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

or $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ donc la série géométrique $\sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ converge ; on en déduit que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument (théorème de comparaison des séries positives).

□

1.3 Corollaire

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit x_0 un nombre complexe tel que la série numérique $\sum a_n x_0^n$ converge ; alors pour $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Preuve :

En effet, comme la série $\sum a_n x_0^n$ converge, le terme général $a_n x_0^n$ tend vers 0 donc la suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : on applique alors le lemme d'Abel.

□

1.4 Théorème et définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors l'ensemble

$$I = \{r \geq 0 / \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$$

est non vide : on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ la borne supérieure de I (qui est un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$). De plus I est un intervalle de \mathbb{R} dont la borne inférieure est 0.

Preuve :

Considérons $I = \{r \geq 0 / \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$: $I \neq \emptyset$ car il contient 0, donc I admet une borne supérieure $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. De plus pour tout $r \in I$, et pour tout $r' \in [0, r]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n r'^n| \leq |a_n r^n|$$

donc la suite $(a_n r'^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée également i.e $r' \in I$: I est donc un intervalle de borne inférieure 0.

□

1.5 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- a) pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
- b) pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| > R$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge.

On appelle disque de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , $D(0, R) = \{x \in \mathbb{C} / |x| < R\}$. Si on se limite à l'étude de la série entière $\sum a_n x^n$ pour x réel , on appelle intervalle de convergence de la série entière l'intervalle ouvert $] -R, R[$.

Preuve :

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$; montrons que R vérifie les conditions a) et b) :

Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < R$, alors il existe $r > 0$ tel que $|x| < r < R$, or I est un intervalle de borne inférieure 0 et de borne supérieure R donc $r \in I$ et ainsi la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ; or $|x| < r$, donc d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| > R$, alors $|x| \notin I$ donc la suite $(a_n |x|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, par conséquent la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 : on en déduit que la série $\sum a_n x^n$ diverge.

Réciproquement, soit R' vérifiant les conditions a) et b) : montrons que $R' = R$.

Considérons un réel r vérifiant $0 \leq r < R'$; alors la série $\sum a_n r^n$ converge, donc la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée, ainsi $r \in I$, on en déduit alors que $[0, R' \subset I$, d'où $R' \leq R$.

Supposons $R' < R$, alors il existe r_1 et r_2 tels que $R' < r_1 < r_2 < R$; comme $r_2 < R$, $r_2 \in I$ i.e la suite $(a_n r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : on en déduit alors que la série $\sum a_n r_1^n$ converge absolument d'après le lemme d'Abel, ce qui est absurde puisque $r_1 > R'$ implique la divergence de la série $\sum a_n r_1^n$. Donc $R = R'$.

□

Remarques Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R .

a) Si $R = 0$, la série $\sum a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$;

b) Si $R = +\infty$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$;

c) on ne peut rien dire a priori du comportement de la série $\sum a_n x^n$ si $|x| = R$: on verra dans la suite des exemples pour lesquels la série converge en tout point du bord du disque de convergence, d'autres pour lesquels la série diverge en tout point du bord du disque de convergence et enfin d'autres pour lesquels la série converge seulement en certains points du bord du disque de convergence ;

d) La série entière $\sum |a_n| x^n$ a pour rayon de convergence R .

Exemple

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 ; en effet si $|x| < 1$, la série converge absolument et si $|x| > 1$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc la série $\sum x^n$ diverge.

1.6 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

b) pour tout réel r tel que $r > R$, la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Preuve :

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$; montrons que R vérifie les conditions a) et b) :

D'après 1.5, pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument donc la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit r un réel tel que $r > R$: alors $r \notin I$, i.e la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc elle ne tend pas vers 0.

Réciproquement, soit R' vérifiant les conditions a) et b) : montrons que $R' = R$.

Considérons un réel r vérifiant $0 \leq r < R'$; alors la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée : ainsi $r \in I$, on en déduit donc que $[0, R'] \subset I$, d'où $R' \leq R$.

Supposons $R' < R$, alors il existe r tel que $R' < r < R$: comme $r < R$, d'après 1.5 la série $\sum a_n r^n$ converge absolument donc la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 ce qui est en contradiction avec le fait que $r > R'$: on en déduit que $R' = R$.

□

1.7 Proposition

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On note R_1 le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$.

a) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_2 \leq R_1$;

b) si $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors $R_1 = R_2$.

Preuve :

a) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies |a_n| \leq |b_n|$, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \geq N, |a_n x^n| \leq |b_n x^n|$$

or si $|x| < R_2$, la série $\sum b_n x^n$ converge absolument, donc par comparaison des séries positives, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument : on en déduit que $R_1 \geq R_2$ d'après 1.5.

b) Si $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on a $|a_n x^n| \sim |b_n x^n|$ au voisinage de $+\infty$, donc les deux séries positives $\sum |a_n x^n|$ et $\sum |b_n x^n|$ sont de même nature : on en déduit alors que $R_1 = R_2$ d'après 1.5.

□

Exemples

a) La série entière $\sum \sin nx^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\sin n| \leq 1$$

or la série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geq 1$ d'après 1.7.

D'autre part, la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série entière $\sum \sin nx^n$ diverge en $x = 1$, d'où $R = 1$.

b) La série entière $\sum \frac{n}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet :

$$\frac{n}{n+1} \sim 1 \text{ au voisinage de } +\infty$$

donc les séries entières $\sum \frac{n}{n+1} x^n$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence, à savoir 1.

1.8 Application des règles de Cauchy et d'Alembert

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R .

a) S'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$ et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n \geq N}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{l}$ (avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

b) Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{l}$.

Preuve :

a) On applique la règle de d'Alembert à la série $\sum a_n x^n$:

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \forall n \geq N, \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \longrightarrow l|x|$$

ainsi la série $\sum a_n x^n$ converge absolument si $l|x| < 1$ i.e si $|x| < \frac{1}{l}$ et diverge si $l|x| > 1$ i.e si $|x| > \frac{1}{l}$: on en déduit que $R = \frac{1}{l}$.

b) Raisonnement analogue en appliquant la règle de Cauchy à la série $\sum a_n x^n$.

□

Exemples

a) La série entière $\sum \frac{2n+1}{n+3} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$; en effet si on note $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2n+3}{n+4} \right| \left| \frac{n+3}{2n+1} \right| \longrightarrow 1.$$

a) La série entière $\sum \frac{1}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$; en effet si on note $a_n = \frac{1}{n!}$ on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

1.9 Proposition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R .

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série entière $\sum \lambda^n a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{R}{|\lambda|}$;

b) Pour tout entier $p \geq 1$, la série entière $\sum a_n x^{np}$ a pour rayon de convergence $\sqrt[p]{R}$.

Preuve :

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda^n a_n x^n = a_n (\lambda x)^n$$

ainsi la série $\sum \lambda^n a_n x^n$ converge si $|\lambda x| < R$ i.e si $|x| < \frac{R}{|\lambda|}$ et diverge si $|\lambda x| > R$ i.e si $|x| > \frac{R}{|\lambda|}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum \lambda^n a_n x^n$ est $\frac{R}{|\lambda|}$.

b) La série $\sum a_n x^{np}$ converge si $|x|^p < R$ i.e si $|x| < \sqrt[p]{R}$ et diverge si $|x|^p > R$ i.e si $|x| > \sqrt[p]{R}$ donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^{np}$ est $\sqrt[p]{R}$.

□

2. Opérations sur les séries entières

2.1 Multiplication par un scalaire

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$; alors la série entière $\sum (\lambda a_n) x^n$ a pour rayon de convergence R et pour tout $x \in D(0, R)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Preuve :

Comme $\lambda \neq 0$, les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum (\lambda a_n) x^n$ sont de même nature, donc ont le même rayon de convergence; de plus sur le disque de convergence, on a l'égalité voulue.

□

2.2 Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ vérifie :

$$\text{si } R_1 \neq R_2, R = \inf(R_1, R_2)$$

$$\text{si } R_1 = R_2, R \geq R_1 = R_2.$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Preuve :

Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent donc la série somme $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge : on en déduit que $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et que pour tout x tel que $|x| < \inf(R_1, R_2)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$, considérons $x \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |x| < R_2$; alors la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge et la série numérique $\sum b_n x^n$ converge donc la série somme diverge : on en déduit que $R \leq R_1 = \inf(R_1, R_2)$, d'où $R = \inf(R_1, R_2)$.

□

Remarque

On ne peut rien dire sur le rayon de convergence de la série somme quand $R_1 = R_2$: par exemple les séries entières $\sum x^n$ et $\sum (-1)x^n$ ont même rayon de convergence 1 mais leur série somme est la série nulle de rayon $+\infty$.

2.3 Produit de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 ; considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

alors la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

Preuve :

Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent absolument donc leur série produit également; or le terme général de cette série produit est donné par

$$\sum_{k=0}^n (a_k x^k)(b_{n-k} x^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = c_n x^n$$

Donc la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et si $|x| < \inf(R_1, R_2)$, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (a_k x^k)(b_{n-k} x^{n-k}) \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

□

Remarque

Il existe des séries entières ayant des rayons de convergence différents et dont la série produit a un rayon de convergence $R > \inf(R_1, R_2)$: posons en effet

$$a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad b_n = 0 \text{ pour } n \geq 2$$

alors $R_1 = 1$, $R_2 = +\infty$ et comme $c_n = 0$ pour $n \geq 1$, $R = +\infty$.

3 Convergence uniforme - Propriétés des sommes de séries entières

3.1 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

Alors pour tout réel R' tel que $0 < R' < R$, la série converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0, R') = \{x \in \mathbb{C} / |x| \leq R'\}$.

Preuve :

Soit $R' \in]0, R[$ et considérons un réel r tel que $R' < r < R$; alors on a

$$\forall x \in \overline{D}(0, R'), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n x^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r} \right)^n$$

or $0 < r < R$ donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leq M$, d'où

$$\forall x \in \overline{D}(0, R'), \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| \leq M \left(\frac{R'}{r} \right)^n.$$

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{R'}{r} \right)^n$ converge puisque $\left| \frac{R'}{r} \right| < 1$. On en déduit alors que la série $\sum a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $\overline{D}(0, R')$.

□

3.2 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors la somme de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction continue sur l'intervalle de convergence $] - R, R[$.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n(x) = a_n x^n$ est continue sur $] - R, R[$ et la série converge uniformément localement sur $] - R, R[$ d'après 3.1, donc la fonction somme de la série entière est continue sur $] - R, R[$ d'après II.3.3.

□

3.3 Proposition

Soit $r > 0$ et soit $\sum a_n x^n$ une série entière de somme $S(x)$ qui converge en tout point du disque ouvert $D(0, r)$. On suppose qu'il existe un point x_0 vérifiant $|x_0| = r$ et tel que la fonction $t \mapsto S(tx_0)$ définie sur $[0, 1[$ n'admet pas de limite finie quant $t \rightarrow 1^-$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à r .

Preuve :

Soit $x \in D(0, r)$, alors si on prend x_1 tel que $|x| < |x_1| < r$ la série numérique $\sum a_n x_1^n$ converge puisque $x_1 \in D(0, r)$, donc la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument d'après 1.3 : on en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq r$. Si $R > r = |x_0|$, alors la série entière (de la variable t) $\sum (a_n x_0^n) t^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ d'après 3.1 puisque $|tx_0| \leq |x_0| < R$, donc la fonction $t \mapsto S(tx_0)$ est continue en 1^- ce qui contredit l'hypothèse, donc $R = r$.

□

3.4 Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme S ; on suppose que la série converge en un point x_0 de \mathbb{C} tel que $|x_0| = R$, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} S(tx_0) = S(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n.$$

Preuve :

On considère la série entière $\sum a_n x_0^n t^n$ de la variable t ; posons pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier n

$$v_n(t) = t^n \text{ et } w_n = a_n x_0^n.$$

Comme la série numérique $\sum a_n x_0^n$ converge, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m w_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

or la suite $(v_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions positives, donc d'après la transformation d'Abel (cf. I.4.4), on a

$$\forall t \in [0, 1], \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n}^m w_k v_k(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Il résulte alors du critère de Cauchy uniforme II.4.2 que la série entière $\sum a_n x_0^n t^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ donc la somme de la série est continue sur $[0, 1]$. Or on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) w_n = \begin{cases} S(tx_0) & \text{si } t \in [0, 1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

La continuité à gauche en 1 nous donne alors

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} S(tx_0) = S(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n.$$

□

3.5 Définition et proposition

On appelle série dérivée d'une série entière $\sum a_n x^n$ la série $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$.

Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Preuve :

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et R' le rayon de convergence de la série dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1}x^{n+1}| \leq (n+1)|a_{n+1}x^{n+1}| = (n+1)|a_{n+1}x^n||x|.$$

Si $|x| < R'$, la série $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ converge absolument, il en est donc de même de la série $\sum a_{n+1}x^{n+1}$ et donc de la série $\sum a_n x^n$. On en déduit que $R \geq R'$.

Si $|x| < R$, considérons un réel r tel que $|x| < r < R$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(n+1)a_{n+1}x^n| = \frac{n+1}{r} \left(\frac{|x|}{r} \right)^n |a_{n+1}| r^{n+1}.$$

Or $\frac{|x|}{r} < 1$, donc la suite $\left(\frac{n+1}{r} \left(\frac{|x|}{r}\right)^n\right)$ converge vers 0 donc est bornée : il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{r} \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \leq M$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(n+1)a_{n+1}x^n| \leq M|a_{n+1}|r^{n+1}.$$

Or la série $\sum a_{n+1}r^{n+1}$ converge absolument puisque $r < R$ donc il en est de même de la série $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$, on en déduit $R' \geq R$ et ainsi $R' = R$.

□

3.6 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors sa somme S est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle de convergence $] -R, R[$ et on peut "dériver terme à terme" : pour tout entier $p \geq 1$, et tout $x \in] -R, R[$ on a

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} x^n.$$

Preuve :

On montre facilement par récurrence grâce à 3.5, que les séries dérivées successives de la série entière $\sum a_n x^n$ ont pour rayon de convergence R ; alors le théorème de dérivation des séries de fonctions II.5.4 s'applique puisqu'une série entière converge uniformément localement sur son intervalle de convergence.

□

Exemple

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$; on montre facilement avec la règle de d'Alembert que

$R = 1$; alors la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et on peut dériver terme à terme sur $] -1, 1[$:

$$\forall x \in] -1, 1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

d'où

$$\forall x \in] -1, 1[, S(x) = -\ln(1-x)$$

puisque $S(0) = 0$.

Or d'après le critère de Leibniz, la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge en $x = -1$: on déduit alors du théorème d'Abel 3.4 l'identité suivante :

$$\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

3.7 Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme $S(x)$. Alors on a

a) La fonction $S(x)$ est intégrable sur tout segment $[a, b]$ contenu dans l'intervalle de convergence $] - R, R[$ et on a

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

b) La fonction $S(x)$ admet pour ensemble de primitives sur l'intervalle de convergence $] - R, R[$ les fonctions $F_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$ où λ décrit \mathbb{R} .

Preuve :

a) Il suffit d'appliquer le théorème II.5.2 puisque la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur tout segment de $] - R, R[$.

b) Il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à la série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

□

4 Fonctions développables en série entière

4.1 Définition

Considérons un élément x_0 de \mathbb{R} et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie au voisinage de x_0 : on dit que f est développable en série entière en x_0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul telle que

$$\exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < r \implies f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

On notera que nécessairement $r \leq R$ et que $] - x_0, x_0[$ est contenu dans le domaine de définition de f .

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

est développable en série entière en 0 puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 \implies f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Remarque

On peut toujours se ramener au cas $x_0 = 0$ en effectuant le changement de variable $x \mapsto x - x_0$: on parle alors de fonction développable en série entière à l'origine.

4.2 Définition

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ au voisinage de l'origine ; alors on peut lui associer la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

appelée série de Taylor à l'origine de f .

4.3 Théorème

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière à l'origine ; alors on a :

- a) Il existe $r > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $] - r, r[$;
- b) Le développement en série entière de f à l'origine coïncide avec sa série de Taylor à l'origine.

Preuve :

a) La fonction f étant développable en série entière à l'origine, il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul et un réel $r \in]0, R[$ tels que f coïncide avec la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série sur $] - r, r[$; or d'après 3.6, S est de classe C^∞ sur $] - R, R[$ donc a fortiori f est de classe C^∞ sur $] - r, r[$.

b) Toujours d'après 3.6, pour tout entier $p \geq 1$, S est p -fois dérivable sur $] - R, R[$ et pour tout $x \in] - R, R[$, on a

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} x^n$$

on en déduit que

$$f^{(p)}(0) = S^{(p)}(0) = p! a_p \text{ i.e } a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}.$$

□

Remarque

Une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle $] - r, r[$ et dont la série de Taylor à l'origine a un rayon de convergence non nul n'est pas nécessairement développable en série entière à l'origine : la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

est un contre-exemple (cf. exercice)

4.4 Corollaire

a) Si une fonction f est développable en série entière à l'origine, son développement en série entière est unique.

b) Si les fonctions sommes de deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont égales sur un intervalle $]a, b[$ contenant l'origine, alors les deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ coïncident, i.e on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$

c) Si une fonction f est développable en série entière à l'origine, alors ses fonctions dérivées successives sont développables en série entière à l'origine et leurs développements sont les séries entières dérivées successives du développement de f .

□

4.5 Proposition

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière à l'origine : il existe donc une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul et un réel $r \in]0, R[$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors toute primitive F de f est développable en série entière à l'origine et on a :

$$\forall x \in]-r, r[, F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Preuve :

La fonction f étant continue admet des primitives : il suffit alors d'appliquer le théorème 3.6 à la série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

□

4.6 Théorème

Soit $r > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $] -r, r[$ telle qu'il existe $C > 0$ et $M > 0$ vérifiant

$$\forall x \in]-r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq CM^n.$$

Alors, en notant $r_1 = \min\left(\frac{1}{M}, r\right)$, on a

$$\forall x \in]-r_1, r_1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

donc f est développable en série entière à l'origine.

Preuve :

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $] -r, r[$ et telle qu'il existe $C > 0$ et $M > 0$ vérifiant

$$\forall x \in] -r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq CM^n.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq C(|x|M)^n.$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in] -r, r[$ et tout entier $n \geq 1$, il existe u strictement compris entre 0 et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

alors on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1}$$

d'où

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq C(M|x|)^{n+1}$$

puisque $|u| < |x| < r$. Or si $M|x| < 1$, $(M|x|)^{n+1}$ tend vers 0, donc, si on note $r_1 = \min\left(\frac{1}{M}, r\right)$, on a

$$\forall x \in] -r_1, r_1[, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

i.e

$$\forall x \in] -r_1, r_1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

et ainsi f est développable en série entière à l'origine.

□

5 Développements en série entière des fonctions usuelles

5.1 Théorème

On a pour tout réel x

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Preuve :

Soit $f(x) = e^x$: pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier n , on a $f^{(n)}(x) = e^x$ donc, si on considère un réel $r > 0$ quelconque, on a

$$\forall x \in]-r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{e^r}{n!}.$$

Or la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ converge vers 0 puisque la série $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge d'après la règle de d'Alembert ; on en déduit que la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ est bornée : il existe donc un réel A tel que

$$\forall x \in]-r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq Ae^r \left(\frac{1}{r}\right)^n.$$

et on applique alors le théorème 4.6 avec $C = Ae^r$ et $M = \frac{1}{r}$, d'où

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

mais r est quelconque dans $]0, +\infty[$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On fait une démonstration analogue pour les fonctions cos et sin. Enfin les développements des fonctions ch et sh s'obtiennent en utilisant les définitions

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

5.2 Théorème

Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{Arctg } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{Argth } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Preuve :

Soit $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$: f est C^∞ sur $] -1, 1[$ donc la formule de Taylor avec reste intégral nous permet d'écrire pour tout $x \in] -1, 1[$ et tout entier $n \geq 1$

$$\rho_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Or pour tout $x \in] -1, 1[$ et tout entier $n \geq 1$, on obtient par un calcul simple :

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

donc

$$\rho_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt$$

or pour tout $x \in] -1, 1[$, l'application $t \mapsto \frac{x-t}{1+t}$ est décroissante sur l'intervalle $I_x = [0, x]$ si $x \geq 0$ (resp. $I_x = [x, 0]$ si $x \leq 0$), d'où

$$\forall t \in I_x, \left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$$

donc

$$|\rho_n(x)| \leq a_n(x) = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} |x|^n \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt \right|.$$

Or pour tout $x \neq 0$ dans $] -1, 1[$, on a

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \left| \frac{\alpha-n-1}{n+1} x \right|$$

donc

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| \longrightarrow |x| \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

donc la série $\sum a_n(x)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ d'après la règle de d'Alembert : on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$ i.e

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Considérons maintenant $g(x) = \ln(1+x)$ sur $] -1, 1[$: g est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in]-1, 1[, g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

on déduit alors de la proposition 4.5 que

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = g(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Les développements en série entière de $h(x) = \text{Arctg}x$ et $\varphi(x) = \text{Argth}x$ s'obtiennent de la même façon puisque

$$\forall x \in]-1, 1[, h'(x) = (1+x^2)^{-1} \text{ et } \varphi'(x) = (1-x^2)^{-1}.$$

□

5.3 Méthode de l'équation différentielle

On va exposer ici sur un exemple une méthode utilisant une équation différentielle pour calculer des développements en série entière : considérons à nouveau $f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ sur $] -1, 1[$: on vérifie facilement que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : (1+x)y' - \alpha y = 0 \text{ et } y(0) = 1.$$

Réciproquement, résolvons l'équation différentielle (E) : posons $f(x) = (1+x)^{-\alpha}y(x)$ où $y(x)$ est une solution de (E) sur $] -1, 1[$. Alors on a

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}y(x) + (1+x)^{-\alpha}y'(x)$$

or

$$\forall x \in]-1, 1[, y'(x) = \frac{\alpha y(x)}{1+x}$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}y(x) + \alpha(1+x)^{-\alpha-1}y(x) = 0.$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $] -1, 1[$:

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[, f(x) = c$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[, y(x) = c(1+x)^\alpha$$

or $y(0) = 1$ donc $c = 1$ et ainsi

$$\forall x \in]-1, 1[, y(x) = (1+x)^\alpha.$$

L'équation différentielle (E) possède donc une unique solution sur $] - 1, 1[$ donnée par $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Posons alors

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ pour } n \geq 1$$

alors, d'après le calcul effectué en 5.2, la série $\sum a_n x^n$ n'est autre que la série de Taylor à l'origine de f . Calculons le rayon de convergence R de cette série : on a pour tout $n \geq 1$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

donc $R = 1$ et par conséquent la fonction somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$ et on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Montrons que S est solution de l'équation différentielle (E) sur $] - 1, 1[$: pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) - \alpha S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n] x^n \end{aligned}$$

Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} - (\alpha-n)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$$

on en déduit donc

$$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)S'(x) - \alpha S(x) = 0.$$

De plus $S(0) = a_0 = 1$ donc S vérifie l'équation différentielle (E) sur $] - 1, 1[$.

On en déduit aussitôt, par unicité de la solution de l'équation différentielle (E), que

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = (1+x)^\alpha$$

i.e

$$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

6 Exponentielle complexe

6.1 Proposition et définition

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, sa somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est donc définie et continue sur \mathbb{C} : on l'appelle la fonction exponentielle complexe et on la note e^z .

6.2 Proposition

- Pour tous z_1 et z_2 dans \mathbb{C} , on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\Re(z)}$, d'où $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Preuve :

- La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ ayant pour rayon de convergence $+\infty$, on peut appliquer le théorème 2.3 sur le produit de séries entières afin de calculer $e^{z_1}e^{z_2}$ pour tous z_1 et z_2 dans \mathbb{C} :

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} C_n^k$$

donc

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k z_1^k z_2^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

- On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, donc $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{(\bar{z})^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}}$$

alors, quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, d'où

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\Re(z)}.$$

Or $e^{\Re(z)}$ est un réel positif, donc par passage à la racine carrée, on obtient $|e^z| = e^{\Re(z)}$ et $|e^z| = 1 \iff \Re(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

□

6.3 Proposition

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels ; alors $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Preuve :

D'après 6.2 on a $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$; de plus

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}.$$

Or la série entière $\sum \frac{(iy)^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ donc les séries $\sum \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ont également pour rayon de convergence $+\infty$ d'après 1.9. On déduit alors de la proposition II.10 que

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(iy)^{2n} = (-1)^n y^{2n} \text{ et } (iy)^{2n+1} = i(-1)^n y^{2n+1}$$

d'où

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y.$$

□

6.4 Définition et proposition

On peut étendre les fonctions usuelles \cos , \sin , ch et sh aux nombres complexes en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On a alors les identités suivantes pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

et

$$\text{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} ; \text{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Preuve :

Les quatre séries entières ci-dessus ont un rayon de convergence infini donc leurs sommes sont définies pour tout $z \in \mathbb{C}$.

D'autre part pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$$

alors en séparant les termes de rang pair et les termes de rang impair comme dans la preuve de 6.3, on obtient

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

Les trois autres identités se démontrent de manière analogue.

□

6.5 Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$; alors on a

a) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$; $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$; $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$; $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$.

b) Les fonctions \cos et \sin ne sont pas bornées sur \mathbb{C} .

c) Les formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique connues sur \mathbb{R} restent valables sur \mathbb{C} .

Preuve :

a) Les propriétés découlent immédiatement des identités de 6.4.

b) Soit x un réel : comme $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$, on constate que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(ix) = +\infty$; de même $|\sin(ix)| = \operatorname{sh} x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\sin(ix)| = +\infty$: par conséquent les fonctions \cos et \sin ne sont pas bornées sur \mathbb{C} .

c) Les formules de trigonométrie circulaire sur \mathbb{R} ont été démontrées grâce aux formules de Moivre et à l'identité $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ qui sont encore vérifiées sur \mathbb{C} : elles sont donc valables sur \mathbb{C} . Même chose pour la trigonométrie hyperbolique.

□

6.6 Définition et proposition

On peut définir la tangente et la tangente hyperbolique d'un nombre complexe en posant

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ quand } \cos z \neq 0$$

et

$$\operatorname{th}z = \frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z} \text{ quand } \operatorname{ch}z \neq 0$$

La fonction tg est définie sur $\mathbb{C} - \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et la fonction th est définie sur $\mathbb{C} - \{i(\pi/2 + k\pi) / k \in \mathbb{Z}\}$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i(\pi/2 + k\pi) / k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th}z$ et pour tout $z \in \mathbb{C} - \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\operatorname{th}(iz) = i\operatorname{tg}z$.

Enfin les formules de trigonométrie restent valables.

Preuve :

La fonction th est définie en z si $\operatorname{ch}z \neq 0$; or $\operatorname{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ donc

$$\operatorname{ch}z = 0 \iff e^z = -e^{-z} = -\frac{1}{e^z} \iff (e^z)^2 = -1 \iff e^z = \pm i$$

or si $z = x + iy$ où x et $y \in \mathbb{R}$, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, donc

$$e^z = \pm i \iff e^x \cos y = 0 \text{ et } e^x \sin y = \pm 1$$

or $e^x \neq 0$ donc nécessairement $\cos y = 0$ i.e $y = \pi/2 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin y = \pm 1$ mais $e^x > 0$ donc $e^x = 1$ i.e $x = 0$: en conclusion

$$\operatorname{ch}z = 0 \iff z = i(\pi/2 + k\pi) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc la fonction th est définie sur $\mathbb{C} - \{i(\pi/2 + k\pi) / k \in \mathbb{Z}\}$.

D'autre part $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ donc

$$\cos z = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

par conséquent la fonction tg est définie sur $\mathbb{C} - \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

□

7 Résolution d'équations différentielles

On peut utiliser la théorie des séries entières pour résoudre des équations différentielles linéaires du type

$$(E) : u_m(x)y^{(m)} + \dots + u_1(x)y' + u_0(x)y = f(x)$$

où u_0, u_1, \dots, u_m sont des fonctions polynomiales et où f est une fonction développable en série entière à l'origine.

On cherche une solution y sous la forme d'une somme de série entière

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où les coefficients a_n sont à déterminer : on suppose que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est non nul et on calcule les dérivées successives de y en dérivant terme à terme sur l'intervalle de convergence $] -R, R[$, puis on remplace $y, y', \dots, y^{(m)}$ par ces sommes

de séries dans l'équation (E) ainsi que f . On obtient alors deux sommes de séries entières égales sur un voisinage de 0 : alors d'après 4.4 les coefficients des deux séries entières sont égaux, ce qui permet de calculer les coefficients a_n , puis la somme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On va expliciter davantage la méthode sur l'exemple suivant :

Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$(E) : xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$$

On cherche une solution y sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

puis

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

alors, en remplaçant y , y' et y'' par ces sommes dans l'équation (E), on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

or $n(n-1)a_n = 0$ pour $n = 1$, donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$$

en effectuant un glissement d'indice. De même

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Or si on note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ (supposé non nul), les deux séries $\sum (n+1) n a_{n+1} x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont également R pour rayon de convergence : alors, d'après 2.2, on a pour tout $x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n+1) a_{n+1} + n a_n + a_n] x^n$$

donc pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n]x^n = 1$$

on en déduit alors

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0$$

donc

$$\forall n \geq 1, a_{n+1} = -\frac{a_n}{n} \quad (*).$$

On peut d'ores et déjà calculer le rayon de convergence R , en effet

$$\forall n \geq 1, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n}$$

donc $R = +\infty$ d'après la règle de d'Alembert. D'autre part, une récurrence immédiate permet de calculer a_n grâce à $(*)$:

$$\forall n \geq 1, a_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n$$

mais en mettant $a_1 x$ en facteur puis en effectuant un glissement d'indice, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

mais on reconnaît en cette dernière série le développement en série entière de e^{-x} d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 1 + a_1 x e^{-x}.$$

IV SÉRIES DE FOURIER

1. Fonctions périodiques

1.1 Proposition et définitions

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} : on définit P_f par :

$$P_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)\}.$$

Alors P_f est un sous-groupe additif de \mathbb{R} appelé groupe des périodes de f .

Si $P_f \neq \{0\}$, on dit que f est périodique : tout élément non nul T de P_f est appelé période de f et on dit alors que f est T -périodique. Si P_f est de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a > 0$, a est appelée plus petite période de f .

Si f est une fonction T -périodique continue sur un segment de longueur T , alors f est continue sur \mathbb{R} .

Preuve :

Soient T_1 et $T_2 \in P_f$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$$

donc $T_1 + T_2 \in P_f$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x - T_1) = f((x - T_1) + T_1) = f(x)$$

donc $-T_1 \in P_f$. on en déduit que P_f est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .

Si f est T -périodique et continue sur un segment $[a, a + T]$ où $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, si on note $n = E\left(\frac{x_0 - a}{T}\right)$ on a $x_0 \in [a + nT, a + (n + 1)T]$; or $f(x)$ sur $[a + nT, a + (n + 1)T]$ coïncide avec $f(x - nT)$ sur $[a, a + T]$ donc f est continue en x_0 .

□

Exemples

a) Le groupe des périodes de \cos (resp. \sin) est $2\pi\mathbb{Z}$: 2π est donc la plus petite période de \cos (resp. \sin).

b) Le groupe des périodes de \cos^2 est $\pi\mathbb{Z}$: π est donc la plus petite période de \cos^2 .

c) La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [k - 1, k + 1], f(x) = 1 + |k - x|$$

est 2-périodique.

1.2 Proposition

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , T -périodique et intégrable sur un segment $[a, a + T]$ où $a \in \mathbb{R}$; alors f est localement intégrable sur \mathbb{R} (i.e f est intégrable sur tout segment de \mathbb{R}) et on a :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Preuve :

Comme f est intégrable sur $[a, a + T]$, par le changement de variable $t \longrightarrow t - a$, f est intégrable sur $[0, T]$ et on a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors par le changement de variable $t \longrightarrow t + x_0$, f est intégrable sur $[x_0, x_0 + T]$ et on a

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt.$$

Considérons un segment $[\alpha, \beta]$ de \mathbb{R} et montrons que f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$:

Considérons $n = \frac{\beta - \alpha}{T}$; alors on a

$$[\alpha, \beta] = [\alpha, \alpha + T] \cup [\alpha + T, \alpha + 2T] \cup \dots \cup [\alpha + (n - 1)T, \alpha + nT] \cup [\alpha + nT, \beta].$$

Or f est intégrable sur chaque segment $[\alpha + (k - 1)T, \alpha + kT]$ pour tout entier k , de plus $[\alpha + nT, \beta] \subset [\alpha + nT, \alpha + (n + 1)T]$, donc f est intégrable sur $[\alpha + nT, \beta]$: on en déduit que f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

□

1.3 Définitions et proposition

a) On notera $\mathcal{I}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodiques et localement intégrables sur \mathbb{R} .

b) On dit qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est continue par morceaux sur un intervalle I s'il existe une subdivision $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de I telle que pour tout entier $k \in [1, n]$, la restriction de f à $] \alpha_{k-1}, \alpha_k [$ est continue, f possède une limite à droite finie en α_{k-1} notée $f(\alpha_{k-1}^+)$ et f possède une limite à gauche finie en α_k notée $f(\alpha_k^-)$.

c) On dit qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est dérivable par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I pour une subdivision $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et si de surcroît, pour tout entier $k \in [1, n]$, la restriction de f à $] \alpha_{k-1}, \alpha_k [$ est dérivable et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\frac{f(\alpha_{k-1} + h) - f(\alpha_{k-1}^+)}{h}$ admet une limite finie quand $h \rightarrow 0^+$ notée $f'_d(\alpha_{k-1}^+)$.

(ii) $\frac{f(\alpha_k + h) - f(\alpha_k^-)}{h}$ admet une limite finie quand $h \rightarrow 0^-$ notée $f'_g(\alpha_k^-)$.

d) On dit qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est de classe C^1 par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I pour une subdivision $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et si de surcroît, pour tout entier $k \in [1, n]$, la restriction de f à $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ est de classe C^1 , f' admet une limite finie à droite en α_{k-1} et f' admet une limite finie à gauche en α_k .

Toute fonction de classe C^1 par morceaux sur un intervalle I est dérivable par morceaux sur I ; de plus toute fonction 2π -périodique et dérivable par morceaux sur $[0, 2\pi]$ appartient à $\mathcal{I}_{2\pi}$ et toute fonction 2π -périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ appartient à $\mathcal{I}_{2\pi}$.

2. Séries trigonométriques

2.1 Notations

a) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes : la notation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$ désigne la série complexe $c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n + c_{-n})$. En cas de convergence de la série, on notera

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{-n}).$$

b) Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} : la notation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n$ désigne la série de fonctions $\varphi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\varphi_n + \varphi_{-n})$. En cas de convergence de la série, on notera

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi_n + \varphi_{-n}).$$

Pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur une partie I de \mathbb{R} , il est suffisant (mais non nécessaire) que les deux séries $\sum \varphi_n$ et $\sum \varphi_{-n}$ convergent simplement (resp. uniformément) sur I .

2.2 Définition

On dit qu'une série $\sum f_n$ de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est une série trigonométrique si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

a) f_0 est une application constante que l'on notera $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$ pour un certain $a_0 \in \mathbb{C}$;

b) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe a_n et $b_n \in \mathbb{C}$ tels que f_n s'écrit sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Une série trigonométrique s'écrit donc sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

En convenant que $b_0 = 0$, et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

elle s'écrit aussi sous la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Réciproquement une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

si on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Ainsi une série trigonométrique peut être considérée comme une série de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

2.3 Proposition

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes et notons

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

a) Si les séries à termes positifs $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ sont convergentes, alors la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement (donc uniformément) convergente.

b) Si les séries à termes positifs $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes, alors la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est normalement (donc uniformément) convergente.

c) Les séries à termes positifs $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ sont convergentes si et seulement si les séries à termes positifs $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate des propositions I.1.9 et I.3.2.

□

2.4 Proposition

a) S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(c_n)_{n \geq n_0}$ et $(c_{-n})_{n \geq n_0}$ sont réelles, décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi]$ où $0 < \alpha < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

b) S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ sont réelles, décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme

$[\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi]$ où $0 < \alpha < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate du critère d'Abel I.4.4 et du critère d'Abel uniforme II.4.6.

□

2.5 Proposition

a) L'ensemble E des points de \mathbb{R} en lesquels une série trigonométrique converge est stable par toute translation $x \mapsto x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction somme de cette série définie sur E est 2π -périodique.

b) La fonction somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle de \mathbb{R} sur lequel la série converge uniformément.

Preuve :

Cette proposition résulte du fait que les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont 2π -périodiques et continues sur \mathbb{R} .

□

2.6 Théorème

Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (donc sur \mathbb{R}) et f sa somme, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

et si on écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Preuve :

Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur \mathbb{R} , il en est donc de même de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i(n-p)x} = e^{-ipx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$; or la somme de cette série n'est autre que la fonction $x \mapsto e^{-ipx} f(x)$, on déduit alors du théorème II.5.2 que

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ipx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} e^{-ipx} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx.$$

Or, pour tout entier $n \neq p$, on a

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx = \left[\frac{e^{i(n-p)x}}{i(n-p)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

et

$$\int_0^{2\pi} e^{i(p-p)x} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

On en déduit donc que

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ipx} dx = 2\pi c_p.$$

D'autre part, si on écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$, on obtient les formules énoncées pour a_n et b_n .

□

3. Séries de Fourier

On vient de voir que pour toute série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ convergeant uniformément sur \mathbb{R} , on peut exprimer les coefficients de la série en fonction de la fonction somme f de la série par la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx.$$

Alors, tout comme on s'est posé la question dans le chapitre III de savoir si la série de Taylor à l'origine d'une fonction de classe C^∞ converge vers cette fonction, on peut examiner le problème suivant : si f est une fonction 2π -périodique telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et si on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge-t-elle simplement ou uniformément et si oui, sa somme est-elle égale à f ? On va voir que c'est le cas sous certaines conditions.

3.1 Proposition et définitions

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on peut alors poser

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx.$$

Ces coefficients $c_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier exponentiels de f .

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $x \mapsto f(x) \cos nx$ et $x \mapsto f(x) \sin nx$ sont intégrables sur $[0, 2\pi]$ et on peut alors poser

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Ces coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier trigonométriques de f .

La série trigonométrique

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$$

est appelée série de Fourier de f .

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$, alors f est intégrable sur $[0, 2\pi]$, de plus la fonction $x \mapsto e^{-inx}$ est continue donc intégrable sur $[0, 2\pi]$, par conséquent la fonction produit $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto f(x) \cos nx$ et $x \mapsto f(x) \sin nx$ sont intégrables sur $[0, 2\pi]$.

□

3.2 Proposition

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$. Alors on a :

a) Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ à valeurs réelles, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels; de plus $c_0(f)$ est réel et pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

b) Les applications de $\mathcal{I}_{2\pi}$ dans \mathbb{C}

$$f \mapsto c_n(f) \quad ; \quad f \mapsto a_n(f) \quad ; \quad f \mapsto b_n(f)$$

sont \mathbb{C} -linéaires.

c) Pour calculer les coefficients de Fourier, on peut calculer les intégrales sur tout intervalle du type $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$.

d) Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.

e) Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

Preuve :

a) découle de la définition des coefficients de Fourier.

b) découle des propriétés de linéarité des intégrales de Riemann.

c) découle de la proposition 1.2.

d) d'après c) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

or, si on fait le changement de variable $x \rightarrow -x$ dans l'intégrale, comme f est paire, on obtient

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-x) \sin(-nx) d(-x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -b_n(f) = 0.$$

On démontre e) de la même manière.

□

3.3 Identité de Parseval

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$; alors on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Preuve : admise.

3.4 Corollaire

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique et continue sur \mathbb{R} ; si tous les coefficients de Fourier exponentiels (resp. trigonométriques) de f sont nuls, alors f est la fonction nulle.

Preuve :

En effet, on a alors d'après l'identité de Parseval,

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0$$

mais $|f|^2$ est continue positive sur $[0, 2\pi]$, on en déduit donc que

$$\forall x \in [0, 2\pi], |f(x)|^2 = 0$$

i.e

$$\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = 0.$$

Or f est 2π -périodique, donc f est la fonction nulle.

□

Exemple

Considérons la fonction f 2π -périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = x \text{ et } f(\pi) = 0.$$

alors $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ et est impaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$; de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi b_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx = (-1)^{n-1} \frac{2\pi}{n}.$$

L'identité de Parseval nous donne alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.5 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f intégrable sur un segment $[a, b]$; alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{itx} dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{-itx} dx = 0.$$

On en déduit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos tx dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0.$$

Preuve :

1er cas : on suppose que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$; alors, il existe une subdivision (a_0, a_1, \dots, a_n) de $[a, b]$ et une famille de nombres complexes $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que

$$\forall j \in [0, n-1], \forall x \in]a_j, a_{j+1}[, f(x) = \lambda_j.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \int_a^b f(x) e^{itx} dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \lambda_j e^{itx} dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left[\frac{e^{itx}}{it} \right]_{a_j}^{a_{j+1}} \\ &= \frac{1}{it} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j [e^{ia_{j+1}x} - e^{ia_jx}] \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left| \int_a^b f(x) e^{itx} dx \right| \leq \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda_j| |e^{ia_{j+1}x} - e^{ia_jx}| \leq \frac{2}{t} \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda_j|$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{itx} dx = 0.$$

Cas général : comme f est intégrable sur $[a, b]$, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, d'après le 1er cas,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx = 0$$

donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$ on a

$$\left| \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, pour tout $t > A$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{itx} dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) e^{itx} dx + \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) e^{itx} dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| |e^{itx}| dx + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{itx} dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{itx} dx = 0.$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b f(x) e^{-itx} dx = \overline{\int_a^b \overline{f(x)} e^{itx} dx} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

puisque \overline{f} est intégrable sur $[a, b]$. Or

$$\int_a^b f(x) \cos tx dx = \int_a^b f(x) \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) e^{itx} dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) e^{-itx} dx$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos tx dx = 0.$$

De même

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0.$$

□

3.6 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$; alors les suites des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_{-n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

3.7 Définition et proposition

On appelle noyau de Dirichlet la fonction D_n définie par

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

et

$$D_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction D_n est paire, 2π -périodique et continue sur \mathbb{R} ; de plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Preuve :

Pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$D_n(x + 2\pi) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + (2n + 1)\pi\right]}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)} = \frac{-\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{-2 \sin \frac{x}{2}} = D_n(x)$$

donc D_n est 2π -périodique.

De plus, au voisinage de 0, on a

$$D_n(x) \sim \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \frac{x}{2}} = n + \frac{1}{2}$$

donc D_n est continue en 0 ; on en déduit alors que D_n est continue en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$ par périodicité. Donc D_n est continue sur \mathbb{R} .

D'autre part, on a pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx &= \Re \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \Re \left(\frac{1}{2} + e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{2} + e^{ix} \frac{e^{inx/2} \sin \frac{nx}{2}}{e^{ix/2} \sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} + \cos \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = D_n(x). \end{aligned}$$

et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(2p\pi) = \frac{1}{2} + n = D_n(2p\pi).$$

Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \right]_0^\pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3.8 Formule de Dirichlet

Soit $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ et considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle de la série de Fourier

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] D_n(t) dt.$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x) dt \quad \text{d'après 3.7.} \end{aligned}$$

Par le changement de variable $u = t - x$, on obtient alors

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} f(u+x) D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u+x) D_n(u) du$$

d'après 1.2 puisque les fonctions considérées sont 2π -périodiques. D'où, par la relation de Chasles

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(u+x)D_n(u) du + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} f(u+x)D_n(u) du$$

mais par le changement de variable $u \rightarrow -u$ dans la 2ème intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} f(u+x)D_n(u) du &= - \int_{-\pi}^{-2\pi} f(x-u)D_n(-u) du = \int_{-2\pi}^{-\pi} f(x-u)D_n(u) du \\ &= \int_0^\pi f(x-u)D_n(u) du \end{aligned}$$

car le noyau de Dirichlet est une fonction paire et 2π -périodique. On en déduit

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)]D_n(u) du.$$

□

3.9 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction 2π -périodique, dérivable par morceaux sur $[0, 2\pi]$; alors la série de Fourier de f converge simplement en tout point x_0 de \mathbb{R} vers $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

Donc la série de Fourier de f converge simplement vers f en tout point où f est continue.

Preuve :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$: montrons que

$$S_n(f)(x_0) \text{ converge vers } l(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

D'après la formule de Dirichlet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t)]D_n(t) dt.$$

Or, d'après 3.7, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) - l(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2l(x_0)]D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $]0, \pi]$ par

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - (f(x_0^+) + f(x_0^-))}{2 \sin \frac{t}{2}} \\
&= \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^-)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

La fonction f est dérivable par morceaux sur $[0, 2\pi]$ donc est bornée sur $[0, 2\pi]$ et continue sur $[0, 2\pi]$ sauf en un nombre fini de points : on en déduit que g est continue sur $]0, 2\pi]$ sauf en un nombre fini de points. De plus les fonctions

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + t) - f(x_0^+)}{t} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(x_0 - t) - f(x_0^-)}{t}$$

possèdent une limite finie quand $t \rightarrow 0^+$, et $\frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$: on en déduit alors que g possède une limite finie à droite en 0 et on peut donc prolonger g par continuité en 0^+ . Par conséquent g est bornée sur $[0, \pi]$ et continue sur $[0, \pi]$ sauf en un nombre fini de points donc est intégrable sur $[0, \pi]$.

Alors on a

$$S_n(f)(x_0) - l(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \, dt$$

avec g intégrable sur $[0, \pi]$, donc le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f)(x_0) - l(x_0)) = 0.$$

ce qui achève la démonstration. □

Exemple

Considérons les deux fonctions 2π -périodiques f et g définies par

$$f(x) = 1 \text{ si } 0 \leq x < \pi \text{ et } f(x) = -1 \text{ si } \pi \leq x < 2\pi$$

et

$$g(x) = 1 \text{ si } 0 < x \leq \pi \text{ et } f(x) = -1 \text{ si } \pi < x \leq 2\pi.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-inx} \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} e^{-inx} \, dx$$

donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = c_n(g) = \frac{1 - (-1)^n}{in\pi}.$$

Ainsi f et g ont même série de Fourier

$$\frac{2}{i\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1} - \frac{e^{-i(2n+1)x}}{2n+1} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Comme f et g sont 2π -périodiques et dérivables par morceaux sur $[0, 2\pi]$, le théorème de Dirichlet s'applique :

Cette série converge vers $f(x) = g(x)$ pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et vers 0 pour tout $x \in \pi\mathbb{Z}$, i.e vers la fonction 2π -périodique h définie par

$$h(x) = 1 \text{ si } 0 < x < \pi, \quad h(x) = -1 \text{ si } \pi < x < 2\pi \text{ et } h(0) = h(\pi) = 0.$$

Ainsi les deux fonctions distinctes f et g ont la même série de Fourier dont la somme est une fonction h elle-même distincte de f et g .

Application : en $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3.10 Théorème

Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$; alors la série de Fourier de f converge normalement (et donc uniformément) sur \mathbb{R} et sa somme est f .

Preuve : admise.

V INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Il s'agit dans ce chapitre de généraliser la notion d'intégrale de Riemann à des fonctions non bornées définies sur des intervalles non nécessairement bornés :

Considérons par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0, 1]$: f n'est pas bornée sur $]0, 1]$ donc n'est pas intégrable sur $[0, 1]$, cependant si on considère $\varepsilon \in]0, 1[$, alors f est continue donc intégrable sur $[\varepsilon, 1]$ et on a

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})$$

on constate que $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ possède une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. On note alors

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

D'autre part, la fonction $g(x) = \frac{1}{x^2}$ est définie et continue sur tout segment $[1, A]$ où $A > 1$ et on a

$$\int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

on constate que $\int_1^A \frac{1}{x^2} dx$ possède une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$. On note alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

1. Rappels sur les intégrales de Riemann

1.1 Théorème

- Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
- Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ (avec $a < b$), alors $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- Soit f intégrable sur $[a, b]$ et soit $c \in [a, b]$; alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

est continue sur $[a, b]$. Si de plus f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$.

d) Intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$; alors on a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

e) Changement de variables.

Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ de \mathbb{R} et soit f une fonction continue sur $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$. alors on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

2. Intégrales convergentes

Dans le reste du chapitre, sauf indication contraire, on considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrable sur $[a, b[$ (i.e intégrable sur tout segment contenu dans $[a, b[$) : on lui associe la fonction F définie sur $[a, b[$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définie par

$$\forall x \in [a, b[, F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ a un sens ou est convergente si et seulement si $F(x)$ possède une limite finie quand $x \rightarrow b^-$. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ n'a pas de sens ou est divergente.

2.2 Remarques

a) Soit $c \in [a, b[$ et soit f localement intégrable sur $[a, b[$. Par la formule de Chasles, on a pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt.$$

Les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont donc de même nature, i.e sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

b) Si $b \in \mathbb{R}$ et si f localement intégrable sur $[a, b[$ est la restriction d'une application \hat{f} intégrable sur $[a, b]$, alors l'application F est la restriction à $[a, b[$ de l'application $\hat{F}(x) = \int_a^x \hat{f}(t) dt$ continue sur $[a, b]$ donc l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et égale à $\int_a^b \hat{f}(t) dt$. Cette circonstance se produit dans le cas où f est localement intégrable et bornée sur $[a, b[$.

c) Si on considère $a' \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tels que $b' < a'$, et f une fonction définie sur $]b', a']$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrable sur $]b', a']$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{b'}^{a'} f(t) dt$ a un sens ou est convergente si la fonction $x \mapsto \int_x^{a'} f(t) dt$ possède une limite finie quand $x \rightarrow b'^+$. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_{b'}^{a'} f(t) dt$ n'a pas de sens ou est divergente.

Par le changement de variables $t \rightarrow -t$ on a

$$\int_x^{a'} f(t) dt = \int_{-a'}^{-x} f(-t) dt$$

donc les intégrales généralisées

$$\int_{b'}^{a'} f(t) dt \text{ et } \int_{-a'}^{-b'} f(-t) dt$$

sont de même nature et égales en cas de convergence. On peut donc toujours se ramener au cas $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$: dans la suite du chapitre, on énoncera tous les théorèmes dans ce cas de figure et le lecteur transcrira les énoncés dans le cas $]b', a']$.

d) Soit f une fonction localement intégrable sur $[\alpha, \beta] - \{\gamma\}$ (où α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$) ; si les intégrales généralisées $\int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt$ et $\int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt$ sont convergentes, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ est convergente. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ est divergente.

e) Soit f une fonction localement intégrable sur $]\alpha, \beta[$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\alpha < \beta$: s'il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que les deux intégrales généralisées $\int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt$ et $\int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt$ sont convergentes, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ est convergente. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ est divergente.

Exemple Considérons la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$: elle est continue donc localement intégrable sur \mathbb{R}^* . Pour étudier la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

il faut donc "couper" l'intégrale en quatre termes

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}, \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2}, \int_0^1 \frac{dt}{t^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

et étudier séparément la nature de ces quatre intégrales généralisées. Or une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur tout segment de \mathbb{R}^* est donnée par $t \mapsto -\frac{1}{t}$, d'où

$$\int_x^{-1} \frac{dt}{t^2} = 1 + \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \text{ quand } x \longrightarrow -\infty$$

et

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

donc les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergent, mais

$$\int_{-1}^x \frac{dt}{t^2} = -1 - \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty \text{ quand } x \longrightarrow 0^-$$

donc l'intégrale généralisée $\int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2}$ diverge. On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge.

2.3 Proposition Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrables sur $[a, b[$; si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ converge et on a

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

Si l'une des deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ diverge.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f)(t) dt$ converge, et on a alors

$$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

Preuve : elle repose sur la linéarité des intégrales de Riemann et sur les théorèmes sur les sommes et produits de limites.

□

2.4 Intégration par parties

Adoptons la notation suivante pour une fonction g définie sur $[a, b[$ et possédant une limite finie en b^- :

$$[g(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} g(t) - g(a).$$

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$; si l'intégrale $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ converge et si la fonction uv possède une limite finie en b^- , alors l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ converge et on a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Preuve :

Pour tout $x \in [a, b[$, on a par la formule d'intégration par parties sur le segment $[a, x]$

$$\int_a^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t) dt.$$

Or l'intégrale $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ converge et uv possède une limite finie en b^- , donc $\int_a^x u'(t)v(t) dt$ possède une limite finie en b^- , i.e l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ converge et on a alors l'égalité voulue.

□

Remarque

Il se peut que l'intégrale $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ converge mais que uv ne possède pas de limite finie en b^- (ou vice-versa), auquel cas l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ diverge : il ne faut donc utiliser ce résultat qu'à bon escient. Il est préférable en général d'écrire la formule d'intégration par parties sur un segment puis de passer à la limite.

2.5 Changement de variables

Soit φ une fonction strictement monotone de classe C^1 sur $[\alpha, \beta[$: on pose $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t) dt$ sont de même nature, et si elles convergent, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t) dt.$$

Preuve :

D'après la formule de changement de variables sur un segment, on a pour tout $v \in [\alpha, \beta[$

$$\int_a^{\varphi(v)} f(x) dx = \int_\alpha^v f \circ \varphi(t)\varphi'(t) dt.$$

Posons pour tout $u \in [a, b[$

$$g(u) = \int_a^u f(x) dx$$

et pour tout $v \in [\alpha, \beta[$

$$h(v) = \int_\alpha^v f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

Alors pour tout $v \in [\alpha, \beta[$, on a

$$g \circ \varphi(v) = h(v).$$

Si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge, alors g possède une limite finie l en b^- , par conséquent

h admet l comme limite en β^- , i.e $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ converge et on a l'égalité.

Réciproquement, supposons que l'intégrale $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ converge. Comme φ est strictement monotone et continue sur $[\alpha, \beta[$, φ réalise une bijection de $[\alpha, \beta[$ sur $[a, b[$ et on a alors pour tout $u \in [a, b[$,

$$g(u) = h \circ \varphi^{-1}(u).$$

Or $\lim_{v \rightarrow \beta^-} \varphi(v) = b$, donc $\lim_{u \rightarrow b^-} \varphi^{-1}(u) = \beta$, on en déduit alors que g possède une limite finie

quand $u \rightarrow b^-$, à savoir $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$, donc l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge.

□

Remarque

Un changement de variable dans une intégrale généralisée peut conduire à une intégrale de Riemann, auquel cas l'intégrale généralisée converge.

3. Intégrale généralisée d'une fonction positive

3.1 Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ et localement intégrable sur $[a, b[$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ définie sur $[a, b[$ est croissante et l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus, on a

$$\forall x \in [a, b[, F(x) \leq \int_a^b f(t) dt.$$

Preuve :

La fonction f étant positive sur $[a, b[$, on a pour tous $a \leq u < v < b$

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(t) dt \geq 0.$$

Donc la fonction F est croissante sur $[a, b[$; par conséquent elle admet une limite en b^- et cette limite est finie si et seulement si F est majorée. Donc l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \sup_{[a, b[} F$$

d'où

$$\forall x \in [a, b[, F(x) \leq \int_a^b f(t) dt.$$

□

3.2 Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs réelles et localement intégrables sur $[a, b[$.

a) On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

b) On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que g est de signe constant sur $[c, b[$ et

$$f(t) \sim g(t) \text{ au voisinage de } b^-$$

alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Preuve :

Pour tout $x \in [c, b[$, notons

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \int_c^x g(t) dt.$$

a) Comme pour tout $t \in [c, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$, F et G sont croissantes sur $[c, b[$ et on a

$$\forall x \in [c, b[, F(x) \leq G(x).$$

Donc, si G est majorée, F l'est également et si F n'est pas majorée, G ne l'est pas non plus, d'où le résultat.

b) On peut supposer que g est positive sur $[c, b[$ (sinon on raisonne sur $-f$ et $-g$). Comme

$$f(t) \sim g(t) \text{ au voisinage de } b^-$$

il existe une fonction ε définie sur un voisinage $[\alpha, b[$ de b^- vérifiant

$$\forall t \in [\alpha, b[, f(t) = \varepsilon(t)g(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow b^-} \varepsilon(t) = 1$$

Donc il existe $\beta \in [\alpha, b[$ tel que

$$\forall t \in [\beta, b[, \frac{1}{2} \leq \varepsilon(t) \leq 2$$

d'où

$$\forall t \in [\beta, b[, \frac{1}{2}g(t) \leq \varepsilon(t)g(t) = f(t) \leq 2g(t).$$

Alors, si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge, l'intégrale $\int_\beta^b g(t) dt$ converge donc $\int_\beta^b 2g(t) dt$ converge, d'où $\int_\beta^b f(t) dt$ converge d'après a) et ainsi $\int_a^b f(t) dt$ converge; de même, si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ diverge, l'intégrale $\int_\beta^b g(t) dt$ diverge donc l'intégrale $\int_\beta^b \frac{1}{2}g(t) dt$ diverge, d'où $\int_\beta^b f(t) dt$ diverge et ainsi $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Par conséquent les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

□

3.3 Fonctions de comparaison

a) Soit $a > 0$ et α un réel; l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et α un réel; alors les intégrales $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

c) Soit a et α deux réels; alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Preuve :

a) Une primitive f de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $[a, +\infty[$ est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Or l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si f admet une limite finie en $+\infty$, ce qui s'avère être le cas si et seulement si $\alpha > 1$.

b) De même, une primitive g de $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ est donnée par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(t-a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc g admet une limite finie en a^+ si et seulement si $\alpha < 1$ et ainsi l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

La démonstration est analogue pour l'autre intégrale.

c) Une primitive h de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ sur $[a, +\infty[$ est donnée par

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ t & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc h admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$, et ainsi l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

□

4. Critère de Cauchy

Rappelons le critère de Cauchy pour une fonction d'une variable réelle :

4.1 Théorème

Soit F une fonction définie sur $[a, b[$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) si $b \in \mathbb{R}$: la fonction F admet une limite finie en b^- si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in [a, b[, b - \alpha < x' < x < b \implies |F(x') - F(x)| < \varepsilon.$$

b) si $b = +\infty$: la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, x' \in [a, +\infty[, x > x' > A \implies |F(x') - F(x)| < \varepsilon.$$

Preuve : cf. cours de 1ère année.

□

4.2 Critère de Cauchy pour une intégrale généralisée

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrable sur $[a, b[$.

a) si $b \in \mathbb{R}$: l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in [a, b[, b - \alpha < x' < x < b \implies \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

b) si $b = +\infty$: l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, x' \in [a, +\infty[, x > x' > A \implies \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy 4.1 à la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

en effet, on a

$$F(x') - F(x) = \int_{x'}^x f(t) dt.$$

□

5. Intégrales absolument convergentes

5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, ou est absolument convergente, si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

5.2 Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrable sur $[a, b[$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge. De plus on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Preuve :

Faisons la démonstration dans le cas $b \in \mathbb{R}$ (celle dans le cas $b = +\infty$ est analogue) ; on va utiliser le critère de Cauchy pour une intégrale généralisée :

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in [a, b[, b - \alpha < x' < x < b \implies \left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

Or

$$x' < x \implies \int_{x'}^x |f(t)| dt \geq 0 \implies \left| \int_{x'}^x |f(t)| dt \right| = \int_{x'}^x |f(t)| dt$$

donc

$$b - \alpha < x' < x < b \implies \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x'}^x |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy nous permet alors de conclure que $\int_a^b f(t) dt$ converge.

De plus on a pour tout $x \in [a, b[$

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$$

donc, quand $x \rightarrow b^-$, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f_a définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f_a(t) = \frac{\sin at}{t^2}.$$

On a pour tout $t \geq 1$

$$|f_a(t)| = \frac{|\sin at|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après 3.3, on déduit de 3.2 que $\int_1^{+\infty} f_a(t) dt$ converge absolument, donc converge.

5.3 Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R} et localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

a) S'il existe un réel α et un réel non nul k tel que $f(t) \sim \frac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, alors f est de signe constant pour t assez grand, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

b) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument.

c) S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \pm\infty$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Preuve :

a) Comme $f(t) \sim \frac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, f est du signe de k pour t assez grand. On applique alors 3.2 et 3.3 pour obtenir le résultat.

b) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors

$$\exists A > 0, \forall t \in [a, +\infty[, t > A \implies |f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

on déduit alors de 3.2 et 3.3 que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument.

c) S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors

$$\exists A > 0, \forall t \in [a, +\infty[, t > A \implies f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha} > 0$$

on déduit alors de 3.2 et 3.3 que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = -\infty$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha (-f(t)) = +\infty$ donc

$\int_a^{+\infty} (-f(t)) dt$ diverge. Il en est donc de même de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

□

Remarques

a) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ avec $\alpha \leq 1$ on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \frac{1}{2}$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \frac{1}{t} = 0$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, alors que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = 0$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

b) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ avec $\alpha > 1$, on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \frac{7}{4}$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \frac{1}{t} = +\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, alors que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = +\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

5.4 Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction définie sur $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} et localement intégrable sur $[a, b[$.

a) S'il existe un réel α et un réel non nul k tel que $f(t) \sim \frac{k}{(b-t)^\alpha}$ au voisinage de b^- , alors f est de signe constant au voisinage de b^- , l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

b) S'il existe un réel $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée

$\int_a^b f(t) dt$ converge absolument.

c) S'il existe un réel $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow b^-} (b-t)^\alpha f(t) = \pm\infty$, alors l'intégrale généralisée

$\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Preuve : analogue à celle de 5.3.

□

6. Intégrales semi-convergentes

6.1 Définition

On dit qu'une intégrale généralisée est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Considérons la fonction g_a définie sur $[1, +\infty[$ par

$$g_a(t) = \frac{\cos at}{t}.$$

Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{t} & du &= -\frac{dt}{t^2} \\ dv &= \cos at \, dt & v &= \frac{\sin at}{a} \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \geq 1$ on obtient

$$\int_1^x g_a(t) \, dt = \left[\frac{\sin at}{at} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2}$$

i.e

$$\int_1^x g_a(t) \, dt = \frac{\sin ax}{ax} - \frac{\sin a}{a} + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin at}{at^2} \, dt$ converge d'après l'exemple traité au §5. D'autre part, on a

$$\forall x \geq 1, \left| \frac{\sin ax}{ax} \right| \leq \frac{1}{|a|x}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin ax}{ax} = 0$$

donc $\int_1^x g_a(t) \, dt$ possède une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, i.e l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_a(t) \, dt$ converge.

Montrons que cette intégrale généralisée ne converge pas absolument :

on a pour tout réel $t \geq 1$, $|\cos at| \leq 1$ d'où

$$|\cos at| \geq \cos^2 at = \frac{1 + \cos 2at}{2}$$

et ainsi

$$|g_a(t)| \geq \frac{1 + \cos 2at}{2t}$$

donc

$$\forall x \geq 1, \int_1^x |g_a(t)| \, dt \geq \int_1^x \frac{dt}{2t} + \int_1^x g_{2a}(t) \, dt.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_{2a}(t) dt$ converge d'après le calcul précédent et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge vers $+\infty$ d'après 3.3, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x |g_a(t)| dt = +\infty$$

et ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} |g_a(t)| dt$ diverge.

6.2 Critère d'Abel

Soit f une fonction de classe C^1 décroissante sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists M > 0, \forall x, x' \in [a, +\infty[, \left| \int_x^{x'} g(t) dt \right| \leq M.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge et, pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a

$$\left| \int_x^{+\infty} f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x).$$

Preuve :

Pour x fixé dans $[a, +\infty[$, posons $G(x') = \int_x^{x'} g(t) dt$. La fonction G est donc une primitive de g sur $[a, +\infty[$ qui s'annule en x .

Par une intégration par parties, on obtient alors

$$\forall x, x' \in [a, +\infty[, \int_x^{x'} f(t)g(t) dt = f(x')G(x') + \int_x^{x'} (-f')(t)G(t) dt.$$

Donc pour tous $x' > x \geq a$, on a

$$\left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| \leq |f(x')G(x')| + \left| \int_x^{x'} (-f')(t)G(t) dt \right| \leq |f(x')G(x')| + \int_x^{x'} |(-f')(t)G(t)| dt.$$

Or f est décroissante sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc f est positive sur $[a, +\infty[$ ainsi que $-f'$, de plus $|G|$ est majorée par M d'où

$$\left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x') + \int_x^{x'} (-f')(t)M dt = Mf(x') + M[-f(t)]_x^{x'} = Mf(x) \quad (*).$$

Traduisons maintenant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A \implies 0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

On en déduit alors

$$x' > x > A \implies \left| \int_x^{x'} f(t)g(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy nous permet alors d'affirmer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge. De plus, en faisant tendre x' vers $+\infty$ dans l'inégalité (*), on obtient

$$\left| \int_x^{+\infty} f(t)g(t) dt \right| \leq Mf(x).$$

□

7. Comparaison série-intégrale

On a pu constater dans les paragraphes précédents les nombreuses analogies entre les théorèmes sur les séries et ceux sur les intégrales généralisées de la forme $\int_a^{+\infty} f(t) dt$: on va donner quelques résultats précisant ce lien entre séries et intégrales généralisées.

On va d'abord énoncer à nouveau la proposition I.3.4 avec le langage des intégrales généralisées maintenant à notre disposition :

7.1 Proposition

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur un intervalle $[N, +\infty[$ ($N \in \mathbb{N}$) ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) la série $\sum_{n \geq N} f(n)$ converge ;
- b) la série $\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge ;
- c) l'intégrale généralisée $\int_N^{+\infty} f(t) dt$ converge.

7.2 Proposition

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrable sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge.

Preuve :

Posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$, autrement dit si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt.$$

Par conséquent la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge.

□

7.3 Proposition

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ croissante et de limite $+\infty$ telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge et la suite $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$ converge vers 0. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Preuve :

Pour tout $u \geq x_0$, considérons le sous-ensemble de \mathbb{N} suivant

$$E_u = \{m \in \mathbb{N} / x_m \leq u\}.$$

Cet ensemble est majoré, en effet comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies x_n > |u| \geq 0$$

donc, quelque soit le signe de u , on a

$$E_u \subset [0, N].$$

On peut donc associer à tout réel $u \geq x_0$, l'entier $p(u)$ défini par $p(u) = \max E_u$: par définition même de $p(u)$, on constate alors que la fonction p est croissante sur $[x_0, +\infty[$ (puisque $u \leq v \implies E_u \subset E_v$) et que

$$\forall u \geq x_0, x_{p(u)} \leq u < x_{p(u)+1} \quad (*).$$

Montrons que $\lim_{u \rightarrow +\infty} p(u) = +\infty$:

si $\lim_{u \rightarrow +\infty} p(u) \neq +\infty$, celà signifie que la fonction p est majorée sur $[x_0, +\infty[$

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall u \geq x_0, p(u) \leq M$$

d'où

$$\forall u \geq x_0, p(u) + 1 \leq M + 1$$

mais la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc

$$\forall u \geq x_0, x_{p(u)+1} \leq x_{M+1}$$

et ainsi la suite $(x_{p(u)+1})$ est majorée. Or, on a d'après (*)

$$\forall u \geq x_0, x_{p(u)+1} > u$$

d'où

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} x_{p(u)+1} = +\infty$$

ce qui est absurde. Donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} p(u) = +\infty$.

D'autre part, on a pour tout $u \geq x_0$,

$$\int_a^u f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \sum_{k=0}^{p(u)-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt + \int_{x_{p(u)}}^u f(t) dt \quad (**).$$

Or

$$\left| \int_{x_{p(u)}}^u f(t) dt \right| \leq \int_{x_{p(u)}}^u |f(t)| dt \leq \int_{x_{p(u)}}^{x_{p(u)+1}} |f(t)| dt = v_{p(u)}$$

mais la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et $\lim_{u \rightarrow +\infty} p(u) = +\infty$ donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} v_{p(u)} = 0$: on en déduit que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{x_{p(u)}}^u f(t) dt = 0$$

de plus la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge, donc $\sum_{k=0}^{p(u)-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$ possède une limite finie quand $u \rightarrow +\infty$. On déduit alors de (***) que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

□

Exemple

Considérons l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 0$, donc f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

Posons $x_n = n\pi$ et $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et de limite $+\infty$.

Or avec le changement de variable $u = t - n\pi$, on obtient

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u + n\pi}} du.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n| = \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u + n\pi}} du$$

on constate alors facilement que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante; en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \int_0^\pi \sin u du = 2 \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, et par conséquent la série alternée $\sum u_n$ converge.

D'autre part, considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt.$$

avec le changement de variable $u = t - n\pi$, on obtient

$$v_n = \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u + n\pi}} du = |u_n|$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On déduit alors de 7.3 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

7.4 Corollaire

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives et localement intégrable sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$, croissante et de limite $+\infty$, telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge.

Preuve :

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors d'après 7.2, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge.

Réciproquement, s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, +\infty[$ croissante et de limite $+\infty$ telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge, alors avec les notations de 7.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ puisque f est à valeurs positives et ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 puisque la série $\sum v_n$ converge : il suffit alors d'appliquer 7.3 pour conclure que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

□

8. Suites d'intégrales généralisées

8.1 Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrables sur $[a, b[$, qui converge uniformément localement sur $[a, b[$ vers une fonction f .

On suppose qu'il existe une fonction g définie sur $[a, b[$ à valeurs positives, localement intégrable sur $[a, b[$ vérifiant

- a) l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge ;
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b[, |f_n(t)| \leq g(t)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_a^b f_n(t) dt$ converge absolument, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Preuve :

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b[, |f_n(t)| \leq g(t) \quad (*)$$

on en déduit aussitôt que $\int_a^b f_n(t) dt$ converge absolument. D'autre part, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\forall t \in [a, b[, |f(t)| \leq g(t)$$

d'où également la convergence absolue de $\int_a^b f(t) dt$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt$$

et montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$:

la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ s'écrit

$$\lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u g(t) dt = \sup_{u \in [a, b[} \int_a^u g(t) dt = \int_a^b g(t) dt \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, b - \alpha < u < b \implies 0 \leq \int_a^b g(t) dt - \int_a^u g(t) dt = \int_u^b g(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons $u \in]b - \alpha, b[$: par hypothèse la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, u]$, i.e

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall t \in [a, u], |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3(u-a)} \quad (**).$$

On a alors

$$\Delta_n = \left(\int_a^u f_n(t) dt - \int_a^u f(t) dt \right) + \int_u^b f_n(t) dt - \int_u^b f(t) dt$$

d'où

$$|\Delta_n| \leq \left| \int_a^u f_n(t) dt - \int_a^u f(t) dt \right| + \left| \int_u^b f_n(t) dt \right| + \left| \int_u^b f(t) dt \right|$$

mais

$$\left| \int_u^b f_n(t) dt \right| \leq \int_u^b |f_n(t)| dt \leq \int_u^b g(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

et de même

$$\left| \int_u^b f(t) dt \right| \leq \int_u^b g(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, d'après (***) on a

$$\left| \int_a^u f_n(t) dt - \int_a^u f(t) dt \right| \leq \int_a^u |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^u \frac{\varepsilon}{3(u-a)} dt = \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$n \geq N \implies |\Delta_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$.

□

8.2 Corollaire

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et localement intégrables sur $[a, b[$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément localement sur $[a, b[$.

On suppose qu'il existe une fonction g définie sur $[a, b[$ à valeurs positives, localement intégrable sur $[a, b[$ vérifiant

a) l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge ;

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b[, \left| \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq g(t)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_a^b f_n(t) dt$ converge absolument, l'intégrale $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt$ converge absolument, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt.$$

VI INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Il s'agit d'étudier des fonctions du type $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$: en particulier, on se pose la question de savoir à quelles conditions sur f on a la continuité et la dérivabilité de F . On distinguera les cas des intégrales de Riemann "classiques" sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} et des intégrales généralisées.

1. Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre

On considère dans ce paragraphe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1.1 Théorème

Soit I un intervalle de \mathbb{R} ; on considère une fonction f définie sur $[a, b] \times I$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si f est continue sur $[a, b] \times I$, alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est continue sur I .

Preuve :

Soit $x_0 \in I$ et soit V un intervalle fermé borné inclus dans I et contenant x_0 : alors $[a, b] \times V$ est un compact de \mathbb{R}^2 et f étant continue sur $[a, b] \times V$, f est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous (t_1, x_1) et $(t_2, x_2) \in [a, b] \times V$

$$\|(t_1, x_1) - (t_2, x_2)\| < \alpha \implies |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

en particulier, pour tout $t \in [a, b]$ et quitte à restreindre α pour que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V$ on a

$$|h| < \alpha \implies |f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

d'où, pour tout $h \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t, x_0+h) - f(t, x_0)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

et ainsi F est continue en x_0 .

□

Exemple

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } f(0, x) = 1.$$

alors f est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ donc la fonction $F(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ est continue sur \mathbb{R} .

1.2 Théorème

Soit I un intervalle de \mathbb{R} ; on considère une fonction f définie sur $[a, b] \times I$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a, b] \times I$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est de classe C^1 sur I et on a

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Preuve :

Soit $x_0 \in I$ et soit V un intervalle fermé borné inclus dans I et contenant x_0 : posons pour tout $h \in \mathbb{R}^*$

$$\Delta(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt.$$

Alors

$$\Delta(h) = \int_a^b \left(\frac{f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right) dt.$$

Or, quitte à séparer partie réelle et partie imaginaire de f , on peut supposer que f est à valeurs réelles et alors le théorème des accroissements finis s'applique : pour tout $t \in [a, b]$ il existe $\theta_t \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \theta_t h)$$

d'où

$$|\Delta(h)| \leq \int_a^b \left| \frac{f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right| dt = \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \theta_t h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right| dt.$$

Or $[a, b] \times V$ est un compact de \mathbb{R}^2 et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times I$ donc y est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous (t_1, x_1) et $(t_2, x_2) \in [a, b] \times V$

$$\|(t_1, x_1) - (t_2, x_2)\| < \alpha \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_2, x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

en particulier, pour tout $t \in [a, b]$ et quitte à restreindre α pour que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V$ on a

$$|h| < \alpha \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

d'où

$$|h| < \alpha \implies |\Delta(h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = 0$$

i.e F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt$. Enfin, F' est continue sur I d'après

1.1 puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times I$.

□

Exemples

a) Considérons à nouveau la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } f(0, x) = 1.$$

Alors la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur \mathbb{R}^2 et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-xt} \sin t$$

donc la fonction $F(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = - \int_0^1 e^{-xt} \sin t dt.$$

b) Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt$.

Considérons $f(t, x) = \frac{1}{t^2 + x^2}$: f est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et, pour tout $a > 0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[0, 1] \times [a, +\infty[$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(t^2 + x^2)^2}.$$

Alors la fonction $F(x) = \int_0^1 f(t, x) dt$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = -2x \int_0^1 \frac{1}{(t^2 + x^2)^2} dt.$$

Or un calcul simple de primitive nous donne

$$\forall x \in [a, +\infty[, F(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$$

d'où

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = -\frac{1}{x^2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x^2 + 1)}.$$

on en déduit alors que

$$\forall x \in [a, +\infty[, \int_0^1 \frac{1}{(t^2 + x^2)^2} dt = \frac{1}{2x^3} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2(x^2 + 1)}$$

d'où, pour $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

2. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

On considère dans ce paragraphe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

2.1 Théorème

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue sur $[a, b[\times I$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On suppose qu'il existe une fonction g localement intégrable sur $[a, b[$ et à valeurs dans \mathbb{R}^+ (appelée fonction majorante) vérifiant :

- a) l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge ;
- b) $\forall (t, x) \in [a, b[\times I, |f(t, x)| \leq g(t)$.

Alors pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t, x) dt$ converge absolument et la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ ainsi définie est continue sur I .

Preuve :

La convergence absolue de l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dt$ pour tout $x \in I$ découle immédiatement de la condition b).

Rappelons qu'une fonction h d'une variable réelle définie sur $[a, b[$ possède une limite finie l en b^- si et seulement si pour toute suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers b^- , la suite $(h(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l .

En particulier, si on pose $u_0 = a$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = n$ dans le cas $b = +\infty$, et $u_n = b - \frac{1}{n}$ dans le cas $b \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in I$

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{u_n} f(t, x) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} f(t, x) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{u_{n-1}}^{u_n} f(t, x) dt.$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$

$$f_n(x) = \int_{u_{n-1}}^{u_n} f(t, x) dt$$

et considérons la série de fonctions $\sum f_n$. D'après 1.1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I puisque f est continue sur $[u_{n-1}, u_n] \times I$; d'autre part, si on note $\lambda_n = \int_{u_{n-1}}^{u_n} g(t) dt$, on déduit de la condition b) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \lambda_n.$$

Or la série numérique $\sum \lambda_n$ converge puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = \int_a^b g(t) dt$$

par conséquent la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I : on déduit alors du théorème II.5.1 que la somme de la série $\sum f_n$, à savoir F , est continue sur I .

□

Exemple

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } f(0, x) = 1$$

et soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

On va montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$ en utilisant le théorème 2.1 : considérons $a > 0$, alors f est continue sur $[0, +\infty[\times [a, +\infty[$, de plus, comme pour tout $t \geq 0$, on a $|\sin t| \leq t$ (étudier la fonction $t \mapsto |\sin t| - t$ sur \mathbb{R}^+), on a la majoration suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [a, +\infty[, |f(t, x)| \leq e^{-at}$$

or l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} e^{-at} dt$ converge puisque $a > 0$ donc F est définie et continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. On en déduit que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2.2 Théorème

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue sur $[a, b[\times I$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On suppose que

- a) pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t, x) dt$ converge ;
- b) la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a, b[\times I$;
- c) il existe une fonction g localement intégrable sur $[a, b[$ et à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, et vérifiant

$$\forall (t, x) \in [a, b[\times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(t)$$

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est de classe C^1 sur I et on a

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Preuve :

On procède comme dans la preuve du théorème 2.1 : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$

$$f_n(x) = \int_{u_{n-1}}^{u_n} f(t, x) dt$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante dont le premier terme est a et qui a pour limite b^- , et alors $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. D'après le théorème 1.2, pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est de classe C^1 sur I et on a

$$\forall x \in I, f'_n(x) = \int_{u_{n-1}}^{u_n} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

De plus, si on note $\lambda_n = \int_{u_{n-1}}^{u_n} g(t) dt$, on a d'après la condition c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f'_n(x)| \leq \lambda_n.$$

Or la série numérique $\sum \lambda_n$ converge puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = \int_a^b g(t) dt$$

on en déduit alors que la série $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur I ; par conséquent on peut appliquer le théorème II.5.3 : F est de classe C^1 sur I et on peut dériver terme à terme la série

$$\forall x \in I, F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u_{n-1}}^{u_n} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

□

Exemple

Considérons à nouveau la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } f(0, x) = 1$$

et soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

On a vu précédemment que F est définie sur $]0, +\infty[$; considérons $a > 0$, alors la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[0, +\infty[\times [a, +\infty[$:

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times [a, +\infty[, \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -e^{-xt} \sin t$$

et on a alors

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times [a, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq e^{-at}$$

or l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} e^{-at} dt$ converge puisque $a > 0$ donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, on en déduit aussitôt que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{x-i} \right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Il existe donc un réel c tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = c - \operatorname{Arctg}x$$

or on a de manière évidente la majoration

$$\forall x \in]0, +\infty[, |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

on en déduit alors que $c = \frac{\pi}{2}$ et ainsi

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}x = \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}.$$