Unité L1MT03

Structures mathématiques

corrigé de l'examen partiel du 23 mars 2005

1. Il est facile de voir que pour tous x,y entiers naturels, $x \star y$ est un entier naturel. $\star$ est donc une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$. Il est facile de voir que $\star$ est commutative: $x \star y = xy + x + y = yx + y + x = y \star x$. Ce point sera utilisé par la suite. Pour x, y, z entiers naturels, posons $F(x, y, z) = (x \star y) \star z$. On a

$$F(x,y,z) = (xy+x+y)\star z = (xy+x+y)z+(xy+x+y)+z = xyz+xz+yz+xy+x+y+z.$$

Par symétrie, il est ainsi facile de voir que $F(x, y, z) = F(z, y, x)$. Ainsi

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= F(x,y,z) \\ &= F(z,y,x) \\ &= (z \star y) \star x \\ &= x \star (z \star y) \\ &= x \star (y \star z) \end{aligned}$$

On remarquera que les deux dernières égalités utilisent le fait que $\star$ est commutative. Ainsi $\star$ est une loi de composition interne associative. 0 est élément neutre pour $\star$ car pour tout x entier, on a $0 \star x = x \star 0 = x.0+x+0 = x$. Ainsi $(\mathbb{N}, \star)$ est un couple formé d'un ensemble et d'une loi de composition interne associative sur cet ensemble admettant un élément neutre: c'est donc un monoïde.

2. Un nombre qui s'écrit 173 en base b vaut $b^2 + 7b + 3$. Soit b une base telle que ce nombre vaille 371. On a nécessairement $371 = b^2 + 7b + 3$, ou de manière équivalente.

$$b^2 + 7b - 368 = 0.$$

Les racines ne ce polynôme du second degré sont $b_1 = 16$ et $b_2 = -19$. Seule la racine b_1 peut convenir, donc on a nécessairement $b = 16$. Réciproquement 173 est bien une écriture licite en base 16 car $7 < 16$ et bien sûr $16^2 + 16.7 + 3 = 371$.

3. $10^6 = (2 \times 5)^6 = 2^6 \times 5^6 = 2^6 \times (5^3)^2$. On a $2^2 = 4 < 5$ et $5^3 = 125 < 128 = 2^7$, donc

$$\begin{aligned} 2^6 \times 4^6 < 10^6 &< 2^6 \times (2^7)^2 \\ 2^6 \times (2^2)^6 < 10^6 &< 2^6 \times 2^{14} \\ 2^{18} < 10^6 &< 2^{20} \\ 2^{16} < 10^6 &< 2^{20} \\ 2^{4\times 4} < 10^6 &< 2^{4\times 5} \\ 16^4 < 10^6 &< 16^5 \end{aligned}$$

On en déduit que l'écriture de 10^6 en base 16 a 5 chiffres.

4. On a $2\phi - 1 = \sqrt{5}$, donc $(2\phi - 1)^2 = 5$, soit $4\phi^2 - 4\phi + 1 = 5$, soit $4\phi^2 = 4\phi + 4$, ou encore $\phi^2 = \phi + 1$. Comme $\mathbb{Z}[\phi] \subset \mathbb{R}$ est que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau, il suffit de montrer que

   - Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\phi]$, on a $-x \in \mathbb{Z}[\phi]$.
   - Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}[\phi]^2$, on a $x + y \in \mathbb{Z}[\phi]$.
   - Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}[\phi]^2$, on a $xy \in \mathbb{Z}[\phi]$.
   - $1 \in \mathbb{Z}[\phi]$.

   Soient x, y dans $\mathbb{Z}[\phi]$. Il existe des entiers a, b, c, d tels que $x = a + b\phi, y = c + d\phi$.

   - On a $-x = (-a) + (-b)\phi$, ce qui prouve le premier point, car $-a$ et $-b$ sont dans $\mathbb{Z}$.
   - On a $x + y = (a + c) + (b + d)\phi$, ce qui prouve le deuxième point, car $a + c$ et $b + d$ sont dans $\mathbb{Z}$.
   - On a $xy = ac + bd\phi^2 + (ad + bc)\phi = ac + bd(1 + \phi) + (ad + bc)\phi = (ac+bd)+(ad+bc+bd)\phi$,ce qui prouve le troisième point, car $ac+bd$ et $ad + bc + bd$ sont dans $\mathbb{Z}$.
   - On a $1 = 1 + 0.\phi$, ce qui prouve le dernier point.

5. (a) Soient x et y deux points tels que $\phi(x) = \phi(y)$. Comme ϕ est une isométrie, on a
   $$0 = d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y),$$
   donc $x = y$. Cela montre que ϕ est injective.

   (b) On doit d'abord montrer que la composition est une loi interne sur I. Soient ϕ, ψ deux isométries. On doit montrer que $\phi \circ \psi$ est une isométrie. Soient x, y deux points du plan
   $$d((\phi \circ \psi)(x), (\phi \circ \psi)(y)) = d((\phi(\psi)(x)), (\phi(\psi)(y))) = d(\psi(x), \psi(y)),$$
   car ϕ est une isométrie. Comme ψ est aussi une isométrie, on a $d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y)$. On a donc bien finalement $d((\phi \circ \psi)(x), (\phi \circ$

$\psi)(y)) = d(x,y)$, quels que soient les points x et y, ce qui montre bien que $\phi \circ \psi$ est une isométrie. Ainsi $\circ$ est une loi de composition interne sur I. L'associativité découle de la définition de la composée d'applications. Comme l'application identité est élément neutre pour la composition et est évidemment une isométrie, $(I, \circ)$ est bien un monoïde.

(c) Comme $I_X \subset I$ et que $(I, \circ)$ est un monoïde, il suffit de montrer que I_X est stable par composition et contient l'identité. Soient ϕ, ψ deux éléments de I_X. On doit montrer que $\phi \circ \psi$ est dans I_X. Soit $x \in X$ quelconque: $(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x))$. Comme $x \in X$ et $\psi \in I_x$, $\psi(x) \in X$. Mais alors comme $\psi(x) \in X$ et $\phi \in I_x$, $\phi(\psi(x)) \in X$, soit $(\phi \circ \psi)(x) \in X$. Ainsi X est stable par $\phi \circ \psi$, donc $\phi \circ \psi \in I_X$. Le fait que X soit stable par l'identité est évident.

(d) Soit $\phi \in I_X$. ϕ est injective, donc ϕ est une bijection de X dans $\phi(X)$. Soit ϕ^{-1} l'inverse de ϕ dans I. On a $|\phi^{-1}(\phi X)| \leq |\phi(X)|$ car l'image d'un ensemble fini par une application a toujours moins de points que l'ensemble de départ. Mais $|\phi^{-1}(\phi X)| = |(\phi^{-1} \circ \phi)(X)| = |\mathrm{Id}(X)| = |X|$. Mais $\phi(X) \subset X$, car $\phi \in I_X$, donc finalement $\phi(X) = X$. Cette dernière égalité implique, en composant par ϕ^{-1}, que $X = \phi^{-1}(X)$, ca qui montre que $\phi^{-1} \in I_X$.

I_X est une partie de I stable par composition, car c'est un monoide, et stable par l'inversion comme on vient de le voir, donc $(I_X, \circ)$ est un sous-groupe de $(I, \circ)$

FIN