



Unité L1MT03

**Structures mathématiques**

Examen partiel du 23 mars 2005

durée: 2h

*Les documents et les calculatrices sont interdits.*

1. Pour  $x, y$  entiers naturels, on pose  $x \star y = xy + x + y$ . Montrer que  $(\mathbb{N}, \star)$  est un monoïde.
2. En quelle(s) base(s) le nombre qui s'écrit 371 en base dix s'écrit-il 173 ?
3. Quelle est le nombre de chiffres de l'écriture de  $10^6$  (un million) en base 16 ? (On pourra remarquer que  $2^2 = 4 < 5$  et  $5^3 = 125 < 128 = 2^7$ )
4. Soit  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Montrer  $\phi^2 = 1 + \phi$ . On note

$$\mathbb{Z}[\phi] = \{a + \phi b; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que  $(\mathbb{Z}[\phi], +, \times)$  est un anneau unitaire (on admettra que  $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un anneau).

5. On appelle isométrie du plan  $\mathcal{P}$  toute application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \quad d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y),$$

où  $d(x, y)$  représente la distance usuelle entre  $x$  et  $y$ .

- (a) Montrer que toute isométrie est injective.
- (b) On note  $I$  l'ensemble des isométries du plan. Montrer que  $(I, \circ)$  est un monoïde. Dans la suite de l'exercice on admettra que  $(I, \circ)$  est un groupe.
- (c) Soit  $X \subset \mathcal{P}$  un ensemble fini. On note

$$I_X = \{\phi \in I; \phi(X) \subset X\}.$$

Montrer que  $(I_X, \circ)$  est un monoïde.

- (d) Montrer que  $(I_X, \circ)$  est un sous-groupe de  $(I, \circ)$ .

**FIN**