

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 22 janvier 2008

durée 3h

*Les documents papier (livres, photocopiés, notes manuscrites, ...) sont autorisés.  
 Les calculatrices respectant la réglementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.  
 Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.*

– I –

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Sur cet espace, on considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , puis, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .  
 On définit alors  $S_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ . Soient  $c$  et  $d$  des entiers naturels non nuls. Le but de ce problème est d'obtenir la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte  $T$  de la double barrière  $\{-d; c\}$  par la marche : ainsi, on pose

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n \geq c \text{ ou } S_n \leq -d\}.$$

1. Pour  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , montrer que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$Y_n = (\cos \alpha)^{-n} \cos \left( \alpha \left( S_n - \frac{c-d}{2} \right) \right)$$

est une martingale adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

2. On suppose maintenant que  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{c+d}[$ . Montrer que  $(Y_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  est une martingale adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  et qu'elle prend presque sûrement ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que

$$\forall n \geq 0 \quad \forall \alpha \in ]0, \frac{\pi}{c+d}[ \quad \mathbb{E}[(\cos \alpha)^{-(n \wedge T)}] \leq \frac{\cos(\alpha \frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha \frac{c+d}{2})}.$$

4. En déduire que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ .
5. Montrer que pour  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{c+d}[$ ,  $(\cos \alpha)^{-T}$  est intégrable.
6. Montrer que la suite  $\cos(\alpha(S_{n \wedge T} - \frac{c-d}{2}))$  converge presque sûrement et déterminer sa limite.

- 
7. Pour  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{c+d}[$ , calculer  $\mathbb{E}[(\cos \alpha)^{-T}]$ .
  8. On suppose que  $c + d \geq 3$ . Montrer que  $\mathbb{P}(T = 2n + c) \geq (\frac{1}{2})^{2n+c}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  9. On suppose que  $c+d \geq 3$ . Montrer que pour  $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\mathbb{E}[(\cos \alpha)^{-T}] = +\infty$ .

– II –

Soit  $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ . On note  $(X_i)_{i \geq 0}$  les projections canoniques : pour  $\omega \in \Omega$ , on a  $X_i(\omega) = \omega_i$ . On peut alors définir une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en posant  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

Pour  $x \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{P}^x$  la loi sous laquelle  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov de matrice de passage  $P = (p_{i,j})_{i,j \geq 0}$  vérifiant

$$\begin{cases} p_{k,k+1} = \frac{k+2}{2k+2} \text{ si } k \geq 1 \\ p_{k,k-1} = \frac{k}{2k+2} \text{ si } k \geq 1 \\ p_{0,0} = 1 \\ p_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

et commençant au point  $x$  (c'est à dire que  $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ ). Pour  $a \geq 0$ , on pose  $\tau_a = \inf\{k \geq 0; X_k = a\}$ .

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}^x[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \Psi_f(X_n),$$

où

$$\Psi_f(i) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{i,j} f(j).$$

Indication : on pourra remarquer et démontrer que

$$f(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}} f(j).$$

2. On pose  $Y_n = \frac{1}{1+X_n}$ . Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est une martingale bornée.
3. Soient  $a, b, x$  des entiers avec  $0 \leq a < x < b$ . On pose  $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ . Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .  
Dans la suite, on admettra que  $\mathbb{P}^x(\tau < +\infty) = 1$ .
4. On pose  $Z_n = Y_{n \wedge \tau}$ . Montrer que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, puis, à l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\mathbb{P}^x(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}^x(Y_\tau = \frac{1}{1+a}) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}}.$$

5. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty$   $\mathbb{P}^x$  presque sûrement.
6. En déduire que  $\mathbb{P}^x(\tau_a < +\infty) = \frac{a+1}{x+1}$ .
7. On pose

$$I = \inf\{X_n; n \geq 0\}.$$

Montrer que sous  $\mathbb{P}^x$ ,  $I$  suit la loi uniforme sur  $\{0, \dots, x\}$ .

**FIN**