



Mesure et Probabilités

corrigé du devoir en temps libre n° 2

Problème

1. Les variables aléatoires  $(X_i^*)_{i \geq 1}$  sont deux à deux indépendantes, car elles sont fabriquées à partir des variables aléatoires  $(X_i)_{i \geq 1}$  qui sont elles mêmes deux à deux indépendantes. On a donc

$$\begin{aligned}
 \text{Var } S_n^* &= \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i^* \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (X_i^*)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i^2 \mathbb{1}_{X_i \leq i} \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_1^2 \mathbb{1}_{X_1 \leq n} \\
 &= n \mathbb{E} X_1^2 \mathbb{1}_{X_1 \leq n}
 \end{aligned}$$

2. On a pour tout  $n$   $|u_n - \beta^n| \leq 1$ . Comme  $\beta^n$  tend vers l'infini, on a  $u_n - \beta^n = o(\beta^n)$ , soit  $u_n \sim \beta^n$ .  $\frac{1}{u_n} \sim \beta^{-n}$  et que la série à termes positifs  $\beta^{-n}$  est convergente, on a l'équivalence des restes :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \sim \sum_{n=N}^{+\infty} \beta^{-n} = (1 - \beta^{-1})^{-1} \beta^{-N} \sim (1 - \beta^{-1})^{-1} \frac{1}{u_N}.$$

3. La suite  $u_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$  converge lorsque  $N$  tend vers l'infini, elle est donc bornée par une constante  $C$ .

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q_{u_n}^* &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^2} \text{Var } S_{u_n}^* \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^2} u_n \text{Var } \mathbb{E} X_1^2 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq u_n\}} \\
&\leq \mathbb{E} X_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \mathbb{1}_{\{X_1 \leq u_n\}}
\end{aligned}$$

Mais on peut remarquer que l'on a

$$\mathbb{E} X_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \mathbb{1}_{\{X_1 \leq u_n\}} = \mathbb{E} X_1^2 \sum_{n: u_n \geq X_1} \frac{1}{u_n}$$

5. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q_{u_n}^* &\leq \mathbb{E} X_1^2 \frac{C}{u_{\inf\{n \in \mathbb{N}; u_n \geq X_1\}}} \\
&\leq \mathbb{E} X_1^2 \frac{C}{X_1} \\
&\leq C \mathbb{E} X_1 < +\infty
\end{aligned}$$

6. Soit  $\epsilon > 0$  quelconque. D'après l'inégalité de Tchebitchev, on a  $P(|Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^*| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var } Q_{u_n}^*}{\epsilon^2}$ . D'après la question précédente, on peut donc affirmer que la série de terme général  $P(|Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^*| \geq \epsilon)$  est convergente. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut donc dire que

$$P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{|Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^*| \geq \epsilon\}) = 0,$$

ceci pour  $\epsilon$  strictement positif quelconque. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre, on peut affirmer que

$$Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^* \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

7.  $\mathbb{E} X_n^* = \mathbb{E} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq n\}} = \mathbb{E} X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}}$ , car  $X_1$  et  $X_n$  ont même loi. Comme la suite  $(X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}})_{n \geq 1}$  converge en croissant vers  $X_1$ , le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que  $\mathbb{E} X_n^* = \mathbb{E} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq n\}} = \mathbb{E} X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}}$  converge vers  $\mathbb{E} X_1$ .

- 
8.  $\mathbb{E} Q_n^* = \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n \mathbb{E} X_k^*)$ . D'après la question précédente  $\mathbb{E} X_n^*$  converge vers  $\mathbb{E} X_1$ , donc d'après le théorème de Césaro, les moyennes convergent également vers  $\mathbb{E} X_1$ .
9. On a  $Q_{u_n}^* - \mathbb{E} X_1 = (Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^*) + (\mathbb{E} Q_{u_n}^* - \mathbb{E} X_1)$  ( $\mathbb{E} Q_{u_n}^*$ ) est une sous-suite d'une suite (déterministe) qui converge vers  $\mathbb{E} X_1$ , donc elle converge aussi vers  $\mathbb{E} X_1$ . Comme  $Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^*$  tend vers 0 presque sûrement et que la convergence presque sûre est compatible avec la somme, on en déduit que  $Q_{u_n}^*$  tend presque sûrement vers  $\mathbb{E} X_1$ .
10.  $P(X_n \neq X_n^*) = P(X_n > n) = P(X_1 > n)$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $P(X_1 > n) \leq \int_{]n-1, n]} P(X > t) d\lambda(t)$ . Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n \neq X_n^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 > n) \leq \int_{]0, +\infty[} P(X > t) d\lambda(t) = \mathbb{E} X < +\infty$$

11. Ainsi, d'après le lemme de Borel-Cantelli,  $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{X_n \neq X_n^*\}) = 0$  ce qui équivaut à  $P(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \{X_n = X_n^*\}) = 1$  : pour presque tout  $\omega$ , on a  $\omega \in \{X_n = X_n^*\}$  dès que  $n \geq n_0(\omega)$ , c'est à dire que les suites  $(X_n(\omega))$  et  $(X_n^*(\omega))$  coïncident à partir du rang  $n_0(\omega)$ .
12. Pour presque tout  $\omega$ , on peut écrire dès que  $u_n \geq n_0(\omega)$

$$Q_{u_n} - \mathbb{E} X_1 = \frac{S_{u_{n_0-1}} - S_{u_{n_0-1}}^*}{u_n} + (Q_{u_n} - \mathbb{E} X_1^*)$$

Bien sûr,  $\frac{S_{u_{n_0-1}} - S_{u_{n_0-1}}^*}{u_n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Quant au deuxième terme, il tend presque sûrement vers zéro.

Détaillons le raisonnement : si  $\omega \in \liminf_{n \rightarrow +\infty} \{X_n = X_n^*\} \cap \{Q_{u_n} \rightarrow \mathbb{E} X_1\}$ , alors  $\omega \in \{Q_{u_n} \rightarrow \mathbb{E} X_1\}$ . Comme l'intersection de deux ensembles de mesure 1 est un ensemble de mesure 1, on en déduit que  $P(Q_{u_n} \rightarrow \mathbb{E} X_1) = 1$ , soit

$$Q_{u_n} \rightarrow \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

13. Comme on fait des sommes de termes positifs, on a  $S_{u_n} \leq S_k \leq S_{u_{n+1}}$ . On en déduit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{u_n} \leq \frac{u_n}{k} Q_{u_n} \leq Q_k \leq \frac{u_{n+1}}{k} Q_{u_{n+1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} Q_{u_{n+1}}.$$

14. Si  $n_k$  désigne la partie entière du logarithme de  $n$  en base  $\beta$ , on a

$$\frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} Q_{u_{n_k}} \leq Q_k \leq \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} Q_{u_{n_k+1}}$$

---

Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{n_k}}{u_{n_{k+1}}} = \frac{1}{\beta} > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}} = \beta > 0$ , on en déduit

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \beta \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

15. On note

$$\Omega_\beta = \left\{ \omega \in \Omega; \frac{1}{\beta} \mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \beta \mathbb{E} X_1 \right\}.$$

On a montré à la question précédente que pour tout  $\beta > 1$ ,  $P(\Omega_\beta) = 1$ . En particulier  $\forall n \geq 1$   $P(\Omega_{1+1/n}) = 1$ . Comme l'intersection d'une famille dénombrable d'événements de probabilités un et de probabilité un, on a bien

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}\right) = 1.$$

16. Soit  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}$ . On a pour tout  $n \geq 1$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathbb{E} X_1$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient

$$\mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \mathbb{E} X_1,$$

soit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) = \mathbb{E} X_1$ . Comme  $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}\right) = 1$ , on a bien

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k = \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

17. Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on peut poser  $X_n^+ = \max(0, X_n)$  et  $X_n^- = \max(0, -X_n)$  : on a  $X_n = X_n^+ - X_n^-$ . Ainsi

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n X_k^+ \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n X_k^- \right)$$

Le théorème montré à la question précédente (loi des grands nombres pour des suites de variables aléatoires positives intégrables deux à deux indépendantes identiquement distribuées) s'applique aux deux termes de la différence, de sorte que  $\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right)$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E} X_1^+ - \mathbb{E} X_1^- = \mathbb{E} X_1$ .

**FIN**