



Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Devoir en temps libre n° 2

à rendre pour le 20 mars 2003

Problème

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives de même loi deux à deux indépendantes, admettant un moment d'ordre un. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } Q_n = \frac{1}{n} S_n.$$

On considère également les variables aléatoires tronquées : $X_i^* = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq i\}}$ et les sommes et quotients associés : $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^*$ et $Q_n^* = S_n^*/n$.

1. Montrer

$$\text{Var } S_n^* \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (X_i^*)^2.$$

En déduire

$$\text{Var } S_n^* \leq n \mathbb{E} X_1^2 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}}.$$

2. Soit $\beta > 1$. On note u_n l'entier le plus proche de β^n . Montrer $u_n \sim \beta^n$.

En déduire

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = O\left(\frac{1}{u_N}\right).$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall N \geq 1 \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \leq C \frac{1}{u_N}.$$

4. Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q_{u_n}^* \leq \mathbb{E} X_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \mathbb{1}_{\{X_1 \leq u_n\}},$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q_{u_n}^* \leq \mathbb{E} X_1^2 \sum_{n: u_n \geq X_1} \frac{1}{u_n}$$

5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q_{u_n}^* < +\infty.$$

6. Montrer que

$$Q_{u_n}^* - \mathbb{E} Q_{u_n}^* \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

7. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} Y_n = \mathbb{E} X_1.$$

8. Montrer que $\lim \mathbb{E} Q_n^* = \mathbb{E} X_1$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Césaro)

9. En déduire que

$$Q_{u_n}^* \rightarrow \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

10. Montrer que la série de terme général $P(X_n \neq X_n^*)$ converge.

11. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer que pour presque tout ω , il existe un $n_0(\omega)$ tel que les suites $(X_n(\omega))$ et $(X_n^*(\omega))$ coïncident à partir du rang $n_0(\omega)$.

12. Montrer que

$$Q_{u_n} \rightarrow \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

13. Si $u_n \leq k \leq u_{n+1}$, montrer que

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{u_n} \leq Q_k \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} Q_{u_{n+1}}.$$

14. En déduire que

$$\frac{1}{\beta} \mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k \leq \beta \mathbb{E} X_1 \text{ p.s}$$

15. On note

$$\Omega_\beta = \{\omega \in \Omega; \frac{1}{\beta} \mathbb{E} X_1 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\omega) \leq \beta \mathbb{E} X_1\}.$$

Montrer que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}\right) = 1.$$

16. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k = \mathbb{E} X_1 \text{ p.s.}$$

17. Montrer que le résultat de la dernière question demeure vrai si l'on ne suppose plus que les (X_n) sont des variables positives.

FIN