Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Corrigé du devoir I

Exercice I

1. A_n est fini, donc $P(A_n) = \sum_{(k,l)\in A_n} P(\{k,l\})$. Pour tout $(k,l) \in A_n$, on a $P(\{k,l\}) = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{(k+p+1)^3} = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{(n+1)^3}$. On a donc finalement $P(A_n) = |A_n|\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n^3} = (n+1)\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n^3}$. Les $(A_n)_{n\geq 0}$ forment une partition de Ω. On a donc
$$P(\Omega) = \sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n^3} = 1.$$
Ainsi P est une mesure de probabilité.

2. $P(X = k, Y = p) = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{(k+p+1)^3}$.

3. Les événements $(Y = p)_{p\geq 0}$ forment une partition de Ω. On a donc
$$P(X = k) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X = k, Y = p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{(k+p+1)^3} = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$
On reconnait le reste d'une série de Riemann. Posons $v_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}$. Il est facile de voir que (v_n) est à termes positifs, avec $v_n \sim \frac{1}{n^3}$, qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, les restes sont équivalents:
$$\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \sim \sum_{n=k+1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2(k+1)^2},$$
car la série est de forme télescopique. On a donc
$P(X = n) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$.

4. Raisonnons par l'absurde: supposons que X et Y sont indépendantes. Alors, pour tout n, on a $P(X = n, Y = n) = P(X = n)P(Y = n)$. D'après la question précédente, on a donc $P(X = n, Y = n) \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^4}$. Mais un calcul direct montre que
$$P(X = n, Y = n) = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{(2n+1)^3} \sim \frac{1}{8\zeta(2)}\frac{1}{n^3}.$$

En faisant le rapport des deux expressions et en faisant endre n vers l'infini, on obtient une contradiction.

5. Les événements $\{X = k\}_{k\geq 0}$ forment une partition de Ω. On a donc

$$\begin{aligned}
P(Y = rX-1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = rX-1, X = k) \\
&= P(Y=-1, X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = rX-1, X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = rX-1, X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k+rk-1+1)^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{k^3(r+1)^3} \\
&= \frac{1}{\zeta(2)(r+1)^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\
&= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)(r+1)^3}
\end{aligned}$$

6. X divise $Y+1$ si et seulement si il existe r entier relatif avec $Y+1 = rX$. Mais comme $Y+1$ est strictement positif et X positif, r est nécessairement un entier naturel non nul. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(X \text{ divise Y+1}) &= \sum_{r=1}^{+\infty} P(Y+1 = rX) \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)(r+1)^3} \\
&= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{(r+1)^3} \\
&= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}(\zeta(3)-1)
\end{aligned}$$

Exercice II

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Par convention, on pose $X_0 = 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n-1}$.

1. X_n et X_{n-1} sont dans $\{0,1\}$, donc leur produit Y_n l'est aussi: Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_n = 1) = P(X_n = 1, X_{n-1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n-1} = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. On utilise le fait que X_n et X_{n-1} sont indépendantes.

2. Par définition de Y_n, Y_n est $\sigma(X_{n-1}, X_n)$-mesurable. Comme les (X_n) sont indépendantes, Y_i et Y_j sont dès lors indépendantes dès que $\{i-1, i\} \cap \{j-1, j\} = \varnothing$, ce qui est vrai dès que $|i-j| > 1$. Comme Y_i en'est pas constante Y_i n'est pas indépendante de Y_i. D'autre part $\mathbb{E}Y_iY_{i+1} = \mathbb{E}X_{i-1}X_i^2X_{i+1} = \mathbb{E}X_{i-1}X_iX_{i+1} = \frac{1}{8} \neq \mathbb{E}Y_iY_{i+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, ce qui achève de montrer la réciproque.

3. Si $p \geq n$
$$\big(\forall i \leq p \quad Y_i \neq 1\}) \Longrightarrow (\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1\}).$$
Ainsi $A_p \subset A_n$: la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement
$$A_n = \{\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1\}.$$

4. On a clairement $A_{n+1} = A_n \cap \{Y_{n+1} \neq 1\}$, ou, de manière équivalente
$$A_{n+1} = A_n \cap \{X_n = 0 \text{ ou } X_{n+1} = 0\}.$$
On a a $A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 0\} = A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}$, d'où
$$u_{n+1} = P(A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 0\}) = P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}).$$
Mais A_n est $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mesurable et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont indépendantes. Donc les événements A_n et $\{X_{n+1} = 0\}$ sont indépendants: on a alors $P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}) = P(A_n)P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(A_n)$. Comme $\{X_n = 0\}$ et $\{X_n = 1\}$ forment une partition de A_n, on a enfin
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\} + P(A_n \cap \{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$
D'autre part
$$A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 1\} = A_n \cap \{X_n = 0\} \cap \{X_{n+1} = 1\}$$
Comme l'événement $A_n \cap \{X_n = 0\}$ est $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mesurable, on déduit comme précédemment que
$$v_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap \{X_n = 0\})P(X_{n+1} = 1) = u_n \times \frac{1}{2},$$
ce qui achève de démontrer la formule de récurrence.

5. Par une récurrence classique, on en déduit
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$P(A_n) = u_n + v_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons pour $n \geq 0$:

$$w_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $X^2 - X - 1$. Il existe donc une matrice P inversible (même orthogonale si on veut) telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \overline{\gamma} \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où

$$w_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \gamma^n & 0 \\ 0 & \overline{\gamma}^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'existence de constantes C et D telles que

$$\forall n \geq 0 \quad w_n = C\gamma^n + D\overline{\gamma}^n,$$

où on a posé $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\gamma} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a nécessairement $w_0 = 1 = C + D$ et $w_1 = 2 = C\gamma + D\overline{\gamma}$. Il s'ensuit

$$D = \frac{\gamma - 2}{\gamma - \overline{\gamma}} = \frac{\gamma - 2}{\sqrt{5}} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}+5}{10} = \frac{-3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2},$$

puis $C = 1 - D = \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$.
Maintenant, on a $P(A_n) = \frac{1}{2^n} w_n$, d'où le résultat.

6. Posons $q_n = w_n/(C\gamma^n)$: on a $q_n = 1 + D(\frac{\overline{\gamma}}{\gamma})^n$ Comme $|\frac{\overline{\gamma}}{\gamma}| < 1$, $(\frac{\overline{\gamma}}{\gamma})^n$ tend vers 0, d'où

$$\begin{aligned} \ln P(A_n) &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln C + \ln q_n \\ &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln q_n \\ &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln C + O(\frac{\overline{\gamma}}{\gamma})^n) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln P(A_n) = -\ln 2 + \ln \gamma.$$

7. En utilisant l'indépendance des (Z_n), on a

$$P(\forall i \leq n \quad Z_i \neq 1) = (\frac{3}{4})^n,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln P(\forall i \leq n \quad Z_i \neq 1) = \ln 3 - 2\ln 2.$$

On constate alors que la limite obtenue diffère ($-\ln 2 + \ln \gamma \neq \ln 3 - 2\ln 2$), alors que la différence de nature entre les deux suites ne paraissait pas évidente de prime abord. Cette différence est due au fait que, même si , pour chaque n, Y_n et Z_n ont même loi, la loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 2}$ et celle de $(Z_n)_{n\geq 2}$ diffèrent.

FIN