Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Devoir à rendre le 12 février 2003

Exercice I

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie, pour $s > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}.$$

On pose $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soit P la mesure sur Ω définie par

$$P = \sum_{(k,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k+p+1)^3} \delta_{(k,p)}.$$

1. Pour n entier naturel, on note $A_n = \{(k,l) \in \Omega; k+l = n\}$.
   Montrer $P(A_n) = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(n+1)^2}$. En déduire que P est une mesure de probabilité.

2. On pose, pour $\omega = (k,p) \in \Omega$ $X(\omega) = k$ et $Y(\omega) = p$.
   Que vaut $P(X = k, Y = p)$?

3. Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a

   $$P(X = k) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

   En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle $P(X = n) \sim \frac{C}{n^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ? (On pourra considérer les événements $\{X = n\}$ et $\{Y = n\}$)

5. Pour tout entier $r \geq 1$, calculer $P(Y = rX - 1)$.

6. En déduire $P(X \text{ divise } \mathrm{Y}+1) = (\zeta(3) - 1)\frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}$.

Exercice II

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Par convention, on pose $X_0 = 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, Y_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre.

2. Pour i, j entiers naturels strictement supérieurs à un, montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i - j| > 1$.

3. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement
$$A_n = \{\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1\}.$$
Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

4. On pose pour $n \geq 1$ $x_n = P(A_n)$, $u_n = P(A_n \cap \{X_n = 0)$ et $v_n = P(A_n \cap \{X_n = 1)$. Montrer soigneusement
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer des constantes C et D telles que
$$\forall n \geq 1 \quad P(A_n) = 2^{-n}(C\gamma^n + D\overline{\gamma}^n),$$
où γ et $\overline{\gamma}$ sont les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

6. En déduire la valeur de
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln P(\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1).$$

7. Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variable aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_2 = 1)$. Calculer
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln P(\forall i \leq n \quad Z_i \neq 1).$$
Comparer avec le résultat de la question précédente.

FIN