



Unité MA 6.06

**Mesure et Probabilités**

Devoir en temps libre

à rendre pour le 13 février 2003

**Exercice (court, mais pas guidé)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et  $\mathcal{A}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Soient  $U, V$  deux variables aléatoires de loi  $\mu$  (sous  $P$ ). On suppose que (sous  $P$ ),  $U$  et  $V$  sont indépendantes de la tribu  $\mathcal{A}$ . Soit  $A$  un événement  $\mathcal{A}$ -mesurable. On définit  $W$  par

$$W(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ V(\omega) & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Montrez que sous  $P$ ,  $W$  suit la loi  $\mu$  et  $W$  est indépendante de  $\mathcal{A}$ . Autrement dit, il faut montrer que la tribu  $\mathcal{A}$  est indépendante de la tribu  $\sigma(W) = \{W^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .

---

## Problème (un peu plus long, mais guidé)

Soit  $1 \leq \alpha > 0$ . Une matrice carrée d'ordre  $n$   $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  constituée uniquement de 0 et de 1 est telle que

$$(a_{i,j} = 0) \implies (a_{i,1} + \dots + a_{i,n} + a_{1,j} + \dots + a_{n,j} \geq 2\alpha n).$$

On veut démontrer que la somme des éléments de la matrice est au moins égale à  $\alpha n^2$ .

\*\*\*\*

On pose pour  $1 \leq k \leq n$ :

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{i,k} \text{ et } L_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{k,i}.$$

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\mathbb{E}a_{k,Y} = L_k$  et  $\mathbb{E}a_{X,k} = C_k$ .
2. On pose  $Q = \mathbb{E}a_{X,Y}$ . Montrer  $Q = \mathbb{E}L_X = \mathbb{E}C_Y$ .
3. Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{X=k\}} (L_X)^2.$$

4. En déduire

$$\mathbb{E} L_X a_{X,Y} = \mathbb{E} (L_X)^2,$$

puis

$$\mathbb{E} L_X a_{X,Y} \geq Q^2.$$

5. Montrer que  $\mathbb{E} C_Y a_{X,Y} \geq Q^2$ .

6. Montrer

$$\left( \frac{L_X + C_Y}{2} - \alpha \right) (1 - a_{X,Y}) \geq 0.$$

7. En déduire  $Q - \alpha - Q^2 + \alpha Q \geq 0$ , puis  $Q \geq \alpha$ .

8. Conclure.

**FIN**