



Problème I

1. On a

$$\mathbb{1}_{Z \in \{0, \dots, n-1\}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{Z=k\}}.$$

D'où

$$e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} \mathbb{1}_{\{Z \in \{0, \dots, n-1\}\}} = e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{Z=k\}}.$$

Mais par définition de Z , $\mathbb{1}_{\{Y=n\}} \mathbb{1}_{\{Z \in \{0, \dots, n-1\}\}} = \mathbb{1}_{\{Y=n\}}$. On a donc

$$e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} \mathbb{1}_{\{Z=k\}}.$$

Classiquement, on a $e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Z=k\}} = e^{itk} \mathbb{1}_{\{Z=k\}}$, d'où

$$e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{itk} \mathbb{1}_{\{X=k, Y=n\}}.$$

On prend l'espérance:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} P(Z = k, Y = n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} P(Z = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} \frac{1}{n} P(Y = n) \\ &= \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \frac{1}{n} P(Y = n), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est valide si $e^{it} \neq 1$, c'est à dire si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

2. Comme $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{Y=n\}}$, on a $e^{itZ} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} e^{itZ}$. Comme pour tout N , on a

$$\left| \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{Y=n\}} e^{itZ} \right| \leq 1,$$

le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{itZ} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} e^{itZ} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \frac{1}{n} P(Y = n) \\ &= \frac{i}{e^{it} - 1} \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = n) \frac{e^{int} - 1}{in} \\ &= \frac{i}{e^{it} - 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t P(Y = n) e^{inx} dx \end{aligned}$$

Ici encore, on a pour tout N , on a

$$\left| \sum_{k=1}^N P(Y = n) e^{inx} \right| \leq 1,$$

donc le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \mathbb{E}e^{itZ} \\ &= \frac{i}{e^{it} - 1} \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = n) e^{inx} dx \\ &= \frac{i}{e^{it} - 1} \int_0^t \phi_Y(x) dx \end{aligned}$$

3. Il est clair que $0 \leq Z \leq Y - 1$. Comme Y est supposée être intégrable, Z l'est aussi par comparaison. Comme $\int_0^t e^{ix} dx = \frac{e^{it} - 1}{i}$, on a $\frac{i}{e^{it} - 1} \int_0^t e^{ix} dx = 1$, d'où

$$\phi_Z(t) - 1 = \frac{i}{e^{it} - 1} \int_0^t (\phi_Y(x) - e^{ix}) dx.$$

Comme Y a un moment d'ordre 1, on a $\phi_Y(x) = 1 + i(\mathbb{E}T)x + o(x)$. D'autre part $e^{ix} = 1 + ix + o(x)$, donc $\phi_Y(x) - e^{ix} = i(\mathbb{E}T - 1)x + o(x)$. Par intégration, on a $\int_0^t (\phi_Y(x) - e^{ix}) dx = i(\mathbb{E}T - 1)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$, soit

$$\int_0^t (\phi_Y(x) - e^{ix}) dx \sim_0 i(\mathbb{E}T - 1)\frac{t^2}{2}$$

Mais comme $e^{it} - 1 \sim_0 it$, on a finalement, $\phi_Z(t) - 1 \sim_0 i(\mathbb{E}T - 1)\frac{t}{2}$. Comme Z a un moment d'ordre 1, on a $\phi_Z(t) = 1 + i(\mathbb{E}Z)t + o(t)$, d'où $\mathbb{E}Z = \frac{\mathbb{E}Y - 1}{2}$.

-
4. On sait (où on peut retrouver facilement) que $\phi_{X_1}(t) = \phi_{X_2}(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.
Maintenant, l'indépendance donne $\phi_Y(t) = \mathbb{E}e^{itY} = \mathbb{E}e^{itX_1}e^{itX_2}e^{-it} = e^{it}\mathbb{E}e^{itX_1}\mathbb{E}e^{itX_2} = e^{it}\phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t) = \frac{p^2e^{it}}{(1-(1-p)e^{it})^2}$.

5. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= \frac{i}{e^{it}-1} \int_0^t \phi_Y(x) dx \\
&= \frac{i}{e^{it}-1} \int_0^t \frac{p^2e^{ix}}{(1-(1-p)e^{ix})^2} dx \\
&= \frac{p^2}{(e^{it}-1)(1-p)} \int_0^t \frac{(1-p)e^{ix}}{(1-(1-p)e^{ix})^2} dx \\
&= \frac{p^2}{(e^{it}-1)(1-p)} \left[\frac{1}{1-(1-p)e^{ix}} \right]_0^t \\
&= \frac{p^2}{(e^{it}-1)(1-p)} \left(\frac{1}{1-(1-p)e^{it}} - \frac{1}{p} \right) \\
&= \frac{p^2}{(e^{it}-1)(1-p)} \frac{p-1+(1-p)e^{it}}{p(1-(1-p)e^{it})} \\
&= \frac{p^2}{(e^{it}-1)(1-p)} \frac{(1-p)(-1+e^{it})}{p(1-(1-p)e^{it})} \\
&= \frac{p}{(1-(1-p)e^{it})}.
\end{aligned}$$

D'où $\phi_{Z+1}(t) = \mathbb{E}e^{i(Z+1)t} = e^{it}\mathbb{E}e^{itZ} = \frac{pe^{it}}{(1-(1-p)e^{it})} = \phi_{X_1}(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Car continuité, l'identité s'étend sur \mathbb{R} tout entier. $Z+1$ et X_1 ont la même fonction caractéristique: elles ont donc la même loi, donc $Z+1$ suit la loi géométrique de paramètre p .

Problème II

1. (a) S_n est clairement mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_1, \dots, X_n)$. D'après le théorème d'associativité de l'indépendance, cette tribu est indépendante de la tribu engendrée par X_{n+1} , donc les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
- (b) Comme $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(n, \lambda)$, pour tout n X_n suit la loi $\Gamma(1, \lambda)$. On sait que si deux variables aléatoires indépendantes X et Y vérifient $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$, alors $X + Y \sim \Gamma(a + b, \lambda)$. En utilisant le résultat de la question précédente, il vient alors aisément par récurrence sur n que pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire S_n suit une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$.
- (c) Remarquons d'abord que comme les X_n sont positifs, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Si $S_{n+1} \leq t$, alors $n+1 \in \{k \geq 0; S_k \leq t\}$, donc

$N_t \geq n + 1$, donc bien sûr $N_t > n$. Inversement, si $S_{n+1} > t$, alors $\{k \geq 0; S_k \leq t\} \subset \{0, \dots, n\}$, donc sa borne supérieure N_t est inférieure ou égale à n . Ainsi $(N_t > n) \iff (S_{n+1} \leq t)$, ce qui signifie que $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.

- (d) Comme S_n suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$, S_n admet la densité $x \mapsto \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
On a donc

$$\begin{aligned} P(S_n \leq t) &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(n)} (\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x} \lambda dx \\ &= \int_0^{\lambda t} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= g_n(\lambda t) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} g_{n+1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t x^n e^{-x} dx \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} x^n (-e^{-x}) \right]_0^t + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-t} + \frac{1}{n\Gamma(n)} \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t) \end{aligned}$$

- (f) Comme N_t est à valeurs entières, $\{N_t > n - 1\} = \{N_t = n\} \cup \{N_t > n\}$, d'où $P(N_t > n - 1) = P(N_t = n) + P(N_t > n)$, ou encore $P(S_n \leq t) = P(N_t = n) + P(S_{n+1} \leq t)$, d'où $P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.

- (g) Soit $t > 0$. On a

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &= g_n(\lambda t) - g_{n+1}(\lambda t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{\lambda t} (\lambda t)^n \\ &= \frac{1}{n!} e^{\lambda t} (\lambda t)^n, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. $\{Y \leq t\} = -\frac{\ln U}{\lambda} \leq t\} = \{U \geq e^{-\lambda t}\}$. Si $t < 0$, $e^{-\lambda t} > 1$, donc $P(Y \leq t) = P(U \geq e^{-\lambda t}) = 0$. Sinon $P(Y \leq t) = P(U \in$

$[e^{-\lambda t}, 1]) = 1 - e^{-\lambda t} = \int_0^t e^{-x} dx$. Dans les deux cas,

$$P(Y \leq t) = \int_{]-\infty, t]} e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) d\lambda(x),$$

ce qui montre bien que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .

- (b) Ce programme génère un exemplaire de la loi de Poisson de paramètre λ .
3. (a) Les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1, donc d'après la loi forte des grands nombres S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}X_1$. Comme X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ , on a $\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{\lambda}$.
- (b) D'après la question précédente est le résultat d'analyse admis, il est immédiat que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement vers $1/(1/\lambda) = \lambda$.

FIN