Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Corrigé de l'examen du 26 juin 2003

durée 2h

Exercice 1

1. On sait que la connaissance d'un développement limité en 0 de la fonction caractéristique d'une loi permet d'en déterminer les moments. La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est $\phi(t) = \exp(-t^2/2)$. On a le développement limité en 0 :

$$\phi(t) = 1 + (-t^2/2) + \frac{(-t^2/2)^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^4).$$

Comme ϕ est C^∞, on a aussi

$$\phi(t) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}t + \frac{\phi''(0)}{2!}t^2 + \frac{\phi'''(0)}{3!}t^3 + \frac{\phi''''(0)}{4!}t^4.$$

Par identification, on a en particulier $\frac{\phi''''(0)}{4!} = \frac{1}{8}$. Mais d'autre part, on sait que le moment d'ordre 4 de X est donné par $\phi''''(0) = i^4\mathbb{E}X^4$, d'où $\mathbb{E}X^4 = \phi''''(0) = \frac{4!}{8} = \frac{24}{8} = 3$.

2. $(1+X)^4 = 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4$. Donc par linéarité $\mathbb{E}X = 1 + 4.0 + 6.1 + 4.0 + 1.3 = 10$. (Les moments d'ordre impair de X sont nuls car sa loi est centrée).
3. Comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $1+X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(1,1)$.
4. Les variables aléatoires $(X_n^4)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi image de la loi $\mathcal{N}(1,1)$ par l'application $x \mapsto x^4$. On a vu que la puissance quatrième d'une variable suivant la loi $\mathcal{N}(1,1)$ était intégrable, de moment 10. D'après la loi forte des grands nombres,la suite

$$\frac{X_1^4 + \cdots + X_n^4}{n}$$

converge donc presque sûrement vers 10.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où X suit la loi exponentielle de paramètre 2 et Y la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $P = X(X+Y)$ et $S = 2X + Y$.

1. Montrons d'abord que T est bien à valeurs dans Δ. Si pour $(x,p) \in]0,+\infty[^2$, on pose $p = x(x+y)$ et $s = 2x+y$, alors $s^2 - 4p = y^2 > 0$, donc $s^2 - 4p > 0$, d'où $p < \frac{s^2}{4}$. L'inégalité $p > 0$ est immédiate. Montrons maintenant que T établit bien une bijection $]0,+\infty[^2$ dans Δ. Soit $(s,p) \in \Delta$: on doit montrer qu'il existe un unique couple $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ solution de $p = x(x+y)$ et $s = 2x+y$. On a vu qu'une telle solution vérifiait nécessairement $y^2 = s^2 - 4p$, donc comme $y > 0$ $y = \sqrt{s^2-4p}$, puis $x = (x+y) - y = s - y = s - \sqrt{s^2-4p}$. Ainsi il y a au plus une solution. Reste à vérifier que la solution trouvée convient bien. Comme $p < \frac{s^2}{4}$, $y = \sqrt{s^2-4p}$ est bien défini et est un nombre strictement positif. Reste à voir que $x > 0$. Mais $x = s - y = \frac{s^2-y^2}{s+y} = \frac{4p}{s+y} > 0$ car le numérateur comme le dénominateur sont strictement positifs. Ainsi, l'application T définie par $T(x,y) = (x(x+y), 2x+y)$ réalise une bijection de $]0,+\infty[^2$ dans Δ, dont la réciproque est
$$T^{-1}(p,s) = (\frac{1}{2}\big(s - \sqrt{s^2-4p}\big), \sqrt{s^2-4p}).$$
Reste à voir que T est une C^1-difféomorphisme, ce qui est immédiat si on considère les composantes de T et de T^{-1}.

2. La loi du couple (X,Y) admet une densité qui charge uniquement $]0,+\infty[^2$. Comme T réalise un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans Δ et que $(U,V) = T(X,Y)$, alors (U,V) admet une densité qui est donnée par
$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|\det DT^{-1}_{u,v}| \text{ si } (u,v) \in \Delta \\ 0 \text{ si } (u,v) \notin \Delta \end{cases}$$
On a
$$\det DT_{x,y} = \det \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = y$$
On en déduit
$$\det DT^{-1}_{u,v} = \big(\det DT_{T^{-1}(x,y)}\big)^{-1} = \big(\sqrt{s^2-4p}\big)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{s^2-4p}}.$$
Comme X et Y sont indépendantes, on a
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 2e^{-2x}1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)e^{-y}1\!\!1_{]0,+\infty[}(y) = 2e^{-(2x+y)}1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)1\!\!1_{]0,+\infty[}(y).$$
On en déduit que le vecteur aléatoire (P,S) admet la densité
$$(p,s) \mapsto \frac{2}{\sqrt{s^2-4p}}e^{-s}\,1\!\!1_{\Delta}(p,s).$$

3. On obtient la densité d'une marginale en intégrant la loi produit :

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{s^2-4p}} e^{-s}\, 1\!\!1_\Delta(p,s)\ dp$$

C'est évidemment nul pour $s < 0$, tandis que pour $s \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_S(s) &= e^{-s} \int_0^{s^2/4} \frac{2}{\sqrt{s^2-4p}}\ dp \\ &= \frac{s}{2} e^{-s} \int_0^{s^2/4} \frac{1}{\sqrt{1-4p/s^2}}\ d(4p/s^2) \\ &= \frac{s}{2} e^{-s} \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx \\ &= s e^{-s} \end{aligned}$$

Ainsi S admet la densité $se^{-s} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(s)$, c'est à dire que S suit la loi gamma $\Gamma(2,1)$.

4. Comme X suit la loi exponentielle de paramètre 2, $2X$ suit la loi exponentielle de paramètre de $2/2 = 1$. Ainsi $S = (2X) + Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètres 1, qui est aussi la loi gamma $\Gamma(1,1)$. Ainsi la loi de S est $\Gamma(1+1,1) = \Gamma(2,1)$.

Exercice 3

1. Les événements $\{X_k^n = k\}$ sont des événements indépendants de même probabilité $1/n$. On en déduit que le nombre S_n d'événements qui sont réalisés suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p_n = 1/n)$. np_n tend vers $\lambda = 1$, donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1.
2. Soit tr $A_n = S_n$, donc tr A_n suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p_n = 1/n)$. Soit X suivant la loi de Poisson de paramètre 1. D'après ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} P(\text{tr } A_n = 0) = P(X = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 1/e.$$

FIN