



Unité MA 6.06

**Mesure et Probabilités**

Examen du 26 juin 2003

durée 2h

*Le photocopie de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.*

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

**Exercice 1**

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Par la méthode de votre choix, montrer que  $\mathbb{E}X^4 = 3$ .
2. Montrer que  $\mathbb{E}(1 + X)^4 = 10$ .
3. Quelle est la loi de  $1 + X$  ?
4. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi  $\mathcal{N}(1, 1)$ . Montrer que la suite

$$\frac{X_1^4 + \dots + X_n^4}{n}$$

converge presque sûrement et déterminer sa limite

**Exercice 2**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, où  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre 2 et  $Y$  la loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $P = X(X + Y)$  et  $S = 2X + Y$ .

1. On pose

$$\Delta = \{(p, s) \in ]0, +\infty[^2; 0 < p < \frac{s^2}{4}\}.$$

Montrer que l'application  $T$  définie par  $T(x, y) = (x(x + y), 2x + y)$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[^2$  dans  $\Delta$ , dont la réciproque est

$$T^{-1}(p, s) = \left(\frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p}), \sqrt{s^2 - 4p}\right).$$

---

(On remarquera que si  $p = x(x + y)$  et  $s = 2x + y$ , alors  $s^2 - 4p = y^2$ .)

2. Montrer que le vecteur aléatoire  $(P, S)$  admet la densité

$$(p, s) \mapsto \frac{2}{\sqrt{s^2 - 4p}} e^{-s} \mathbb{1}_{\Delta}(p, s).$$

3. En déduire que  $S$  suit la loi gamma  $\Gamma(2, 1)$ .  
4. Quelle est la loi de  $2X$ ? Retrouver sans calcul le résultat de la question précédente.

### Exercice 3

Pour tout entier  $n$  non nul, on considère une suite  $(X_k^n)_{1 \leq k \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini  $\{1, \dots, n\}$ .

1. On pose pour  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k^n = k\}}.$$

Quelle est la loi de  $S_n$ ? Montrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge en loi et déterminer sa limite.

2. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On construit un endomorphisme aléatoire  $A_n$  défini par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad A_n e_k = e_{X_k^n}.$$

Quelle est la loi de  $\text{tr } A_n$ ? Montrer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\text{tr } A_n = 0) = \frac{1}{e}$ .

**FIN**