Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

corrigé de l'examen du 15 avril 2004

Problème I

1. Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes, donc la loi de leur somme est la convolée de leur loi, c'est à dire $\mathcal{E}(1)*\mathcal{E}(1)$. Mais on sait que $\mathcal{E}(1)=\Gamma(1,1)$, donc $\mathcal{E}(1)*\mathcal{E}(1)=\Gamma(1,1)*\Gamma(1,1)=\Gamma(2,1)$. Ainsi, pour tout n Y_n suit la loi $\Gamma(2,1)$.
2. La densité de Y_1 est $x\mapsto 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)xe{-}x$. Donc, pour $\alpha>0$, on a

$$\begin{aligned} P(Y_1\geq\alpha) &= \int_\alpha^{+\infty} xe^{-x} \\ &= \big[-xe^{-x}\big]_\alpha^{+\infty}+\int_\alpha^{+\infty} e^{-x} \\ &= \alpha e^{-\alpha}+e^{-\alpha} \\ &= (1+\alpha)e^{-\alpha} \end{aligned}$$

3. Y_n et Y_1 ont même loi, donc $P(Y_n\geq\beta\ln n)=P(Y_1\geq\beta\ln n)=(1+\beta\ln n)e^{-\beta\ln n}=\frac{1+\beta\ln n}{n^\beta}$. On reconnait la le terme général d'une série convergente. D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{Y_n\geq\beta\ln n\})=0.$$
4. On a déjà remarqué que pour tout k Y_k suit la loi $\Gamma(2,1)$. Il s'ensuit que les $Z_n=Y_{2n}$ suivent toutes la loi $\Gamma(2,1)$. Reste à voir que les Z_n sont indépendantes. Pour cela, il suffit de voir que pour tout n la tribu $\sigma(Z_n)$ est indépendante de la tribu $\sigma(Z_k;k\neq n)$. Mais $\sigma(Z_n)$ est une sous-tribu de $\sigma(X_{2n},X_{2n+1})$, tandis que $\sigma(Z_k;k\neq n)$ est une sous tribu de $\sigma(X_k,k\notin\{2n,2n+1\})$. Mais ces deux dernières tribus $\sigma(X_{2n},X_{2n+1})$ et $\sigma(X_k,k\notin\{2n,2n+1\})$ sont indépendantes d'après le théorème d'associativité de l'indépendance. Il s'ensuit que leurs sous-tribus le sont aussi.
5. Comme précédemment, on montre $P(Z_n\geq\ln 2n)=P(Y_1\geq\ln 2n)=(1+\beta\ln 2n)e^{-\ln 2n}=\frac{1+\ln 2+\ln n}{2n}$. Cette fois-ci la série de terme général $P(Z_n\geq$

$\ln 2n$) diverge. Comme les variables aléatoires Z_n sont indépendantes, le deuxième lemme de Borel-Cantelli permet de dire que

$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{Z_n \geq \ln n\}) = 1.$$

6. On a montré à la question précédente qu'avec probabilité 1, il y a une infinité de n tels que $Z_n/(\ln 2n) \geq 1$, ou encore $Y_{2n}/(\ln 2n) \geq 1$. Mais s'il y a une infinité de n tels que $Y_{2n}/(\ln 2n) \geq 1$, il y a une infinité de n tels que $Y_n/(\ln n) \geq 1$. Ainsi

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n} \geq 1 \text{ p.s.}$$

Il s'ensuit que pour tout $\beta \leq 1$, on a

$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{Z_n \geq \beta \ln n\}) = 1.$$

Si l'on joint ce résultat au résultat de la question 3, on constate que l'on a la dichotomie
– $\beta > 1 \Longrightarrow P(\limsup_{n\to+\infty}\{Z_n \geq \beta \ln n\}) = 0$.
– $\beta \leq 1 \Longrightarrow P(\limsup_{n\to+\infty}\{Z_n \geq \beta \ln n\}) = 1$.
Cela permet alors de dire que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1 \text{ p.s.}$$

Problème II

1. $\mathbb{E}X_1 = 1P(X_1 = 1) + (-1)P(X_1 = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Ainsi $(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 = X_1^2 = 1$, d'où Var $X_1 = \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 = 1$. Comme les X_k ont toutes la même loi, on a pour tout k Var $X_k =$ Var $X_1 = 1$. On a

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^{3/2}} X_k.$$

Les variables aléatoires X_k sont indépendantes donc les $\frac{k}{n^{3/2}}X_k$ le sont aussi. On a donc

$$\begin{aligned}
\text{Var } Z_n &= \sum_{k=1}^{n} \text{Var } \frac{k}{n^{3/2}} X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \text{Var } X_k \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

qui converge effectivement vers 1/3 lorsque n tend vers l'infini.

2. (a) $\phi(t) = \mathbb{E}e^{itX} = P(X=1)e^{it.1} + ¶(X=-1)e^{it.(-1)} = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) = \cos t$.

   (b) Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, Z_n peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires indépendantes, donc la fonction caractéristique s'écrit comme produit de leurs fonctions caractéristiques :

$$\begin{aligned}\phi_{Z_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \phi_{\frac{k}{n^{3/2}}X_k}(t) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(\frac{k}{n^{3/2}}t)\end{aligned}$$

   Mais les X_k ont la même loi donc pour tout k $\phi_{X_k} = \phi$, d'où

$$\phi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi(\frac{kt}{n^{3/2}}).$$

   (c) $\phi{-Z_n}(t) = \phi_{Z_n}(-t)$. Mais, comme produit de fonctions paires, ϕ_{Z_n} est paire, donc $\phi{-Z_n}(t) = \phi_{Z_n}(-t) = \phi_{Z_n}(t)$. Z_n et $-Z_n$ ont la même fonction caractéristique ; elles ont donc la même loi.

3. (a) Posons, pour $t \neq 0$, $\Psi(t) = \frac{\phi(t)\exp(t^2/2)-1}{t^4} = \frac{\cos(t)\exp(t^2/2)-1}{t^4}$. On définit $\Psi(0)$ comme on veut (on pourrait faire un prolongement par continuité, mais ce n'est pas nécessaire ici). Bien sûr, Ψ vérifie l'identité :

$$\forall t \in [-1,1] \quad \phi(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})(1+t^4\Psi(t)).$$

   Reste à voir que Ψ est bornée sur $[-1,1]$. Comme $[-1,1]$ est compact, il suffit de voir que Ψ est bornée au voisinage de tout point $x \in [-1,1]$. Si x est non nul, la bornitude au voisinage de x résulte immédiatement de la continuité de Ψ. Reste à voir la bornitude au voisinage de 0 : on a $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ et $\exp(t^2/2) = 1 + t^2/2 + O(t^4)$. Il s'ensuit $\cos t \exp(t^2/2) = 1 - t^4/4 + O(t^4) = 1 + O(t^4)$, d'où $\phi(t)\exp(t^2/2) - 1 = O(t^4)$, soit $\Psi(t) = O(1)$.

   (b) Notons K un majorant de $|\Psi|$ sur $[-1,1]$. On sait que pour tout $t \in [-1,1]$, on a $\phi(t)\exp(t^2/2) = 1 + t^4\Psi(t)$. On en déduit

$$\forall t \in [-1,1] \quad 1 - Kt^4 \leq \phi(t)\exp(t^2/2) = 1 + Kt^4.$$

   Mais si n dépasse t^2 alors pour tout k dans $\{1,\dots,n\}$

$$|\frac{kt}{n^{3/2}}| \leq \frac{n|t|}{n^{3/2}} = \frac{|t|}{n^{1/2}} \leq 1,$$

   donc $\frac{kt}{n^{3/2}} \in [-1,1]$. On en déduit alors aisément :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\} \quad 1 - \frac{Kt^4}{n^2} \leq 1 - \frac{Kk^4t^4}{n^6} \leq \phi(\frac{kt}{n^{3/2}})\exp(\frac{k^2t^2}{2n^3}) \leq 1 + \frac{Kk^4t^4}{n^6} \leq 1 + \frac{Kt^4}{n^2}.$$

Dès que $\frac{Kt^4}{n^2} \leq 1$ (c'est à dire dès que $n \geq Kt^2$), tous les termes des inégalités sont positifs : on peut donc les multiplier et on obtient :

$$\forall n \geq \max(1, \sqrt{K})t^2; \quad (1 - \frac{Kt^4}{n^2})^n \leq \exp(\frac{(n+1)(2n+1)t^2}{12n^2})\phi_{Z_n}(t) \leq (1 + \frac{Kt^4}{n^2})^n.$$

4. À t fixé, lorsque n tend vers l'infini, on a $\ln(1 - \frac{Kt^4}{n^2})^n = n\ln(1 - \frac{Kt^4}{n^2}) \sim n.\frac{Kt^4}{n^2} = \frac{Kt^4}{n}$ qui tend vers 0. On en déduit que $(1 - \frac{Kt^4}{n^2})^n$ tend vers 1. De même $(1 + \frac{Kt^4}{n^2})^n$ tend vers 1. Par encadrement $\exp(\frac{(n+1)(2n+1)t^2}{12n^2})\phi_{Z_n}(t)$ tend donc vers 1. Maintenant, on peut écrire

$$\phi_{Z_n}(t) = \big(\exp(\frac{(n+1)(2n+1)t^2}{12n^2})\phi_{Z_n}(t)\big).\exp(-\frac{(n+1)(2n+1)t^2}{12n^2})$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du produit tend vers 1 et le deuxième tend vers $\exp(-t^2/6)$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \lim_{t \to +\infty} \phi_{Z_n}(t) = \exp(-t^2/6).$$

Comme $t \mapsto \exp(-t^2/6)$ est la fonction caractéristique d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/3)$, il découle alors du théorème de Lévy que Z_n converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/3)$.

Exercice bonus (hors barème)

On calcule aisément :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(n)$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

D'où

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(n+1)$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

En fait $\gamma(X+1)$ vaut très souvent 1. Cela donne envie d'écrire

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(n+1)-1$	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Ainsi, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\gamma(X+1) &= 1 + \mathbb{E}(\gamma(X+1) - 1) = 1 + (-1).P(X=0) + 1.P(X=5) + 1.P(X=9) \\
&= 1 - (1-p)^9 + \binom{9}{5}p^5(1-p)^4 + p^9 \\
&= 1 + 126p^5(1-p)^4 + (p^9 - (1-p)^9) \\
&\leq 1 + 126p^5(1-p)^4,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que comme $p \leq 1/2$, on a $p \leq 1-p$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $126p^5(1-p)^4 < 0,25$. Pour cela, on montre que la fonction $f(p) = p^5(1-p)^4$ est croissante sur $[0,1/2]$: cela peut se faire en étudiant la dérivée, ou simplement en remarquant que que $f(p)$ peut s'écrire $f(p) = p(p(1-p))^4 = p(1/4-(1/2-p)^2)^4$: comme produit de fonctions croissantes positives sur $[0,1/2]$, f est croissante. Ainsi pour $p \in [0,1/2]$, $f(p) \leq f(1/2) = \frac{1}{2^9}$.

On en déduit

$$\mathbb{E}\gamma(X+1) \leq 1 + 126p^5(1-p)^4 \leq 1 + \frac{126}{2^9} < 1 + \frac{128}{2^9} = 1 + \frac{2^7}{2^9} = 1,25.$$

FIN