Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen du 15 avril 2004

durée 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants obligatoires et d'un exercice facultatif hors-barème. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Problème I

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout n, Y_n suit la loi gamma : $\Gamma(2, 1)$.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a l'identité
$$P(Y_1 \geq \alpha) = (1 + \alpha)e^{-\alpha}.$$
3. Soit $\beta > 1$. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{Y_n \geq \beta \ln n\}) = 0.$$
4. Pour $n \geq 1$, on pose $Z_n = Y_{2n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont on précisera la loi.
5. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{Z_n \geq \ln(2n)\}) = 1.$$
6. En déduire que
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1 \text{ p.s.}$$

Problème II

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} kX_k.$$

On note ϕ la fonction caractéristique de X_1.

1. Montrer que Var $X_1 = 1$, puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \text{Var } Z_n = \frac{1}{3}.$$

À cet effet, on pourra éventuellement utiliser l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

sans qu'il soit nécessaire de la redémontrer.

2. (a) Montrer que pour tout t réel, on a $\phi(t) = \cos t$.

   (b) Montrer que la fonction caractéristique de Z_n est

$$\phi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi(\frac{kt}{n^{3/2}}).$$

   (c) Montrer que Z_n et $-Z_n$ ont même loi.

3. (a) Montrer qu'il existe une fonction bornée $\Psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [-1,1] \quad \phi(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})(1 + t^4\Psi(t)).$$

   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante K telle que

$$\forall n \geq t^2 \quad \forall k \in \{1,\ldots,n\} \quad 1 - \frac{Kt^4}{n^2} \leq \phi(\frac{kt}{n^{3/2}}) \exp(\frac{k^2t^2}{2n^3}) \leq 1 + \frac{Kt^4}{n^2}.$$

   En déduire

$$\forall n \geq \max(1, \sqrt{K})t^2; \quad (1 - \frac{Kt^4}{n^2})^n \leq \exp(\frac{(n+1)(2n+1)t^2}{12n^2})\phi_{Z_n}(t) \leq (1 + \frac{Kt^4}{n^2})^n.$$

4. En déduire que Z_n converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/3)$.

Exercice bonus (hors barème)

Pour n entier naturel non nul, on note $\gamma(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n : ainsi $\gamma(1) = 0$, $\gamma(2) = 1$, $\gamma(9) = 1$, $\gamma(12) = 2$. Soit $p \in [0, 1/2]$ et X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(9, p)$. Montrer que $\mathbb{E}\gamma(X + 1) < 1,25$.

Note : Des points pourront être accordés (même généreusement) à des solutions incomplètes, mais il est déconseillé de chercher cet exercice sans avoir résolu au préalable une part conséquente de la partie classique du sujet.

FIN