



Mesure et Probabilités

correction de l'examen du 28 avril 2003

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4\}$.

1. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E} \ln X_1 = \sum_{k=2}^4 P(X_1 = k) \ln k = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{3 \ln 2 + \ln 3}{3}$.
2. On a

$$\ln Q_n = \ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_n.$$

Comme les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4\}$, les $(\ln X_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi image de la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4\}$ par l'application $x \mapsto \ln x$. D'après la loi forte des grands nombres, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln Q_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_n}{n} = \mathbb{E} \ln X_1 \text{ p.s.}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^{1/n} = \exp\left(\frac{3 \ln 2 + \ln 3}{3}\right) = 2\sqrt[3]{3} \text{ p.s.}$$

Exercice 2

Pour tout $r > 0$, on a $P(R > r) = 1 - P(R \geq r) = 1 - (P(R < r) + P(R = r))$. $P(R = r) = P((X, Y) \in \mathcal{C}_r)$, où \mathcal{C}_r est le cercle centré en l'origine et de rayon r . Mais un cercle est de mesure de Lebesgue nulle, donc $P(R = r) = 0$. Ainsi $P(R > r) = 1 - P(R < r)$, donc $(P(R > r) = P(R < r)) \iff P(R < r) = \frac{1}{2}$. $P(R < r) = P((X, Y) \in D_r)$ om D_r est le disque ouvert centré en l'origine et de rayon R . Comme (X, Y) suit la loi uniforme sur D , on a pour tout $r \in [0, 1[$

$$P((X, Y) \in D_r) = \frac{\lambda(D_r \cap D)}{\lambda(D)} = \frac{\lambda(D_r)}{\lambda(D)} = \frac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2.$$

Ainsi, on voit aisément qu'il suffit de prendre $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir l'identité demandée.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \mathbb{E}e^{zX}$

1. (a) D'après le théorème de transfert, on a pour tout nombre complexe z : on a

$$g(z) = P(X_1 = 1)e^{1 \cdot z} + P(X_1 = -1)e^{-1 \cdot z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

- (b) $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = g(it) = \cosh it = \cos t$ et $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = \phi_{X_1}(-t) = \cos -t = \cos t$.

- (c) $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une somme de variable aléatoires indépendantes, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_n}(t)$. Comme X_1, \dots, X_n ont la même loi, elles ont la même fonction caractéristique, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. De la même manière $-S_n = (-X_1) + \dots + (-X_n)$ est une somme de n variable aléatoires indépendantes ayant la même loi que $-X_1$ donc $\phi_{-S_n}(t) = \phi_{-X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. S_n et $-S_n$ ont la même fonction caractéristique donc elles ont la même loi.

2. On a

$$g(u) = \cosh u = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$\exp(u^2/2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{u^2}{2}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u^{2n}}{(2n)!} = \frac{u^{2n}}{2^n n!} \frac{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n)} \leq \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

En sommant les inégalités, on obtient bien que $g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}$.

3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.

- (a) Soit $u \geq 0$ ($S_n \geq n\alpha$) $\implies \exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha u)$, Donc

$$P(S_n \geq n\alpha) \leq P(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha u))$$

$\exp(uS_n)$ est à valeurs positives, donc d'après l'inégalité de Markov

$$P(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha)) \leq \frac{\mathbb{E} \exp(uS_n)}{\exp(n\alpha u)}.$$

On a $\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \exp(uX_k)$: Les variables aléatoires $(\exp(uX_k))_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes car les $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes. On a donc $\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp(uX_k)$. Mais ces variables aléatoires ont toutes la même loi – la loi image de $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ par l'application $x \mapsto \exp(ux)$: on a donc $\exp(uS_n) = \mathbb{E} \exp(uX_1)^n = g(u)^n$. On a bien finalement

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad P(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

(b) En utilisant la majoration que l'on a pour g , on obtient

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad P(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{\exp(n\frac{u^2}{2})}{e^{n\alpha u}}$$

En particulier, pour le choix $u = \alpha$, on obtient l'inégalité

$$P(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

(c) On a

$$P(|S_n| \geq n\alpha) = P(S_n \geq n\alpha) + P(-S_n \leq -n\alpha)$$

Mais on a vu que S_n et $-S_n$ ont même loi : on a donc $P(S_n \geq n\alpha) = P(-S_n \leq -n\alpha)$, d'où

$$\begin{aligned} P(|S_n| \geq n\alpha) &= 2P(S_n \geq n\alpha) \\ &\leq 2 \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}). \end{aligned}$$

4. Soit $\epsilon > 0$. On va montrer que

$$P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = 0.$$

$\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

Pour cela, le lemme de Borel Cantelli nous dit qu'il suffit de montrer que la série de terme général $P(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon)$ converge.

On a $P(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = P(|S_n| \geq n\alpha)$ où l'on a posé $\alpha = \epsilon n^{\beta-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} P(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) &\leq 2 \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}) \\ &\leq 2 \exp(-\frac{\epsilon^2}{2} n^{2\beta-1}) \end{aligned}$$

Comme $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend l'infini, on a $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n} \geq \frac{4}{\epsilon^2}$ dès que n est assez grand : on a alors $\frac{\epsilon^2}{2} n^{2\beta-1} \geq 2 \ln n$, d'où $\exp(-\frac{\epsilon^2}{2} n^{2\beta-1}) \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui assure que la série de terme général $P(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon)$ converge, et donc que

$$P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = 0.$$

Comme on a ce résultat pour tout $\epsilon > 0$, le critère fondamental de convergence presque sûre nous permet de dire que $\frac{S_n}{n^\beta}$ tend presque sûrement vers 0.

FIN