Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen partiel du 10 mars 2004

corrigé

1. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $Y = s(X)$ est à valeurs dans $s(\mathbb{R}_+) = \mathbb{N}*$. Il s'agit donc, pour tout $k \in \mathbb{N}*$, de déterminer la valeur de $P(Y = k)$. On a

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(s(X) = k) \\ &= P(X \in [k-1, k[) \\ &= P_X([k-1, k[) \\ &= \int_{[k-1,k[} dP_X(t) \\ &= \int_{[k-1,k[} \lambda e^{-\lambda t} d\lambda(t) \\ &= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= (1 - e^{-\lambda})\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

donc Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

2. X prend des valeurs entières de 0 à 2004. Donc, d'après le théorème de

transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(-2)^k &= \sum_{k=0}^{2004}(-2)^k P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}\frac{1}{2^{2004}}(-2)^k \\
&= \frac{1}{2^{2004}}\sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}(-2)^k(1)^{2004-k} \\
&= \frac{1}{2^{2004}}(-2+1)^{2004} \\
&= \frac{1}{2^{2004}}
\end{aligned}$$

3. Soit λ et μ deux réels strictement positifs; X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.

   (a) Notons $O_1 =]0,1[\times]0,1[$ et $O_2 = \{(u,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1 \text{ et } 0 < uy < 1$. Il est "évident" que O_1 et O_2 sont ouverts. (La justification de ces "évidences" n'est pas demandée dans cette unité, mais il est non moins évident qu'un étudiant de licence doit savoir justifier briévement ces affirmations). Il est facile de voir que l'application $\psi : (x,y) \to (x/y, y)$ réalise un C^1 difféomorphisme de O_1 dans O_2 dont la réciproque est $\psi^{-1}(u,y) = (uy, y)$. X admet la densité $x \mapsto 1\!\!1[0,1](x)$ et Y la densité $y \mapsto 1\!\!1[0,1](y)$. Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple est le produit des densités, soit $f(x,y) = 1\!\!1[0,1](x)1\!\!1[0,1](y)$. D'après le théorème de C^1 difféomorphisme, la loi de $(U,Y) = \psi(X,Y)$. admet la densité $g(u,y)$ qui vaut $|\det D\psi^{-1}_{(u,y)}|f(\psi^{-1}(u,y))$ sur O_2 et 0 ailleurs, soit $g(u,y) = |y|f(uy,y)1\!\!1_{O_2}(u,y)$. En fait, il est facile de voir que si $(u,y) \in O_2$, alors $f(uy,y) = 1$. On a donc tout simplement pour (U,Y) la densité

   $$g(u,y) = |y|1\!\!1_{O_2}(u,y) = y1\!\!1_{]0,1[}(uy)1\!\!1_{]0,1[}(y) = y1\!\!1_{]0,1/u[}(y)1\!\!1_{]0,1[}(y)1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u) = y1\!\!1_{]0,\inf(1,1/u)[}(y)1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u).$$

   (b) Le vecteur (U,Y) admet la densité $g(u,y)$, donc U admet la densité

   $$\begin{aligned}
   f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} g(u,y)\,d\lambda(y) \\
   &= \int_{\mathbb{R}} y1\!\!1_{]0,\inf(1,1/u)[}(y)1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u)\,d\lambda(y) \\
   &= 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u)\int_{]0,\inf(1,1/u)[} y\,d\lambda(y) \\
   &= 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u)\int_0^{\inf(1,1/u)} y\,d\lambda(y) \\
   &= \frac{1}{2}\min(1,u^{-2})1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u).
   \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(U>1) &= P(U \in]1,+\infty[) \\
&= P_U(]1,+\infty[) \\
&= \int_{]1,+\infty[} dP_U(u) \\
&= \int_{]1,+\infty[} f_U(u) d\lambda(u) \\
&= \int_{]1,+\infty[} \frac{1}{2}\min(1,u^{-2})1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u) d\lambda(u) \\
&= \int_{]1,+\infty[} \frac{1}{2}u^{-2} d\lambda(u) \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} u^{-2}\ du \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

(d)

$$P(U>1) = P(X/Y>1) = P(X>Y) = P_{(X,Y)}(\{(a,b)\in\mathbb{R}^2; a>b\}).$$

De la même manière, on a

$$P(U<1) = P(X/Y<1) = P(X<Y) = P_{(Y,X)}(\{(a,b)\in\mathbb{R}^2; a>b\})$$

et

$$P(U=1) = P(X/Y=1) = P(X=Y = P_{(Y,X)}(\{(a,b)\in\mathbb{R}^2; a=b\}).$$

Comme $P_{(Y,X)} = U([0,1])\otimes U([0,1]) = P_{(X,Y)}$, on a $P(X>Y) = P(Y<X)$, d'où

$$P(U>1) = P(X>Y) = (P(X<Y)+P(y<X))/2 = P(X\neq Y)/2 = (1-P(X=Y))/2.$$

Mais

$$P(X=Y) == P_{(Y,X)}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x=y\}) = \lambda^2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; a=b\}) = 0,$$

d'où $P(U>1) = 1/2$.

(e) La loi de $U = X/Y$ est la loi image de la loi $P_{(X,Y)}$ par l'application $(a,b)\mapsto a/b$. La loi de $1/U = Y/X$ est la loi image de la loi $P_{(Y,X)}$ par l'application $(a,b)\mapsto a/b$.
Mais $P_{(Y,X)} = U([0,1])\otimes U([0,1]) = P_{(X,Y)}$, donc U et $1/U$ ont même loi.

(f) Une variable aléatoire V constante égale à 1 convient. Autre exemple: la loi uniforme sur $\{1/2, 1, 2\}$.

4. Notons $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > \sqrt{2}/2\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.
On a $P(X > \frac{\sqrt{2}}{2}) = P_{(X,Y)}(H) = U_D(H) = \frac{\lambda^2(D \cap H)}{\lambda^2(D)}$.
D est un disque de centre 0 et de rayon 1, donc $\lambda^2(D) = \pi.1^2 = \pi$.
On a donné en TD une méthode graphique pour le calcul de $\lambda^2(D \cap H)$ (c'est l'aire d'une calotte circulaire). Voyons ici une méthode par le calcul

$$\begin{aligned}
\lambda^2(D \cap H) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_D(x,y)\mathbb{1}_H(x,y)\ d\lambda^2(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_D(x,y)\mathbb{1}_H(x,y)\ d\lambda^2(x,y)
\end{aligned}$$

Clairement $(x,y) \notin D$ si $|x| > 1$ ou $|y| > 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\lambda^2(D \cap H) &= \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \mathbb{1}_D(x,y)\mathbb{1}_{]\sqrt{2}/2,+\infty[}(x)\ d\lambda^2(x,y) \\
&= \int_{[\sqrt{2}/2,1]\times[-1,1]} \mathbb{1}_D(x,y)\ d\lambda^2(x,y) \\
&= \int_{[\sqrt{2}/2,1]\times[-1,1]} \mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]}(y)\ d\lambda^2(x,y) \\
&= \int_{[\sqrt{2}/2,1]} \Big(\int_{[-1,1]} \mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]}(y)\ d\lambda(y)\Big)\ d\lambda(x) \\
&= \int_{[\sqrt{2}/2,1]} 2\sqrt{1-x^2}\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\ dx \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\ d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos^2\theta d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \pi/4 + [\frac{\sin 2\theta}{2}]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \pi/4 + (0-1)/2
\end{aligned}$$

D'où finalement $P(X > \sqrt{2}/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$.

FIN