



Mesure et Probabilités

corrigé du devoir du 13 mars 2003

1. D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^k \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2e}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2e}{3} \frac{1}{1 - \frac{e}{3}} \\ &= \frac{2e}{3 - e}. \end{aligned}$$

Ainsi  $Y$  est intégrable avec  $\mathbb{E}Y = \frac{2e}{3-e}$ .

2. (a)  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , donc leur couple  $(X, Y)$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  qui est le produit des densités:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mu e^{-\mu y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

L'application  $(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $O_1 = ]0, +\infty[^2$  dans  $O_2 = ]0, +\infty[^2$ . Son application réciproque est  $T^{-1}(u, y) = (u, y)$ . Ainsi, comme  $(X, Y)$  est un vecteur aléatoire à densité qui prend presque sûrement ses valeurs sur l'ouvert sur lequel est défini  $T$ , le vecteur  $T(X, Y) = (U, Y)$  est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par la formule

$$f_{U,Y}(u, y) = \begin{cases} f_{X,Y}(T^{-1}(u, y)) |\det DT_{u,y}^{-1}| & \text{si } (u, y) \in O_2 \\ 0 & \text{si } (u, y) \notin O_2 \end{cases}$$

On a

$$|\det DT_{u,y}^{-1}| = \left| \det \begin{pmatrix} y & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = y$$

Ainsi,  $(U, Y)$  admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction qui vaut sur  $O_2$

$$\begin{aligned} f_{(U,Y)}(u, y) &= \lambda e^{-\lambda u y} \mu e^{-\mu y} y \\ &= \lambda \mu e^{-(\lambda u + \mu)y} y \end{aligned}$$

et 0 ailleurs, soit de manière condensée

$$f_{(U,Y)}(u, y) = \lambda \mu e^{-(\lambda u + \mu)y} y \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

(b) Comme  $(U, Y)$  est un vecteur à densité, chacune de ses marginales a une densité qui est obtenue en intégrant la densité du couple par rapport à l'autre composante. Ainsi  $U$  admet la densité

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,Y)}(u, y) d\lambda(y)$$

Si  $u < 0$ ,  $f_{(U,Y)}(u, y)$  est presque partout nulle donc  $f_U(u) = 0$ , sinon

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,Y)}(u, y) d\lambda(y) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda \mu e^{-(\lambda u + \mu)y} y dy \\ &= \left[ -\frac{\lambda \mu e^{-(\lambda u + \mu)y}}{(\lambda u + \mu)} y \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \mu e^{-(\lambda u + \mu)y}}{(\lambda u + \mu)} dy \\ &= 0 + \frac{\lambda \mu}{(\lambda u + \mu)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_U(u) = \frac{\lambda \mu}{(\lambda u + \mu)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u). \quad (1)$$

(c)

$$\begin{aligned} P(U > 1) &= \int_1^{+\infty} f_U(u) du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\lambda \mu}{(\lambda u + \mu)^2} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\left(u + \frac{\mu}{\lambda}\right)^2} \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\lambda}} \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(U > 1) &= P(X > Y) \\ &= P((X, Y) \in D), \end{aligned}$$

où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} P(U > 1) &= P_{(X, Y)}(D) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D(x, y) dP_{X, Y}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D(x, y) f_{X, Y}(x, y) d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_D(x, y) f_{X, Y}(x, y) d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_D(x, y) f_{X, Y}(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{]y, +\infty[} f_X(x) f_Y(y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left( f_Y(y) \int_{]y, +\infty[} \lambda e^{-\lambda x} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} f_Y(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y} d\lambda(y) \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

3. Soit  $X$  une variable aléatoire positive telle que

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad P(X > t) \leq \frac{2003}{t^3}. \quad (2)$$

- (a) On sait qu'une variable aléatoire  $X$  positive est intégrable si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(X > t) dt$  est convergente. Comme  $P(X > t) \leq \min(1, \frac{2003}{t^3})$  qui est d'intégrale finie sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $X$  admet un moment d'ordre 1.
- (b) Pour  $t > 0$ , on a  $P(X^2 > t) = P(X > t^{1/2}) \leq \frac{2003}{t^{3/2}}$ . Ainsi  $P(X^2 > t) \leq \min(1, \frac{2003}{t^{3/2}})$  qui est d'intégrale finie sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $X^2$  admet un moment d'ordre 1, ce qui signifie que  $X$  admet un moment d'ordre 2.
- (c) La fonction  $f(x) = \frac{3}{(x+1)^4} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$  est une densité car elle est positive et d'intégrale sur  $\mathbb{R}$  égale à 1. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité. On a  $\forall t > 0 \quad P(X > t) = \int_t^{+\infty} f(x) d\lambda(x) = \frac{1}{(t+1)^3} \leq \frac{2003}{t^3}$  et  $\mathbb{E}X^3 = \int_{\mathbb{R}} x^3 f(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x+1)^4} dx = +\infty$ .

- 
4.  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , donc leur couple  $(X, Y)$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  qui est le produit des densités:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x, y).$$

Ainsi le vecteur  $(X, Y)$  suit la loi uniforme sur le compact de  $\mathbb{R}^2$   $[-1, 1] \times [-1, 1]$  (c'est un carré!).

$P(R < 1) = P((X, Y) \in D)$ , où  $D$  est le disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  centré à l'origine et de rayon 1. Ainsi

$$\begin{aligned} P(R < 1) &= P_{(X,Y)}(D) \\ &= \frac{\lambda^2(D \cap C)}{\lambda^2(C)} \\ &= \frac{\pi \cdot 1^2}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**FIN**