Université d'Orléans

Deug MASS, MIA

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Devoir en temps libre

A rendre dans la semaine du 6 au 10 octobre 2003

Exercice

On lance deux dés équilibrés à six faces, chaque face est numérotée de 1 à 6. On fait la somme des deux dés et on garde juste le dernier chiffre (en base 10 !) du nombre obtenu. Quelle est la probabilité pour que ce soit un "2" ?

Problème

Soit $n \geq 1$. On pose $I = \{1, \ldots, n\}$. On note P l'équiprobabilité sur I. Soit $M \subset I$ vérifiant

$$\forall x \in M \quad 2x \notin M$$

Le but du problème est de majorer le plus finement possible $P(M)$.

Pour $A \subset \mathbb{N}$, on note $2A$ l'ensemble $\{2x; x \in A\}$. Pour x réel, on note $\mathrm{En}\,(x)$ la partie entière de x.

Question préliminaire: montrer que tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^k i$, où k est un entier naturel et i un entier naturel positif impair.

1. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,

   $$A_k = \{(2k+1)2^i; i \geq 0\} \cap I.$$

   Montrer que les A_k forment une partition de I.

2. Dans cette question, on prend $n = 16$. Déterminer pour quelles valeurs de k l'ensemble A_k est non vide, puis, pour chacune de ces valeurs, donner la liste des éléments de A_k.

3. On revient au cas général. Si A_k est non-vide, montrer qu'il existe $x_k \in A_k$ tel que $2A_k \subset A_k \cup \{2x_k\}$. En déduire

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 2(A_k \cap M) \subset (A_k \cap 2M) \cup \{2x_k\}.$$

4. Si ϕ est une application injective définie sur un ensemble X, quel relation a-t-on entre $|X|$ et $|\phi(X)|$? Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(A_k \cap M) \leq P(A_k \cap 2M) + \frac{1}{n}.$$

5. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 2P(A_k \cap M) \leq P(A_k) + \frac{1}{n},$$

En déduire

$$nP(M \cap A_k) \leq \text{En } (\frac{1}{2}(nP(A_k) + 1))$$

6. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A'_k = \{(2k+1)2^{2i}; i \geq 0\} \cap I.$$

Montrer que pour k tel que $2k+1 \leq n$, on a $P(A_k) = \frac{1}{n}(1+\text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2}))$ et $P(A'_k) = \frac{1}{n}(1 + \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{2 \ln 2}))$.

7. En déduire $P(M \cap A_k) \leq P(A'_k)$.
(On pourra admettre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'identité En $(\frac{1}{2}(\text{En } (2x))) = \text{En } (x)$.)

8. On pose $E = \bigcup_{k \geq 0} A'_k$. Montrer $P(M) \leq P(E)$.

9. On revient au cas $n = 16$. Montrer qu'alors

$$P(M) \leq \frac{11}{16}.$$

Le cas d'égalité est-il possible ?

10. *Facultatif:* Dans le cas général, le meilleur majorant pour $P(M)$ est

$$\frac{1}{n} \sum_{i \geq 0} \text{En } (\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{2i+1}}).$$

FIN