Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

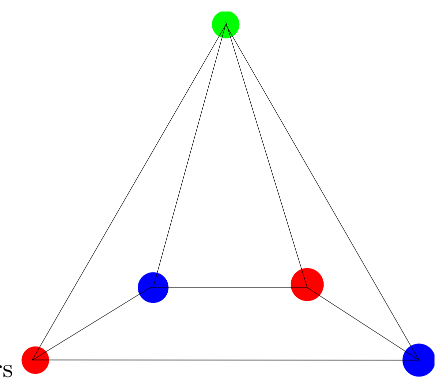
Probabilités et Graphes

Examen du 18 décembre 2001

durée: 2h
Corrigé abrégé

Exercice I

- On trouve $P_G(X) = X(X-1)(X-2)(X^2-5X+7)$
- $\chi(G) = \inf\{n \in \mathbb{N}; P_G(n) \neq 0\} = 3$.



- Un exemple de coloriage à 3 couleurs
- Le nombre de coloriages propres à 4 couleurs vaut $P_G(4) = 72$.
- Les racines complexes de P sont $0, 1, 2$ et les racines de $X^2 - 5X + 7$. Ce dernier polynôme est un polynôme du second degré de déterminant $\Delta = 5^2 - 4 * 7 = -3$. Ces racines sont donc deux nombres complexes conjugués z et $\overline{z}$, qui vérifient $z\overline{z} = 7$, donc sont toutes deux de module $\sqrt{7}$. Ainsi toutes les racines sont de modules inférieur ou égal à $\sqrt{7}$.

Exercice II

Supposons que $P(X) = X(X-1)(X-3)(X-k)$ est le polynôme chromatique d'un graphe G. Comme $P(3) = 0$, G n'admet pas de coloriage propre à l'aide d'une palette de 3 couleurs. Dès lors, il n'en admet pas non plus à l'aide d'une palette de 2 couleurs. Il s'ensuit que $P(2) = 0$. Mais $P(2) = 2.(-1).1.(2-k) = 2(k-2)$, donc $k = 2$.

Réciproquement, si $k = 2$, P est le polynôme chromatique du graphe $\mathcal{K}_4$, représenté ici.

Problème

1. Comme X suit la loi géométrique de paramètre p et Y la loi géométrique de paramètre q, on a pour tout entier positif n: $P(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$ et $P(Y \geq n) = (1-q)^{n-1}$.

2. Comme les événements $(\{X = i\})_{i \geq 1}$ forment une partition de l'espace Ω des possibles, on a

$$P(X \leq Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(\{X \leq Y\} \cap \{X = i\}).$$

Comme pour tout entier i, on a $\{X \leq Y\} \cap \{X = i\} = \{Y \geq i\} \cap \{X = i\}$, il s'ensuit

$$P(X \leq Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(\{Y \geq i\} \cap \{X = i\}),$$

d'où

$$P(X \leq Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) P(X = i)$$

car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

3. En remplaçant dans la dernière somme chaque expression par sa valeur (se reporter à la premièrequestion), on obtient

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-q)^{i-1} p (1-p)^{i-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)(1-q)\big)^k \\ &= p \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{p}{p+q-pq}. \end{aligned}$$

On est fondé à écrire ces calculs car les hypothèses sur p et q impliquent que $|(1-p)(1-q)| < 1$. On vient de montrer que si on avait deux variables aléatoires V_1 et V_2 indépendantes suivant les lois géométriques de paramètre p_1 et p_2 , on avait $P(V_1 \leq V_2) = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$. Il suffit maintenant de prendre $Y = V_1$ et $X = V_2$ pour en déduire que

$$P(Y \leq X) = P(X \geq Y) = \frac{q}{p+q-pq}.$$

4. (a) La formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ peut s'écrire aussi $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Lorsque les événements A et B vérifient $A \cup B = \Omega$, on a $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$, d'où

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1.$$

   (b) Il est clair que $\Omega = \{X \leq Y\} \cup \{Y \leq X\}$.
D'autre part $\{X = Y\} = \{X \leq Y\} \cap \{X \geq Y\}$. D'après la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P(X \leq Y) + P(Y \leq X) - 1 \\ &= \frac{p}{p + q - pq} + \frac{q}{p + q - pq} - 1 \\ &= \frac{pq}{p + q - pq}. \end{aligned}$$

5. Comme $P(X \leq Y) = \frac{p}{p+q-pq}$, on a $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $p + q - pq = 2p$, soit $q(1 - p) = p$, c'est à dire $q = \frac{p}{1-p}$.

6. (a) Comme $Z \leq X$, on a $\mathbb{E}Z \leq \mathbb{E}X = \frac{1}{p}$, car X suit une loi géométrique de paramètre p. De même $Z \leq Y$ entraîne $\mathbb{E}Z \leq \frac{1}{q}$. Ces deux inégalités entrainent $\mathbb{E}Z \leq \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$.

   (b) Comme $Z = \min(X, Y)$, on a $\{Z \geq n\} = \{X \geq n\} \cap \{Y \geq n\}$. Donc $P(Z \geq n) = P(\{X \geq n\} \cap \{Y \geq n\}) = P(X \geq n)P(Y \geq n)$. Il suffit alors de remplacer par les formules rappelées à la première question pour conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(Z \geq n) = (1 - p)^{n-1}(1 - q)^{n-1}$$

   (c) Posons $r = 1 - (1 - p)(1 - q)$. D'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(Z \geq n) = (1 - r)^{n-1}.$$

Soit $n \geq 1$. Comme les événements $\{Z = n\}$ et $\{Z \geq n + 1\}$ sont disjoints, on a $P(Z \geq n) = P(\{Z = n\} \cup \{Z \geq n + 1\}) = P(Z = n) + P(Z \geq n + 1)$. On a donc pour tout entier naturel non nul n:

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(Z \geq n) - P(Z \geq n + 1) \\ &= (1 - r)^{n-1} - (1 - r)^n \\ &= (1 - r)^{n-1}(1 - (1 - r)) \\ &= r(1 - r)^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que Z suit une loi géométrique de paramètre
$r = 1 - (1 - p)(1 - q)$.

(d) Comme Z suit une loi géométrique de paramètre $r = 1-(1-p)(1-q)$, on a $\mathbb{E}Z = \frac{1}{r} = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{1}{p+q-pq}$. Il suffit alors de comparer aux expressions de $P(X \leq Y)$ et $P(Y \leq X)$ trouvées plus haut pour avoir

$$\mathbb{E}Z = \frac{1}{p} P(X \leq Y) = \frac{1}{q} P(Y \leq X).$$

Comme $P(X \leq Y) \leq 1$, on en déduit que $\mathbb{E}Z \leq \frac{1}{p}$.
Comme $P(Y \leq X) \leq 1$, on en déduit que $\mathbb{E}Z \leq \frac{1}{q}$. On retrouve ainsi le résultat du (a).

7. (a) On sait que le nombre d'essais nécessaires pour obtenir une première réussite dans une série d'expériences aléatoires indépendantes et de même probabilité p suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi, le nombre X de lancers nécessaires à Jacques pour obtenir un $''1''$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{n}$ – on utilise ici l'hypothèse d'équiprobabilité. De même, le nombre Y de lancers nécessaires à Lionel pour obtenir un $''1''$ suit une loi géométrique de paramètre $q = \frac{1}{k}$. Évidemment, X et Y sont indépendantes, car les dés sont distincts.

Comme Jacques commence, il gagne si et seulement $X \leq Y$. Ainsi, le jeu est équitable, si et seulement si $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$. D'après une question précédente, cette condition est vérifiée si et seulement si $q = \frac{p}{1-p}$, qui s'écrit aussi $q = \frac{1}{\frac{1}{p}-1}$ soit $k^{-1} = (n-1)^{-1}$ ou encore $k = n-1$.

(b) Le gagnant a joué $Z = \min(X, Y)$ coups, donc il a doué en moyenne $\mathbb{E}Z = \frac{1}{p} P(X \leq Y) = nP(X \leq Y) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, car le jeu est équilibré.

FIN DE L'ÉPREUVE